MPSI
Nombres réels

Exercice 1:
Quelles sont les bornes inférieures et supérieures dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants (si elles existent):

$$E = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad E = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} - n^2; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 2:
Quel est la borne supérieure et inférieur dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble suivant? Que se passe-t-il si l'on cherche la borne supérieure dans $\mathbb{Q}$?

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2 \right\}.$$

Exercice 3:
On appelle nombre dyadique tout rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4:
Soit D une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et F une partie finie de D. Montrer que $D \setminus F$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2:
Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$ $-A = \{-a; a \in A\}$, $A^{-1} = \left\{a^{-1}; a \in A\right\}$

1. On suppose A et B majorées. Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$
2. On suppose A majorée. Montrer que $-A$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Inf}(-A) = -\mathrm{Sup}(A)$.
3. On suppose A et B majorées. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sup}(A \cup B) = \mathrm{Max}(\mathrm{Sup}(A), \mathrm{Sup}(B))$
4. On suppose $\{0\} \neq A \subset \mathbb{R}_+$ et A est majorée. Montrer que A^{-1} admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Inf}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Sup}(A)}$