

Maxime Chupin

chupin@ceremade.dauphine.fr

CEREMADE, Université Paris-Dauphine, PSL

8 novembre 2022 — Poitiers

De la pomme de NEWTON aux courants de gravité

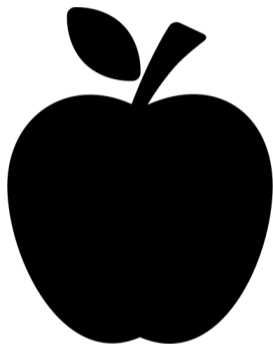
un ticket gratuit vers les étoiles ?

*« Interplanetary transfers with low consumption using
the properties of the restricted three body problem »*

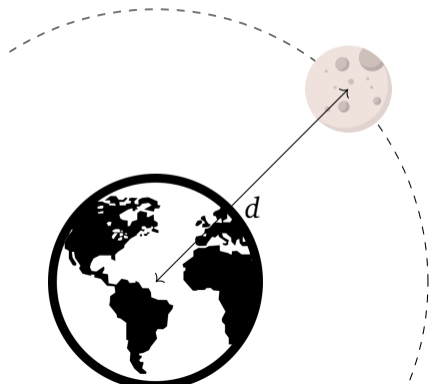
De la pomme à la Lune

- 1 De la pomme à la Lune
- 2 Le modèle des deux corps

- 3 Le modèle des trois corps
- 4 Concevoir des missions spatiales
- 5 Le contrôle optimal



En **une seconde**, la pomme chute de **cinq mètres**
(faites l'expérience !)

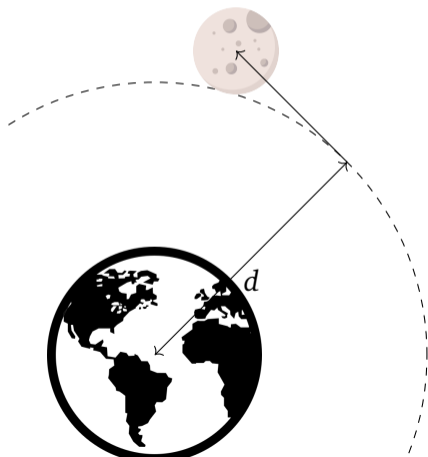


La chute... de la Lune

- ▶ Période de la rotation de la Lune : $T \simeq 27.371$ jours
- ▶ Périmètre de la trajectoire : $C \simeq 2\pi \times 384000$ km
- ▶ Vitesse : $V \simeq 1$ km/s

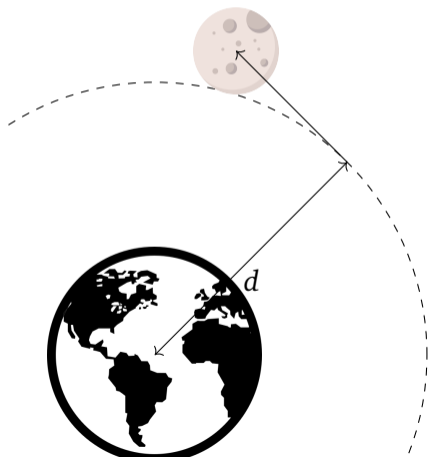
La chute... de la Lune

Si la Lune n'était pas attirée par la Terre : **trajectoire rectiligne**



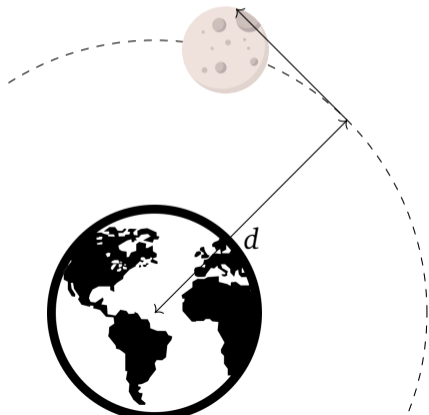
La chute... de la Lune

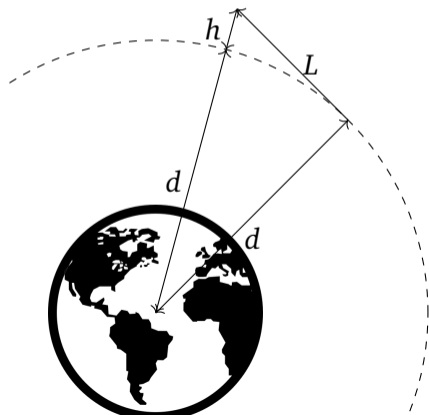
En fait elle **tombe** un peu !



