Exercices de révision pour l'examen

Indications : *La prise en compte de la rédaction, de la précision et de la propreté sera importante.*

Exercice n° 1:

Calculer la transformée de FOURIER de la fonction triangle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice n° 2:

Soit le filtre numérique défini par

$$y_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a^k x_{n-k}, \tag{1}$$

où la suite (x_n) est le signal d'entrée et (y_n) le signal de sortie, et où $0 < a < 1$.

1. Montrer que le filtre peut se mettre sous forme récursive. On pourra passer par la transformer en z du filtre (c'est-à-dire de l'égalité (1)).
2. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre, c'est-à-dire la réponse $(h_n)_{n\geq 0}$ au signal d'entrée $(x_n)_{n\geq 0}$ défini par $x_0 = 1$ et $x_n = 0$ pour tout $n > 0$.
3. À quelle condition sur la réponse impulsionnelle le filtre est-il stable ? Est-ce que cela est vérifié ?
4. À quelle condition sur la fonction de transfert le filtre est-il stable ? Est-ce que cela est vérifié ?
5. Pour $a = 1/2$, étudier la réponse fréquentielle du filtre. On rappelle que la réponse fréquentielle du filtre est définie à partir de sa fonction de transfert $H(z)$ par $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|$ où ω est la pulsation normalisée, c'est-à-dire que $\omega = 2\pi f / f_e$ où f est la fréquence et f_e la fréquence d'échantillonnage. On supposera que le signal a été échantillonné en validant les hypothèses du théorème de SHANNON. Déterminer alors la nature du filtre.

Exercice n° 3:

On considère une source à deux symboles $S = \{a, b\}$ avec pour probabilités $p_a = 0.1$ et $p_b = 0.9$.

1. Calculer l'entropie de la source et trouver un code optimal dont vous donnerez la longueur moyenne pour cette source.
2. On considère maintenant la source $S' = S \times S \times S$ formée de triplets de symboles de S. Les probabilités d'apparition sont donc données par $p_{\lambda\mu\rho} = p_\lambda p_\mu p_\rho$ pour $\lambda, \mu, \rho \in S$. Calculer les probabilités de chaque triplet.
3. Appliquer l'algorithme de HUFFMAN pour déterminer un code optimal pour S'. Calculer sa longueur moyenne ainsi que la longueur moyenne en bit pour encoder un symbole de S. On écrira l'arbre correspondant et on inscrira dans chaque nœud le poids de son sous arbre.