Apprentissage statistique

TD 3 : ε-recouvrements, VC dimension

Exercice 1 ε-recouvrement de la boule unité de $\mathbb{R}^p$

On note, pour $x \in \mathbb{R}^p$ et $\rho > 0$,

$$B_2(x, \rho) = \{x' \in \mathbb{R}^p, \|x - x'\| \leq \rho\}.$$

Soit $\varepsilon, B > 0$. L'objectif est de montrer que

$$S = \{\theta \in \mathbb{R}^p, \|\theta\|_2 \leq B\} = B_2(0, B).$$

admet un ε-recouvrement contenant au maximum $\max\left\{\left(\frac{5B}{\varepsilon}\right)^p ; 1\right\}$ éléments.

Soit C un sous-ensemble de S. On dit que C est un ensemble <u>ε-séparé</u>, si, pour tout $x, x' \in C$, $\|x - x'\|_2 > \varepsilon$. On dit que C est un ensemble <u>ε-séparé maximal</u> de S, si, pour tout $x \in S \backslash C$, $C \cup \{x\}$ n'est plus ε-séparé.

1. Vérifier que si $\varepsilon \geq B$, alors S admet un ε-recouvrement contenant 1 seul élément. Par la suite, on supposera que $\varepsilon < B$.
2. Soit $B', \rho > 0$, donner un ρ-recouvrement ρ-séparé $C_1(\rho, B')$ de $B_2(0, B')$ dans le cas $p = 1$. Vérifier qu'il est maximal et que
$$\mathrm{Card}(C) \leq \frac{2B'}{\rho}.$$
3. Montrer que $C_1^p(\varepsilon/\sqrt{p}, B')$ est un ε-recouvrement ε-séparé maximal de $[-B', B']^p$.
4. Soit $C = C_1^p(\varepsilon/\sqrt{p}, B) \cap B_2(0, B + \varepsilon)$. Montrer que C est ε-séparé et que
$$S \subset \bigcup_{x \in C} B_2(x, \varepsilon).$$
5. Montrer que
$$\bigcup_{x \in C} B_2\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B_2\left(0, B + \frac{3\varepsilon}{2}\right)$$
6. Montrer que, pour tous $x, x' \in C$ distincts,
$$B_2\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap B_2\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset.$$
7. En déduire que
$$\mathrm{Card}(C)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \leq \left(B + \frac{3\varepsilon}{2}\right)^p.$$
8. Conclure.

