MPSI
Suites réelles et complexes

Exercice 1:
Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_n, (v_n)_n$ les suites définies par:

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \left(u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\right). \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Exercice 2:
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes:

1. $u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{\alpha+1} n!}, n \geq 1, \alpha \in \mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 3:
Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 4:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \mathrm{C}_{2n}^n \sqrt{n} 4^{-n}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
2. En notant $l = \lim\limits_{n\infty} u_n$, établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l e^{-\frac{1}{8n}} < u_n < l$.

Exercice 5:

1. Montrer que la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.
2. Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite converge et calculer la limite
$$a) \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k},\ b) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx),\ c) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)},\ d) \frac{\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$$

Exercice 6:

1. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge alors $(u_n)_n$ est stationnaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $(u_n)_n$ une suite de rationnels qui converge vers x. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\lim_{n\infty} |p_n| = \lim_{n\infty} q_n = +\infty$. On suppose (par l'absurde) que $\lim_{n\infty} q_n \neq +\infty$.
   - Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(q_{\varphi(n)})_n$ convergente.

- En déduire que $(p_{\varphi(n)})_n$ converge également.
- En utilisant $1)$, montrer que l'on obtient une contradiction. Conclure.

Exercice 7:
Soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbb{C}$ et $(\lambda_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose:

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Démontrer $\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$

Exercice 8:

1. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers un réel l, alors $(\sqrt[n]{u_n})_n$ converge aussi vers l. (Utiliser un logarithme)
2. En déduire les limites quand n tend vers ∞ de $\sqrt[n]{n}, (\mathrm{C}_{pn}^{n})^{\frac{1}{n}}$ pour $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixé.

Exercice 9:
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$.

1. Montrer que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{u_n^2}$. Montrer $U_{n+1} - U_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 2$.
3. En déduire en utilisant le lemme de l'escalier que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Exercice 10:
Etudier les suites suivantes:

$a)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n} \end{cases}$, $b)\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+3}{2(u_n+1)} \end{cases}$, $c)\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6} \end{cases}$

Exercice 11:
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n, u_n > 0$ et que les intervalles $[0,2], [2,4], [4,+\infty[$ sont stables par $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+8)$.
2. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone.
3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 12:
On considère la suite $(\Phi_n)_n$ définie par $\left\{\begin{array}{ll} \Phi_0 = 0, & \Phi_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n \end{array}\right.$. Calculer Φ_n en fonction de n.

Exercice 13:
Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{2n})_n$,$(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge .

Exercice 14:
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites réelles telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a, v_n \leq b \text{ et } u_n + v_n \to a + b.$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.