Exercice n°1

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit sur $[0,1]$ $u_n = X^n(1-X)$.

1/ Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et calculer $\sum_0^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

2/ Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

3/ Vérifier que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

Exercice n°2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit sur $\mathbb{R}_+$ $u_n = \ln\left(1+\dfrac{X^2}{n^2}\right)$.

1/ Vérifier que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2/ Montrer que $\sum u_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3/ Montrer que pour tourt $A > 0$, $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0,A]$.

Exercice n°3

Soit u_n définie sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq 1$ par $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

1/ Soit $a > 0$. Montrer que pour $n > e^{1/a}$, u_n est décroissante sur $[a,+\infty)$.

2/ Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3/ Soit $a > 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty)$.

Exercice n°4

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ la série de TG u_n défini pour $n \geq 1$ sur $[0,1]$ par

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + X}.$$

1/ Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$, on note $U_N(x) = \sum_1^N \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + x}$.

2/ Pour quelles valeurs de α

- $\sum u_n$ converge -t-elle normalement sur $[0,1]$?
- $\sum u_n'$ converge -t-elle normalement sur $[0,1]$?

Pour tout $n \geq 1$ on note $v_n = \dfrac{1}{(2n-1)^\alpha + X} - \dfrac{1}{(2n)^\alpha + X}$ et $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$.

3/ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $V_n = U_{2n}$. Conséquence ?

4/ Reprendre la question 2/ pour $\sum v_n$ et conclure.