Answer of exercise 1

1. Si $\varepsilon \geq B$ alors $B_2(0, \varepsilon) \supseteq B_2(0, B)$ donc $C = \{0\}$ est un ε-recouvrement de S.

2. Dans le cas $p = 1$, $S = [-B'; B']$. Pour chaque $x \in S$, la boule fermée de centre x est de rayon ρ est l'intervalle
$$B_d(x, \rho) = [x - \rho; x + \rho].$$
On peut définir par exemple
$$C = \left\{ -B' + \rho; -B' + 3\rho; \dots; -B' + (2k+1)\rho; \dots; -B' + \left(2 \left\lceil \frac{B'}{\rho} \right\rceil + 1 \right) \rho \right\}$$
où, pour un réel x, $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x (on s'arrête dès que $-B' + (2k+1)\rho > B'$ i.e. $k > B'/\rho$). C est bien un ensemble $(2\rho - \delta)$-séparé par définition car, si $k \neq k'$,
$$|(-B' + (2k+1)\rho) - (-B' + (2k'+1)\rho)| = 2\rho|k - k'| \geq 2\rho > 2\rho - \delta,$$
et il est maximal car, pour tout $x \in [-B'; B']$, il existe k tel que
$$-B' + 2k\rho \leq x < -B' + 2(k+1)\rho,$$
donc $C \cup \{x\}$ n'est plus ρ-séparé. De plus nous avons bien
$$\text{Card}(C) = \left\lceil \frac{B'}{\rho} \right\rceil \leq \frac{2B'}{\rho},$$
si $B'/\rho > 1$.
3. Montrons que $C_1^p(\varepsilon/\sqrt{p}, B')$ est un ε-recouvrement de $[-B', B']^p$. Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in [-B', B']^p$, comme $C_1(\varepsilon/\sqrt{p}, B')$ est un $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$-recouvrement de $[-B', B']$, pour tout j, il existe $x_j' \in C_1(\varepsilon/\sqrt{p})$ tel que
$$|x_j - x_j'| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}.$$
Notons $x' = (x_1', \dots, x_p')$. Nous avons bien que $x' \in C_1^p(\varepsilon/\sqrt{p})$ et
$$\|x - x'\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (x_j - x_j')^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \frac{\varepsilon^2}{p}} = \varepsilon.$$
Il est par ailleurs ε-séparé car, pour tout $x = (x_1, \dots, x_p), x' = (x_1', \dots, x_p') \in C_1^p(\varepsilon/\sqrt{p}, B')$ distincts, comme $C_1(\varepsilon/\sqrt{p}, B')$ est $(2\varepsilon/\sqrt{p} - \delta')$-séparé, pour tout $\delta' \in]0, 2\varepsilon/\sqrt{p}[$,
$$d(x, x') = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (x_j - x_j')^2} > \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(2\varepsilon/\sqrt{p} - \delta'\right)^2} = 2\varepsilon - \sqrt{p}\delta',$$
d'où le résultat. On montre de même qu'il est maximal.
4. Soit $x \in S$, alors comme $S \subset [-B, B]^p$, d'après la question précédente il existe $x' \in C_1 p(\varepsilon/\sqrt{p}, B)$ tel que
$$\|x - x'\| \geq \varepsilon.$$
De plus $x' \in B_2(0, B + \varepsilon)$ car $\|x'\| \leq \|x' - x\| + \|x\| \leq \varepsilon + B$. De plus $C \subset C_1 p(\varepsilon/\sqrt{p}, B)$ qui est ε-séparé donc C est ε-séparé.
5. Il s'agit encore d'utiliser l'inégalité triangulaire.
6. Supposons par l'absurde qu'il existe $x, x' \in C$ distincts tels que
$$B_2\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap B_2\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset.$$
Soit $x'' \in B_2\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap B_2\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right)$ alors
$$d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x', x'') \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
ce qui contredit le fait que C est ε-séparé.

7. D'après 5.,
$$\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{x\in C} B_2\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \le \mathrm{Vol}\left(B_2\left(0, B+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$
D'après 4.,
$$\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{x\in C} B_2\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \sum_{x\in C}\mathrm{Vol}\left(B_2\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \mathrm{Card}(C)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \mathrm{Vol}\left(B_2\left(0,1\right)\right)$$
ce qui nous donne bien le résultat voulu.
8. On construit à partir de C un ε-recouvrement de S. Posons
$$C' = \pi_S(C) = \{\pi_S(x), x\in C\},$$
où π_S est la projection orthogonale sur S. Soit $x\in S$, par 4. il existe $x'\in C$ tel que
$$\|x - x'\| \le \varepsilon.$$
Donc, comme $x\in S$,
$$\|x-\pi_S(x')\| \le \|x-x'\| \le \varepsilon.$$
On remarque que C' n'est plus forcément ε-séparé. En revanche
$$\mathrm{Card}(C') \le \mathrm{Card}(C) \le \frac{\left(B+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p} = \left(\frac{2B}{\varepsilon}+1\right)^p.$$

Exercice 2 VC-dimension exemples simples

Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$. Calculer $V_{\mathcal{G}}$ lorsque

1. $d=1$ et $\mathcal{G}_1 = \{g = \mathbf{1}_{]a,b[}, a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, a<b\}$ est l'ensemble des intervalles ouverts.
2. $d=1$ et $\mathcal{G}_2 = \{g; \exists g_1,g_2\in\mathcal{G}_1, g = g_1+g_2-g_1g_2\}$ est l'ensemble des unions de deux intervalles ouverts.
3. $d=2$ et $\mathcal{G}_3 = \{g=\mathbf{1}_{[a,b]^2}, a,b\in\mathbb{R}\}$.
4. $d=2$ et $\mathcal{G}_4 = \{g; \exists a,b\in\mathbb{R}, g(x,y) = \mathbf{1}_{\{ax+by>0\}}\}$.
5. $d=2$ et $\mathcal{G}_5 = \{g; \exists a,b,c\in\mathbb{R}, g(x,y) = \mathbf{1}_{\{ax+by+c>0\}}\}$.
6. $d=2$ et $\mathcal{G}_6 = \{g=\mathbf{1}_C$ avec C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2\}$.