La chute... de la Lune

En fait elle **tombe** un peu !





La chute... de la Lune

En fait elle **tombe** un peu !
Théorème de PYTHAGORE

$$d^2 + L^2 = (d + h)^2$$

ce qui *au premier ordre* donne :

$$h \simeq L^2/2d$$

Pour **1 seconde**, $L = 1 \text{ km}$, et donc
 $h \simeq 1.35 \text{ mm}$

- ▶ En 1 seconde la pomme tombe de 5 m à 6380 km du centre de la Terre
- ▶ En 1 seconde la Lune tombe de 1.35 mm à 380 000 km du centre de la Terre

$$\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380000}{6380} \simeq 60 \quad \frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0.00135} \simeq 60 \times 60$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, et elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance.

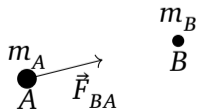
Principe fondamental de la dynamique

« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

qui se résume en

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Force gravitationnelle



$$m_A \vec{a}_A = \vec{F}_{BA} = -Gm_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}$$

Équation différentielle !

Évolution d'un satellite dans le système solaire sous l'influence de N corps



Équation différentielle d'évolution

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

- ▶ q position du satellite (donc dans \mathbb{R}^3)
- ▶ q_i est la position du i -ème corps (donc dans \mathbb{R}^3)
- ▶ $\mu_i = Gm_i$, G est la constante gravitationnelle
- ▶ m_i la masse du i -ème corps

- ▶ Équations trop compliquées (trouver des trajectoires intéressantes, etc.)
- ▶ Besoin de **simplification**
- ▶ Tous les astres n'attirent pas avec la même force le satellite, possibilité de **négliger** certaines influences

Le modèle des deux corps

- 1 De la pomme à la Lune
- 2 Le modèle des deux corps

- 3 Le modèle des trois corps
- 4 Concevoir des missions spatiales
- 5 Le contrôle optimal

Modèle :

- ▶ satellite de masse négligeable
- ▶ influence d'un corps (ex : Terre)
- ▶ on connaît toutes les trajectoires libres

$$\ddot{q}(t) = -\mu_0 \frac{q(t)}{\|q(t)\|^3}$$

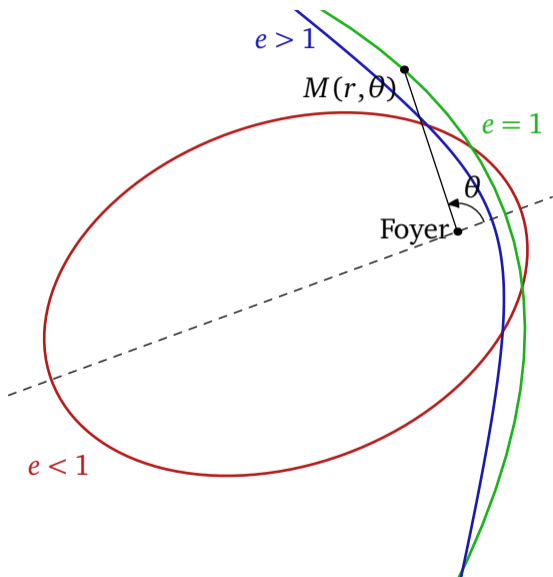


Solutions

En coordonnées polaire (r, θ) :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

coniques



Graphe de

$$\theta \mapsto r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Le modèle des trois corps

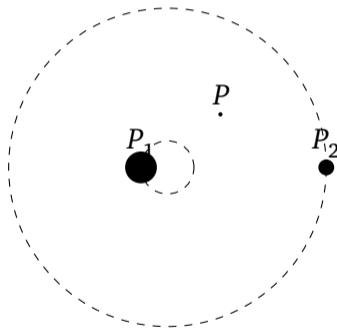
- 1 De la pomme à la Lune
- 2 Le modèle des deux corps

