Optimisation linéaire et convexité
TP1

30 janvier 2014

Maxime CHUPIN, bureau 16-26-333, `chupin@ann.jussieu.fr`.

L'objectif de cette séance est de réviser les commandes de base du logiciel liées au calcul matriciel et de les utiliser dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires : $Ax = b$, où $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$ et $x \in \mathbf{R}^m$ désigne l'inconnue.

1 Calcul matriciel sous `scilab`

`scilab` est un logiciel de calcul scientifique développé par l'INRIA. Vous pouvez le télécharger gratuitement en ligne à l'adresse suivante `http://www.scilab.org`. Dans le cadre de cette séance, seules les fonctions de base du calcul matriciel seront utilisées. Pour une introduction à `scilab`, vous pouvez télécharger ce pdf `www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/doc.pdf`.

Exercice 1: On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbf{R})$ définie par :

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

1. Définir la matrice A sous `scilab`.
2. Multiplier les deux premières lignes par 2, puis diviser la dernière colonne par 3.
3. Créer une nouvelle matrice B définie par

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   en utilisant le fait que les lignes 1 et 2 sont composées des éléments successifs de deux suites arithmétiques.
4. Créer la matrice $C \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ extraite de A telle que pour $1 \leq i, j \leq 3$, $c_{ij} = a_{ij}$.
5. Différents produits matriciels
   – Réaliser le produit matriciel D de B et A.
   – Réaliser le produit d'HADAMARD E de B et de C.
   *Pour mémoire, le produit d'*HADAMARD $E \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ *des matrices* $B \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ *et* $C \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ *est défini par*

$$\forall 1 \leq i, j \leq 3, \quad e_{ij} = c_{ij} b_{ij}.$$

6. Calculer la somme des éléments de la matrice E et le vecteur colonne $Y \in \mathbf{R}^3$ tel que pour $1 \leq i \leq 3$, $y_i = \sum_{j=1}^{4} d_{ij}$. (il faut exploiter les options de la commande `sum`)

Exercice 2: Nous allons ici explorer quelques commandes très utiles en algèbre linéaire.

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & 10 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi A est-elle diagonalisable ? À l'aide de la fonction `spec`, calculer sous `scilab` ses valeurs propres et donner une base de vecteurs propres.
2. Calculer de deux manières l'inverse de A en utilisant le résultat précédent et la fonction `inv`. Comparer les résultats obtenus.
3. On considère maintenant la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Examiner, comme à la question précédente, les cas $n = 5, 10, 50$. Comparer les valeurs propres obtenues avec les valeurs définies pour $1 \leq k \leq n$ par

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right).$$

Exercice 3: On s'intéresse à la matrice $A \in \mathscr{M}_{3,5}(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A ? Utiliser la fonction `rank` de `scilab` afin de retrouver ce résultat.
2. Calculer une base de $\ker A$. Utiliser la fonction `kernel` afin de retrouver ce résultat.
3. À l'aide de la fonction `linsolve`, calculer une solution de référence du système $Ax = b$ où $b = (3, -7, 1)^T$. Cette fonction recalcule une base de $\ker A$. Vérifier que les noyaux donnés par `kernel` et `linsolve` sont bien identiques.
4. Tester la fonction `linsolve` sur les exemples suivants et donner dans chaque cas le rang de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 21 & 3 & -1 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 11 & -13 & 2 & 1 & 22 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 21 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & -1 & 0 & 5 & -6 \\ 4 & -1 & 14 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2 Systèmes linéaire et pivot de GAUSS-JORDAN

Bien qu'il existe, comme on vient de le voir, des outils génériques pour traiter la résolution de problèmes linéaires sous `scilab`, on va s'intéresser à l'implémentation dans cet environnement de la méthode du pivot. Il s'agit d'éviter de recourir aux boites noires que constituent les fonctions préprogrammées et surtout de prendre en main `scilab` et d'apprécier la simplicité de l'implémentation des opérations associées à la méthode.

Exercice 4: On s'intéresse au système de 5 équations linéaires à 7 inconnues $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 6x_6 & + & 7x_7 & = & 1\\
x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & & & - & 2x_7 & = & 2\\
x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 5x_5 & + & 6x_6 & + & x_7 & = & -10\\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & - & 3x_6 & - & x_7 & = & -2\\
x_1 & + & x_2 & + & & & 8x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & + & 4x_7 & = & 3
\end{array}\right.$$

1. Reformuler le problème sous la forme $Ax = b$.
2. Définir sous `scilab` la matrice $M \in \mathscr{M}_{5,8}(\mathbf{R})$ obtenue par adjonction du vecteur colonne b à la matrice A, c'est-à-dire pour $1 \leq i \leq 5$, $M_{i8} = b_i$.

   C'est à la matrice M que l'on va appliquer la méthode du pivot de GAUSS. Le second membre doit en effet être modifié. Dans cet exercice, les premières étapes de la méthode sont détaillées. On adopte la notation suivante :
   $$M = (L_1, \cdots, L_5)^T,$$
   où, pour $1 \leq i \leq 5$, L_i désigne le vecteur ligne associé à la i-ème ligne de M.
3. *Première itération du pivot.* Effectuer sous `scilab` la série d'opérations suivante
   - $L_1 \leftarrow L_1/a_{11}$;
   - $L_i \leftarrow a_{i1}L_1$ pour $2 \leq i \leq 5$.
4. *Deuxième itération du pivot.* Effectuer sous `scilab` la série d'opérations suivante
   - $L_2 \leftarrow L_2/a_{22}$;
   - $L_i \leftarrow a_{i2}L_2$ pour $3 \leq i \leq 5$.
5. Continuer jusqu'à obtenir une forme satisfaisante. Expliciter la forme générique des solutions du système.
6. Appliquer à cet exemple la fonction `linsolve` pour obtenir les solutions.

Exercice 5: Définition d'une fonction `pivot`.

1. Écrire une fonction `scilab` qui généralise l'algorithme décrit dans l'exercice précédent. L'algorithme prend pour paramètre une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et renvoie une matrice $N \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ triangulaire supérieure. On rappelle ci-dessous la syntaxe `scilab` pour définir une fonction :
   ```
   function N=pivot(M)
   ...
   N=...
   endfunction.
   ```
2. Appliquer cette fonction à la matrice M définie à l'exercice 4. Vérifier que l'on obtient bien le même résultat.
3. Générer sous `scilab` via la fonction `rand` une matrice $Q \in \mathscr{M}_{20,30}(\mathbf{R})$, dont les composants sont tous compris entre 0 et 1. Appliquer la méthode du pivot au système $Qx = d$ où $d \in \mathbf{R}^{20}$ vérifie $d_i = i$ pour $1 \leq i \leq 20$.