MM031 – TP10
Éléments finis et problème 1D

Maxime Chupin : chupin@ann.jussieu.fr

23 mars 2016

1 Le problème

Ici, nous voulons résoudre l'équation pour $u \in H^2(I)$

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u = f & \text{sur } I =]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Les conditions $u(0) = u(1) = 0$ sont appelées conditions aux limites de Dirichlet.

Nous nous concentrons sur des méthode d'éléments finis de Lagrange, à savoir que nous projetons les solutions sur un sous-espace caractérisé par une interpolation polynomiale par morceaux.

Même si le principe est assez simple : discrétisation, choix d'une base, calcul des matrices puis résolution d'un système linéaire, la pratique recèle une bonne quantité de techniques qu'il n'est pas si facile de maîtriser.

Ici, nous proposons un choix d'interpolation polynomiale 1D, noté $\mathbb{P}_1$ dans le cas d'une équation unidimensionnelle.

Formulation variationnelle

Question 1 : Montrer que le problème est équivalent à

> Trouver $u \in H_0^1(I)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(I)$, on a
>
> $$a(u,v) = \ell(v),$$
>
> où $a(\cdot,\cdot)$ est une application bilinéaire, et ℓ une application linéaire.

Maillage 1D

Pour un intervalle, une subdivision raisonnable est une décomposition en segments successifs. Subdivisons l'intervalle en $n-1$ segments :

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i, \quad E_i = [x_i, x_{i+1}],$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = 1.$$

On appelle cette subdivision *maillage* par analogie au cas 2D déjà étudié en TP.

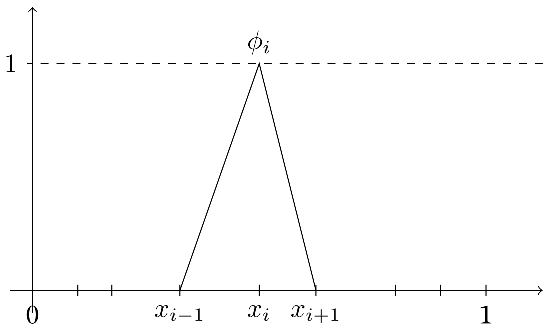
Méthode de Lagrange

Dans ce TP nous allons implémenter la méthode des éléments finis dits $\mathbb{P}_1$, c'est à dire que nous allons rechercher des solutions au problème discrétisé sur l'espace

$$V_h = \left\{ v \in \mathscr{C}^0(I),\ v(0) = v(1) = 0,\ \text{et } \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ v_{|E_i} \in \mathbb{P}_1(E_i) \right\}$$

On rappelle que $\mathbb{P}_1(E_i) = \left\{ v \in \mathscr{C}^0(I), v_{|E_i} \text{ est polynomiale de degré } 1 \right\}$.
On définit une base de V_h

$$V_h = \text{Vect}\left\{ \phi_i,\ \phi_i(x_j) = \delta_{i,j},\ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \right\}.$$



Dans cette base, pour chaque $v_h \in V_h$, on a la décomposition

$$v_h(x) = v_i \phi_i(x).$$

Construction de système linéaire

On cherche donc maintenant à résoudre le problème suivant

> Trouver $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$, on a
>
> $$a(u_h, v_h) = \ell(v_h),$$
>
> où $a(\cdot, \cdot)$ est une application bilinéaire, et ℓ une application linéaire.

Le problème est alors équivalent à résoudre le système suivant

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i a(\phi_i, \phi_j) = \ell(\phi_j) \tag{2}$$

Cela peut-être vu comme un système linéaire en l'inconnue $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$:

$$AU = L.$$

Conditions aux bords

Ici, on cherche u_h telle que $u_h(0) = u_h(1) = 0$. Dans un soucis de généralité, supposons qu'on cherche u_h telle que $u_h(0) = \tilde{u}_0$ et $u_h(1) = \tilde{u}_1$. On pourrait alors écrire dans l'espace de fonction discrétisé

$$CU = g,$$

où C est une matrice à définir, et $g = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix}$.

Notons L_1 la liste des nœuds sur lesquels une condition au limite est imposée (ici il s'agit de $L_1 = \{1, n\}$). On définit également le complémentaire $L2$ (ici $L_2 = \{2, \ldots, n-1\}$), tels que

$$L_1 \cup L_2 = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$U(L_1) = CU = g,$$

Question 2 : En réarrangeant la matrice A, montrer que l'on peut se ramener à un système de taille $(n-2)\times(n-2)$ prenant en compte les conditions au bord dans le cas général $CU = g$.

Assemblage de la matrice A

À partir de l'équation (2), et puisque le forme bilinéaire est symétrique, on peut définir A comme une somme de matrices élémentaires

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} E_i \cdot E_j^T, \tag{3}$$

où, pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$, $E_i = (e_j^i)_{j=1,\dots,n}$ est un vecteur colonne tel que $e_j^i = \delta_{i,j}$. A_{ij} est alors défini comme $a(\phi_i, \phi_j)$.

Question 3 : Déterminer sous quelles condition sur i et j le coefficient $a(\phi_i, \phi_j)$ est non nul.

Question 4 : Montrer que la matrice A peut se décomposer en somme de deux matrice notée K et M

$$A = K + M.$$

Résolution numérique

Question 5 : Construire la matrice dans votre code C++ en utilisant la structure de matrice creuse CSR définie dans le TP précédent. Comparer la matrice obtenue avec la matrice des différences finies obtenues dans un TP précédent. On prendra un n pas trop grand pour la comparaison ($n = 10$).

Question 6 : Résoudre par une méthode directe le système pour un second membre constant $f(x) = 1$. Prendre $n = 1000$ au moins.

Question 7 : Résoudre le système à l'aide du gradient conjugué.

Pour aller plus loin

Question 8 : Que se passe-t-il si on cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f & \text{sur } I =]0,1[, \\[2ex] u(0) = a, \quad u(1) = b. \end{cases}$$

Comment peut on régler le problème ?

Question 9 : Résoudre le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u = f & \text{sur } I =]0,1[, \\[2ex] u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases}$$