- 3 Le modèle des trois corps
- 4 Concevoir des missions spatiales
- 5 Le contrôle optimal

Le problème restreint des 3 corps

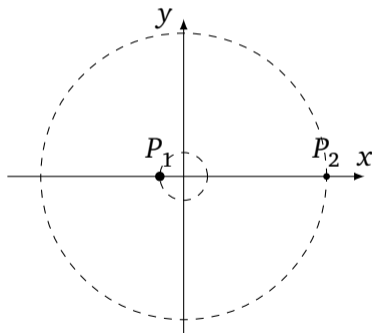
- ▶ Un satellite P de masse m **négligeable** de position q (fonction du temps)
- ▶ 2 **primaires** P_1 et P_2 en rotation **circulaire** autour de leur centre de masse, de positions respectives q_1 et q_2 (fonctions du temps)
- ▶ Leurs masses respectives : M_1 et M_2

$$m \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = -GM_1 m \frac{q(t) - q_1(t)}{\|q(t) - q_1(t)\|^3} - GM_2 m \frac{q(t) - q_2(t)}{\|q(t) - q_2(t)\|^3}$$



Le problème restreint des 3 corps

- ▶ Système de coordonnées tournant dans lequel les deux primaires sont fixes (le long de l'axe (Ox))
- ▶ Problème **circulaire restreint** des trois corps (CR3BP)



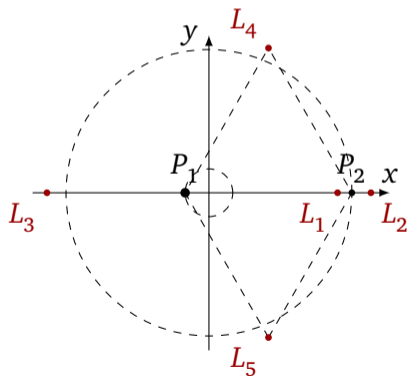
Étude mathématique du problème : normalisation, étude de l'équation différentielle du mouvement, etc.



Dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = x_1 + 2x_5 - (1 - \mu) \frac{x_1 + \mu}{r_{13}^3} - \mu \frac{x_1 - 1 + \mu}{r_{23}^3} \\ \dot{x}_5 = x_2 - 2x_4 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_{13}^3} - \mu \frac{x_2}{r_{23}^3} \\ \dot{x}_6 = -(1 - \mu) \frac{x_3}{r_{13}^3} - \mu \frac{x_3}{r_{23}^3} \end{array} \right.$$

- ▶ Cinq points d'équilibre appelés points de LAGRANGE
- ▶ Points colinéaires : L_1 , L_2 et L_3
- ▶ Points équilatéraux : L_4 et L_5



Question ?

Est-ce que ces points peuvent être utiles ? Est-ce que ces points attirent les objets ? est-ce que ces points repoussent les objets ?

La notion de stabilité

Notion définie rigoureusement en mathématique !

- ▶ L_1 , L_2 et L_3 sont **instables**
- ▶ La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système

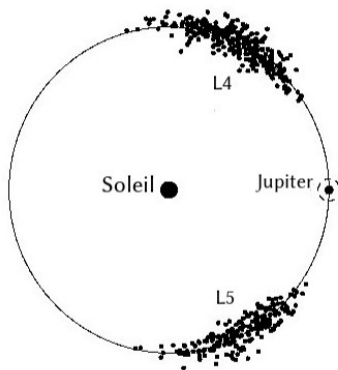
Question ?

Est-ce que ces points peuvent être utiles ? Est-ce que ces points attirent les objets ? est-ce que ces points repoussent les objets ?