Answer of exercise 2

1. Soit $S\subset\mathcal{X}$ tel que S est pulvérisé par $\mathcal{G}$. Soit $S'\in\mathcal{P}(S)$, il existe $g=\mathbf{1}_{]a,b[}\in\mathcal{G}_1$ tel que $]a,b[\cap S = S'$. Si $S=\{x_1,x_2,x_3\}$, $x_1<x_2<x_3$ alors S n'est pas pulvérisé par $\mathcal{G}$ car il n'existe pas d'intervalle $]a,b[$ tel que $S\cap]a,b[=\{x_1,x_3\}$ (un intervalle contenant x_1 et x_3 contiendra forcément aussi x_2). Par contre tout ensemble $S=\{x_1,x_2\}$ de cardinal 2 sera pulvérisé par $\mathcal{G}$ (si $x_1<a<x_2$, $]-\infty,x_1[\cap S=\emptyset$, $]-\infty;a[\cap S=\{x_1\}$, $]a:+\infty[\cap S=\{x_2\}$, $]-\infty;+\infty[\cap S = S$). Donc $V_{\mathcal{G}_1}=2$.
2. $V_{\mathcal{G}_2}=4$. En effet, si $S=\{x_1,\ldots,x_4\}$, alors on peut vérifier que pour toute sous-partie S' de S, il existe deux intervalles $]a_1,b_1[$ et $]a_2,b_2[$ tels que $S\cap(]a_1,b_1[\cup]a_2,b_2[=S'$ (faire un dessin pour s'en convaincre). En revanche, si on ajoute un point x_5, c'est-à-dire $S=\{x_1,\ldots,x_5\}$ et, sans perte de généralité, supposons, $x_1<x_2<\ldots<x_5$, alors on ne peut pas trouver deux intervalles $]a_1,b_1[$ et $]a_2,b_2[$ tels que $S\cap(]a_1,b_1[\cup]a_2,b_2[)=\{x_1;x_3;x_5\}$ (idem faire un dessin pour s'en convaincre).
3. $V_{\mathcal{G}_3}=3$. Il existe $S=\{x_1,x_2,x_3\}$ (dès que x_1, x_2 et x_3 ne sont pas alignés). Par contre dès que $\mathrm{Card}(S)=4$, $\mathcal{G}$ ne pulvérise pas S supposons par exemple $S=\{x_1,\ldots,x_4\}$ avec x_1 et x_4 les deux points de S les plus éloignés, alors on ne peut pas trouver de carré $[a,b]^2$ contenant x_1 et x_4 mais pas x_2 ou x_3.
4. Ici $\mathcal{G}_4$ contient les demi-plans séparés par une droite passant par 0. Nous avons $V_{\mathcal{G}_4}=2$, en effet, prenons par exemple $x_1=(1,1)$ et $x_2=(1,-1)$, $S\cap\{x>0\}=S$, $S\cap\{x<0\}=\emptyset$, $S\cap\{y>0\}=\{x_1\}$ et $S\cap\{y<0\}=\{x_2\}$. Donc il existe un ensemble S de cardinal 2 pulvérisé par $\mathcal{G}_4$ ce qui implique $V_{\mathcal{G}_4}\ge 2$. Prenons maintenant $S=\{x_1,x_2,x_3\}$ de cardinal 3 et montrons qu'il n'est pas pulvérisé par $\mathcal{G}_4$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, alors il existe $a_S,b_S\in\mathbb{R}$, tels que $S\cap\{a_Sx+b_Sy>0\}=S$ (il existe un demi-plan passant par 0 contenant tous les points de S), $a_{1,2},b_{1,2}\in\mathbb{R}$ tels que $S\cap\{a_{1,2}x+b_{1,2}y>0\}=\{x_1,x_2\}$ (il existe un demi-plan passant par 0 contenant x_1 et x_2 mais pas x_3), $a_{2,3},b_{2,3}\in\mathbb{R}$ tels que $S\cap\{a_{2,3}x+b_{2,3}y>0\}=\{x_2,x_3\}$ (il existe un demi-plan passant par 0 contenant x_2 et x_3 mais pas x_1). Dans ce cas, il ne peut pas exister de demi-plan passant par 0 et contenant x_1 et x_3 mais pas x_2 (là encore on peut faire un dessin pour s'en convaincre). Ce qui implique $V_{\mathcal{G}_4}<3$.

