

# MPSI-Trigonométrie

## Exercice 1 :

Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x-3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

## Exercice 2 :

Montrer :

$$\forall x \in ]0, 1], 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

## Exercice 3 :

– Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}.$$

– En déduire pour  $n \in \mathbb{N}$  la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \tanh(2^k x).$$

## Exercice 4 :

– Pour  $(n; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$  montrer que :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sinh(x)}{2^n \sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

– Montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh(t)}{t} = 1.$$

– En déduire la limite de  $P_n(x)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## Exercice 5 :

Résoudre l'équation sur  $\mathbb{R}$  :  $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ .

## Exercice 6 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \cosh(a + kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{k=n} \sinh(a + kb)$$

pour  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## Exercice 7 :

Etude et représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$ .

## Exercice 8 :

Etude et représentation graphique de la fonction  $f: x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ .

**Exercice 9 :**

Pour  $(n; x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ , calculer

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx)$$

et en déduire

$$\sum_{k=0}^n k \sinh(kx).$$

**Exercice 10 :**

Pour  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ , montrer par récurrence

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

et en déduire

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cosh(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n C_k^n \sinh(kx).$$