Exercice n°1

1/ Montrer que pour tout $x \neq 1$ et tout $n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

▲ Par récurrence, ▼ En calculant $(1-x) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

2/ Calculer, pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n tel que $\forall x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{P_n(x)}{(1-x)^2}$

▲ En dérivant l'identité du 1/, ▼ En calculant $(1-x)^2 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice n°2

Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1/ Calculer S_1, S_2 et S_3.

2/ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

▲ Par récurrence, ▼ En utilisant la décomposition $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

3/ Calculer pour tout $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice n°3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

M.L.A.S. [1]

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$.

2/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leq e^a$.

3/ Lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\quad e^a - \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \sim \dfrac{a^2\, e^a}{2n}$.

1. (Montrer les assertions suivantes.)