5. Nous avons $\mathcal{G}_5 \supset \mathcal{G}_4$, donc $V_{\mathcal{G}_5} \geq V_{\mathcal{G}_4}$. Nous avons $V_{\mathcal{G}_5} \geq 3$, en effet, soit $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (-1,1)$, $x_3 = (1,-1)$, $S \cap \{x+y+1>0\} = S$, $S \cap \{-x-y-1>0\} = \emptyset$, $S \cap \{x+y-1>0\} = \{x_1\}$, $S \cap \{-x-y+1>0\} = \{x_2, x_3\}$, $S \cap \{-x>0\} = \{x_2\}$, $S \cap \{x>0\} = \{x_1, x_3\}$, $S \cap \{-y>0\} = \{x_3\}$, $S \cap \{y>0\} = \{x_1, x_2\}$. Prenons maintenant S de cardinal 4, nous pouvons voir sur un dessin que s'il existe des demi-plans isolant chacun des points des 3 autres, on peut trouver deux couples de points disons (x_1, x_2) et (x_3, x_4) tels qu'aucun hyperplan ne va séparer $\{x_1, x_2\}$ de $\{x_3, x_4\}$. Donc $V_{\mathcal{G}_5} < 4$, d'où $V_{\mathcal{G}_5} = 3$.
6. Montrons que $V_{\mathcal{G}_6} = \infty$. Soit $J \in \mathbb{N}^*$ et S_J les sommets d'un polygone convexe C à J sommets. Soit $S' = (x_1, \ldots, X_{J'}) \subset S_J$ et C' l'enveloppe convexe de S' c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe contenant S'. Alors, $S \cap C = S'$. En effet $S' \subset S$ par définition et $S' \subset C$ par définition également donc $S' \subset S \cap C'$. Soit maintenant $x \in S \cap C'$, comme $x \in C'$ qui est l'enveloppe convexe de S', cela veut dire qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{J'} \in [0,1]$ tels que $\sum_{j=1}^{J'} \alpha_j = 1$ et

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{J'} x_{J'}.$$

Comme $x_1, \ldots, x_{J'} \in C$, et que x est un somme de C, x est un point extremal de C donc cela implique que $x \in \{x_1, \ldots, x_{J'}\} = S$ (voir `https://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/4M001/15-ch2-2oct.pdf` pour des rappels sur la convexité).

Exercice 3 Démonstration du lemme de Sauer

Soit $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \exists G \in \mathcal{P}, g = \mathbf{1}_G\}$ où $\mathcal{P}$ est un ensemble de parties de $\mathcal{X}$. Nous démontrons d'abord la propriété suivante par récurrence sur $n = \text{Card}(S)$:

$$\text{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)} C_n^k \tag{1}$$

1. Prouver que pour $n=1$ on a $\text{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq 2$ et $\text{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq 1$ si $V_{\mathcal{G}}(S) = 0$. En déduire que (1) est vraie pour $n = 1$.
2. Soit $n \geq 2$, nous supposons maintenant que (1) est vraie pour tout ensemble S de cardinal inférieur ou égal à $n-1$. Fixons $x_0 \in S$ et posons $S_0 = S \backslash \{x_0\}$ et

$$g_0(x) = \mathbf{1}_{\{x = x_0\}}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \exists G \in \mathcal{P}, f = \mathbf{1}_{G \cup \{x_0\}}\} \\ \mathcal{G}_2 &= \{g \in \mathcal{G}, \exists G \in \mathcal{P}, g = \mathbf{1}_G, x_0 \notin G, G \cup \{x_0\} \in \mathcal{P}\}. \end{aligned}$$

