### Exercice n°1

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ la série de TG $n \geq 1, u_n = f(n) - \int_{n-1/2}^{n+1/2} f(t)\,dt$.

1/ Montrer que $\sum u_n$ converge.

$\left(\text{Pour une fonction } g \text{ de classe } \mathcal{C}^2,\ \left|g(x) - \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} g(t)dt\right| \leq \dfrac{h^2}{6} \times \sup_{[x-h,x+h]} \left|g''\right|.\right)$

2/ Montrer que $\sum f(n)$ diverge mais que ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ sont bornées.

3/ Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}$ converge.

### Exercice n°2

1/ Donner le DSE de $z \longrightarrow \dfrac{1}{(1-z)^2}$ en précisant son domaine de validité.

2/ Même question avec $z \longrightarrow \dfrac{1}{(1-z)^3}$.

3/ Montrer que $\sum nz^n$ converge si $|z| < 1$ et calculer $\displaystyle\sum_0^{+\infty} nz^n$.

4/ Même question avec $\sum n^2 z^n$.

### Exercice n°3

1/ Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z \longrightarrow \dfrac{1}{z_0 - z}$ admet un DSE, en précisant les cœfficients et le domaine de convergence. $\left(\text{Poser } w = \dfrac{z}{z_0}\right)$

2/ Même question pour $z \longrightarrow \dfrac{1}{(z_0 - z)^2}$.

### Exercice n°4

Soit – $f : ]-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (2 + x)\ln(1 + x) - 2x$

– $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 3}$ les suites définies par $x_n = \dfrac{n^{n+1/2}}{n! \times e^n}$ et $a_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n-1}$.

1/ Préciser le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de $\displaystyle\sum_{n\geq 3} a_n z^n$.

2/ Montrer que $\forall x \in ]-1, 1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 3}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n x^n$.

3/ Montrer que pour $x \in [0, 1]$, $\displaystyle\sum_{n\geq 3} (-1)^{n-1} a_n x^n$ satisfait aux hypothèses du CSA.

4/ Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$\left(\text{Exprimer } \ln \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \text{ en fonction de } n \text{ et poser } x = \dfrac{1}{n}\right)$

**Exercice n°5**

On note $\sum a_n z^n$ la série de Taylor de la fonction $x \longrightarrow \tan x$ et $R$ son RCV.

1/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ à cœfficients dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in ]-\pi/2, \pi/2[, \qquad \tan^{(n)} x = P_n\big(\tan(x)\big).$$

2/ En déduire que $\forall x \in [0, \pi/2[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \tan x.$

3/ Qu'en conclut-on sur $R$ ?

4/ Peut-on conclure que pour $|x| < \dfrac{\pi}{2},\ \tan x = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ ?

**Exercice n°6**

Soit – $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{n^{n+1/2}}{n! \times e^n}$

– $f : ]-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = (x+1)(x+2)\ln(1+x) - 2(x+x^2) - \frac{x^3}{6}$$

– $(a_n)_{n\geq 5}$ la suite définie par $a_n = -\dfrac{1}{n-2} + \dfrac{3}{n-1} - \dfrac{2}{n}.$

**M.L.A.S.:**

1/ La suite $(a_n)_{n\geq 5}$ est monotone. $\left(\forall x \neq -1, 0, 1,\ \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{(x-1)x(x+1)}\right)$

2/ La série entière $\sum (-1)^n a_n z^n$ converge pour $|z| \leq 1$.

3/ $\forall x \in ]-1, 1],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$

4/ $\forall n \geq 1, \qquad \dfrac{1}{12n(n+1)} - \dfrac{1}{120n^3(n+1)} \leq \ln x_{n+1} - \ln x_n \leq \dfrac{1}{12n(n+1)}.$

$\left(\text{Poser } \dfrac{n+1}{n} = 1 + x.\right)$

5/ $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^3(n+1)} \leq \frac{9}{16}$ $\qquad \left(\text{Pour } n \geq 2,\ \dfrac{1}{n^3(n+1)} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{(n-1)n} - \dfrac{1}{n(n+1)}\right).\right)$

6/ La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge et sa limite $L$ vérifie

$$e^{-11/12} e^{-3/640} \leq L \leq e^{-11/12}.$$