### Exercice n°1

1/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$, $\dfrac{1}{n^2-4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n+2}\right)$.

2/ Pour tout $n \geq 3$, calculer $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^2-4}$.

3/ Montrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-4}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}$.

### Exercice n°2

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t \; dt$. Montrer que $\sum J_n$ diverge.

$\Big($Calculer $J_n + J_{n+2}$ ou poser $u = \tan t$.$\Big)$

### Exercice n°3

1/ Pour tout $n \geq 1$ et $x \neq 1$ vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

2/ Montrer que $\displaystyle\sum \frac{n}{2^n}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

### Exercice n°4

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite associée définie par $u_1 = x_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = x_n - x_{n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$ soit $f_n = \dfrac{1}{[X]}$ sur $[1, n[$. $\Big($Pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est la partie entière de $x$.$\Big)$

0/ Calculer $\displaystyle\int_1^n f_n(t)\; dt$.

1/ Montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$. $\Big(\ln(1+x) = x + O(x^2)$ en $0\Big)$

2/ Conclusions et interprétation graphique ? $\left(\ln n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}\right)$

3/ Pourquoi fallait-il utiliser Taylor-Lagrange et non Taylor-Young : $\ln(1+x) = x + o(x)$ en $0$ ?

### Exercice n°5

Soit $\displaystyle\sum \frac{1}{n^3}$ la série dont la somme est $\zeta(3) = \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Pour $N \geq 1$, $R_N = \displaystyle\sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

1/ Vérifier que pour pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3}$.

2/ Trouver $N$ minimum tel que $R_N < 1/1000$.

**Exercice n°6**

Soit $(x_n)_{n\geq 1},\ (y_n)_{n\geq 1},\ (u_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par

$$x_n = \frac{n^{n+1/2}}{n!e^n}, \qquad y_n = \ln x_n, \qquad u_1 = y_1 \quad \text{et} \quad u_n = y_n - y_{n-1} \text{ pour } n \geq 2.$$

Soit $f_n$ la fonction définie sur $[1, n]$ en posant pour $1 \leq k \leq n-1$ et $t \in [0, 1]$

$$f_n(k+t) = (1-t)\ln k + t\ln(k+1).$$

0/ Calculer $\displaystyle\int_1^n f_n(u)\ du$.

1/ Montrer que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$. $\left(\text{En } 0,\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)\right)$

2/ Conclusions et interprétation graphique ? $\left(n\ln n - n + 1 = \displaystyle\int_1^n \ln t\ dt\right)$

**Exercice n°7**

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{n}}{(n!)^2\, 4^n}$.

Pour $n \geq 2$ on note $u_n = \ln x_n - \ln x_{n-1}$.

Montrez les assertions suivantes :

1/ $\forall n \geq 2$, $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k\right) = 2x_n$. $\big(\text{Faire une récurrence}\big)$

2/ $\forall n \geq 2$, $\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{4n(n-1)}$.

3/ $\forall n \geq 2$, $0 < u_n < \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

4/ $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $L \neq 0$.

5/ $L < \dfrac{e^{1/8}}{2}$.

6/ $\forall n \geq 2$, $u_n > \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{64\big(n(n-1)\big)^2}$.

7/ $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{\big(n(n-1)\big)^2} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{(n-1)^3} - \dfrac{1}{n^3}\right)$.

8/ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)^2} \leq \frac{1}{3}$.

9/ $L > \dfrac{e^{23/192}}{2}$.