Correction du contrôle continu 1 - Analyse
MD1, premier semestre.

Exercice 1

a) $E = \{(n+1)^2 - n^2, n \in \mathbb{N}\}$:

$E \subset \mathbb{N}$, car $n+1 \geq n \geq 0$ donc $(n+1)^2 \geq n^2$ don E est minoré par 0, notamment. D'autre part

$$E = \{p = 2*n+1, n \in \mathbb{N}\} = 2*\mathbb{N}+1,$$

donc E n'est pas majoré: sinon, il existerait $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2n+1 \leq M \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \leq (M-1)/2$$

ce qui est impossible car $\mathbb{N}$ est non majoré.

Comme $E \subset \mathbb{N}$ La borne inférieure est le plus petit élément et vaut 1.

b) $E = \{10^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

$$E \subset \mathbb{R}^+,$$

car $10^{-n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc E est minoré.

D'autre part $10^{-n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ don E est majoré, donc E est borné.

1 est un majorant de E et $1 = 10^{-0} \in R$ donc 1 est le plus grand élément et la borne sup de E. Et $10^{-n} = e^{-n \log 10}$ tend vers 0 qd n tend vers $+\infty$ et 0 est un minorant de E, n'appartenant pas à E, donc E est la borne inf de E : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < 10^{-n} < \epsilon$.

c) $E = \{\cos^2(x), x \in]0, \pi]\}$

On a $\cos^2(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc E est borné, majoré par 1 et minoré par 0. $1 \in E$ car $1 = \cos^2 \pi$ et $0 = \cos^2(\pi/2) \in E$ donc 1 et 0 sont respectivement la borne sup (et le plus grand élément) et la borne inf (et le plus petit élément).

Exercice 2 Montrer que

$$\left\{x \in [0,1]; \exists n \in \mathbb{N}^\star; \frac{3}{n} \leq x \leq 1\right\} =]0,1]$$

Soit

$$E = \left\{x \in [0,1]; \exists n \in \mathbb{N}^\star; \frac{3}{n} \leq x \leq 1\right\} \subset [0,1].$$

D'autre part $0 \notin E$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 < 3/n$. Donc $E \subset]0,1]$. Réciproquement, si $x \in]0,1]$, comme la suite $(3/n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 qd n tend vers $+\infty$ il exists $n \in \mathbb{N}^*$ $3/n \leq x \leq 1$, donc $x \in E$ donc $]0,1] \subset E$. Finalement $E =]0,1]$.

Exercice 3

Partie A

Soit la suite définie par

$$u_n = \frac{E\left(n\sqrt{2}\right)}{n}, \quad n \geq 1$$

a) Montrer que la suite est bornée.

Par définition e la partie entière :

$$E\left(n\sqrt{2}\right) \leq n\sqrt{2} < E\left(n\sqrt{2}\right) + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc si $n > 0$,

$$\frac{E\left(n\sqrt{2}\right)}{n} \leq \sqrt{2} < \frac{E\left(n\sqrt{2}\right)}{n} + \frac{1}{n}$$

et

$$\sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2} - 1/n < u_n \leq \sqrt{2}$$

La suite est donc bornée.

b) Montrer que la suite $\sqrt{2} - u_n$ converge vers 0, en déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite .

D'après la question précédente :

$$1/n > \sqrt{2} - u_n \geq 0, \quad \forall n > 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - u_n| \leq 1/n$$

et la suite $(1/n)_{n>0}$ tend vers 0 qd n tend vers $+\infty$ donc la suite $u_n - \sqrt{2}$ tend vers 0 donc $(u_n)_n$ tend vers $\sqrt{2}$.

Partie B

Soit la suite définie par :

$$u_0 = 1/2, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

1. Montrer que la suite u_n est croissante.

Soit $f(x) = \sqrt{x} - x$, si $x \leq 1$ $f(x) \geq 0$. Donc $1 \geq u_1 = \sqrt{1/2} \geq 1/2 = u_0$. Montrons que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_0 \in [0,1]$ Proposition $\mathcal{P}(n) = (u_n \in [0,1])$. On suppose la proposition vraie au rang n. Au rang $n+1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \geq 0$ et comme la fonction g qui a x associe $\sqrt{x}$ satisfait : $g([0,1]) \subset [0,1]$, $u_{n+1} \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N} u_n \in [0,1]$. En utilisant le résultat sur f, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \geq u_n$ et la suite u est croissante.

2. Montrer que la suite est bornée.

On a vu dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \in [0,1]$ donc la suite est bornée.

3. Montrer que la suite peut s'écrire sous la forme

$$u_n = 2^{-1/(n+1)}$$

et en déduire que la suite v définie par $v_n = \log(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.

Il y a une erreur dans l'énoncé.

$u_1 = \sqrt{u_0} = 2^{-1/2}, u_2 = \sqrt{u_1} = 2^{-1/(2*2)}$ On raisonne par récurrence. $\mathcal{P}(n) : (u_n = 2^{-1/2^n})$

La proposition est vraie au rang 1. Supposons qu'elle soit vraie au rang n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{2^{-1/2^n}} = (2^{-1/2^n})^{1/2} = 2^{-1/2^{n+1}}$$

Donc la proposition est vraie pour tout n

$$\log u_n = -\frac{1}{2^n} = -\exp\{n \log(1/2)\}$$

et $\log(1/2) < 0$ donc $\log(u_n)$ est de la forme $-e^{-n\alpha}$ la suite $(\log(u_n))_n$ tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Première méthode: On a vu que $v_n = \log(u_n)_n$ tendait vers 0, quand n tend vers $+\infty$. Or la fonction exponentielle est continue en 0 donc la suite de terme $\exp(v_n) = u_n$ tend vers $\exp(0) = 1$.

Deuxième méthode : La suite u est croissante et majorée donc elle converge vers $l \in [0, 1]$. Pour tout n $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ donc a la limite

$$l = \sqrt{l}$$

soit $l = 0$ ou $l = 1$. Or u_n est croissante donc $l \geq u_0 = 1/2$ donc $l = 1$.