   (a) Vérifier que $V_{\mathcal{G}_1}(S_0) \leq V_{\mathcal{G}}(S)$.
   (b) Vérifier que $V_{\mathcal{G}_2}(S_0) \leq V_{\mathcal{G}}(S) - 1$.
   (c) Montrer que
$$\text{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq \text{Card}(T_{\mathcal{G}_1}(S_0)) + \text{Card}(T_{\mathcal{G}_2}(S_0))$$
   (d) On rappelle que $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, montrer l'inégalité (1).
   (e) Vérifier que, pour tous entiers naturels d, n non nuls et pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$,
$$n(d-j+1) \geq n-j+1.$$
   En déduire que $C_d^k n^k \geq C_n^k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$.
3. Déduire des questions précédentes le Lemme de Sauer.

Lemme 1 (Lemme de Sauer) *Pour tout $S \subset \mathcal{X}$,*

$$\text{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq (N+1)^{V_{\mathcal{G}}(S)}.$$

Answer of exercise 3

1. Si $n = 1$, alors $S = \{x_1\}$ est de cardinal 1, $T_{\mathcal{G}}(S)$ est inclus dans $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, S\}$ donc

$$\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(S)) = 2.$$

Si, de plus, $V_{\mathcal{G}}(S) = 0$, alors cela implique que $\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) < 2^1 = 2$, on obtient le résultat voulu en séparant les cas $V_{\mathcal{G}}(S) = 0$ et $V_{\mathcal{G}}(S) > 0$ et en remarquant que $C_n^0 = 1$ et $C_n^1 = n$.

(a) Remarquons que $\mathcal{G}_1$ est l'ensemble des fonctions indicatrices $\mathbf{1}_G$ où $G = G' \cup \{x_0\}$, $G' \in \mathcal{P}$. Soit $J = V_{\mathcal{G}_1}(S_0)$ et S_0' un sous-ensemble de S_0 de cardinal J tel que

$$\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}_1}(S_0')) = 2^J = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(S_0')).$$

Comme $T_{\mathcal{G}_1}(S_0') \subset \mathcal{P}(S_0')$ cela implique que

$$T_{\mathcal{G}_1}(S_0') = \mathcal{P}(S_0'),$$

donc pour tout $S_0'' \subset S_0'$, il existe $g = \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}_1$ tel que $S_0' \cap G = S_0''$. Par définition de $\mathcal{G}_1$, il existe $G' \in \mathcal{P}$ tel que $G = G' \cup \{x_0\}$. Donc

$$S_0' \cap G = S_0' \cap (G' \cup \{x_0\}) = S_0''$$

S_0' est un sous-ensemble de S_0 donc il ne contient pas x_0. Cela implique que $S_0' \cap (G' \cup \{x_0\}) = S_0' \cap G'$ et donc qu'il existe $G' \in \mathcal{P}$, tel que

$$S_0' \cap G' = S_0'',$$

comme cela est vrai pour tout $S_0'' \subset S_0'$, cela implique que S_0' est pulvérisé par $\mathcal{G}$ et donc qu'il existe un sous-ensemble de cardinal J de S tel que $\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S_0')) = 2^J$, d'où $J \leq V_{\mathcal{G}}(S)$.

(b) Soit $J = V_{\mathcal{G}_2}(S_0)$ et S_0' un sous-ensemble de S_0 de cardinal J tel que

$$\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}_2}(S_0')) = 2^J = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(S_0')).$$

ce qui implique comme précédemment que

$$T_{\mathcal{G}_2}(S_0') = \mathcal{P}(S_0'),$$

Soit $S' = S_0' \cup \{x_0\}$, on va montrer que

$$T_{\mathcal{G}}(S') = \mathcal{P}(S'),$$

ce qui implique $J + 1 \leq V_{\mathcal{G}}(S)$ car le cardinal de S' est $J + 1$. Soit S'' un sous-ensemble de S',

— Si $x_0 \notin S''$, alors $S'' \subset S_0'$ par définition et donc $S'' \in T_{\mathcal{G}_2}(S_0')$, donc par définition, il existe $g = \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}_2$ tel que $S_0' \cap G = S''$. On en déduit que

$$(S_0' \cap G) \cup \{x_0\} = S'' \cup \{x_0\}.$$

Or

$$(S_0' \cap G) \cup \{x_0\} = (S_0' \cup \{x_0\}) \cap (G \cup \{x_0\}) = S' \cap (G \cup \{x_0\})$$

donc

$$S' \cap (G \cup \{x_0\}) = S'' \cup \{x_0\}.$$

Comme $x_0 \in S'$, cela implique

$$(S' \cap G) \cup \{x_0\} = S'' \cup \{x_0\}.$$

Or $x_0 \notin G$ par définition de $\mathcal{G}_2$ et $x_0 \notin S''$ donc on a aussi

$$S' \cap G = S''.$$

— Si $x_0 \in S''$, alors $S'' \backslash \{x_0\} \in S_0'$, donc il existe $g = \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}_2$ tel que $S_0' \cap G = S'' \backslash \{x_0\}$. Cela implique

$$(S_0' \cap G) \cup \{x_0\} = S''$$

Or

$$(S_0' \cap G) \cup \{x_0\} = S' \cap (G \cup \{x_0\}),$$

et $\mathbf{1}_{G \cup \{x_0\}} \in \mathcal{G}$ par définition de $\mathcal{G}_2$.

Dans les deux cas, on a trouvé $g = \mathbf{1}_{G'}$ avec $G' \in \mathcal{G}$ tel que $S' \cap G = S''$. Comme c'est vrai quel que soit $S'' \in \mathcal{P}(S')$, cela implique bien le résultat recherché.

(c) Nous avons

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{G}}(S) &= \{S' \subset S, \exists G, \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}, G \cap S = S'\} \\ &= \underbrace{\{S' \subset S_0, \exists G, \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}, G \cap S = S'\}}_{=T_1} \cup \underbrace{\{S'' \subset S_0, \exists G, \mathbf{1}_G \in \mathcal{G}, G \cap S = S'' \cup \{x_0\}}_{=T_2}. \end{aligned}$$

où nous avons considéré pour le deuxième ensemble que si S' n'était pas inclus dans S_0, cela voulait dire que $x_0 \in S'$ et donc que $S'' = S' \backslash \{x_0\} \subset S_0$.

— Pour l'ensemble T_1 remarquons que, si $S' \in S_0$ alors $x_0 \notin S'$ et donc si $G \cap S = S'$ cela implique que $x_0 \notin G$. Donc
$$(G \cup \{x_0\}) \cap S_0 = (G \cap S) \cap (\underbrace{G \cup \{x_0\}}_{=\emptyset}) = S'$$
Cela implique que $T_1 \subset T_{\mathcal{G}_1}(S_0)$.

— Pour l'ensemble T_2, nous remarquons que si $G \cap S = S'' \cup \{x_0\}$ alors $(G \cap S) \backslash \{x_0\} = S''$, donc
$$G \backslash \{x_0\} \cap S_0 = S'',$$
cela implique que $T_2 \subset T_{\mathcal{G}_2}(S_0)$.

Donc
$$\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq \mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}_1}(S_0)) + \mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}_2}(S_0)).$$

(d) Par hypothèse de récurrence, en utilisant les résultats des questions précédentes on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) &\leq \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}_1}(S_0)} C_{n-1}^k + \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}_2}(S_0)} C_{n-1}^k \leq \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)} C_{n-1}^k + \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)-1} C_{n-1}^k \\ &\leq C_{n-1}^0 + \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)-1} C_{n-1}^{k-1} + \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)-1} C_{n-1}^k \\ &\leq 1 + \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)-1} C_n^k \leq \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)} C_n^k. \end{aligned}$$

(e) La propriété peut-être montrée par exemple par récurrence sur n. Nous observons ensuite que

$$C_d^k n^k = \frac{d! n^k}{k!(d-k)!} = \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)n^k}{k!} \geq \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

(f) D'après (1), et la question précédente, en posant $d = V_{\mathcal{G}}(S)$,

$$\mathrm{Card}(T_{\mathcal{G}}(S)) \leq \sum_{k=0}^{V_{\mathcal{G}}(S)} C_n^k \leq \sum_{k=0}^{d} n^k C_d^k = (n+1)^d,$$

par le binôme de Newton.