La notion de stabilité

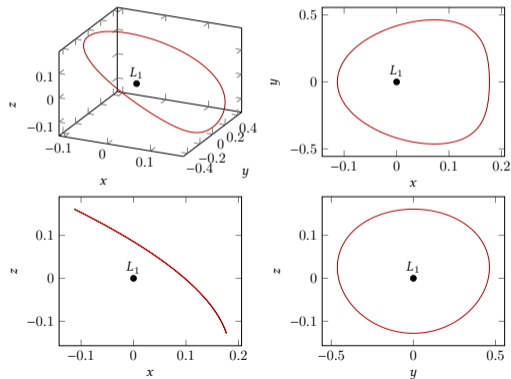
Notion définie rigoureusement en mathématique !

- ▶ L_1 , L_2 et L_3 sont **instables**
- ▶ La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système

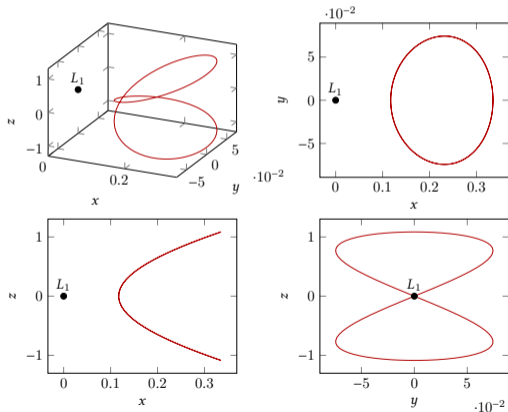


On **démontre** l'existence d'orbites périodiques autour des points d'équilibre de LAGRANGE

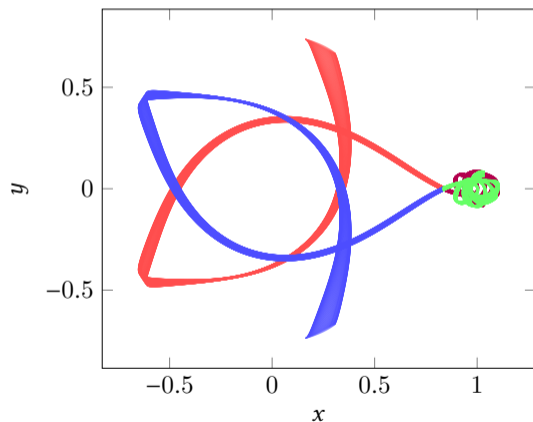
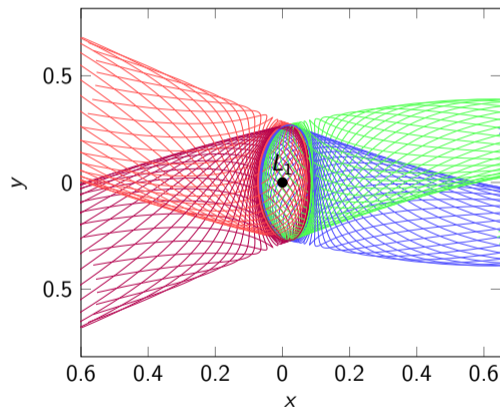
orbite de HALO (Soleil-Terre)



orbite en huit (Terre-Lune)



On **démontre** l'existence de **courants gravitationnels** issus de ces **orbites périodiques** autour des **points d'équilibre** de LAGRANGE



Exemples de courants gravitationnels dans le système Terre-Lune

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?
- Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?
- Méthodes numériques : besoin de mathématiques
- ▶ Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?
 - Méthodes numériques : besoin de mathématiques
- ▶ Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?
 - Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?
 - Méthodes numériques : besoin de mathématiques
- ▶ Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?
 - Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.
- ▶ Et pour les mathématiques ?

- ▶ Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?
 - Méthodes numériques : besoin de mathématiques
- ▶ Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?
 - Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.
- ▶ Et pour les mathématiques ?
 - Sujet de recherche actuel !

Dynamique du problème des N -corps

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

Simplifications

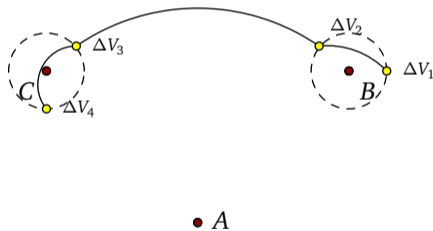
- ▶ Seulement garder les influences **principales** (un ou deux astres)
- ▶ Propriétés intéressantes et exploitables pour la conception de missions spatiales

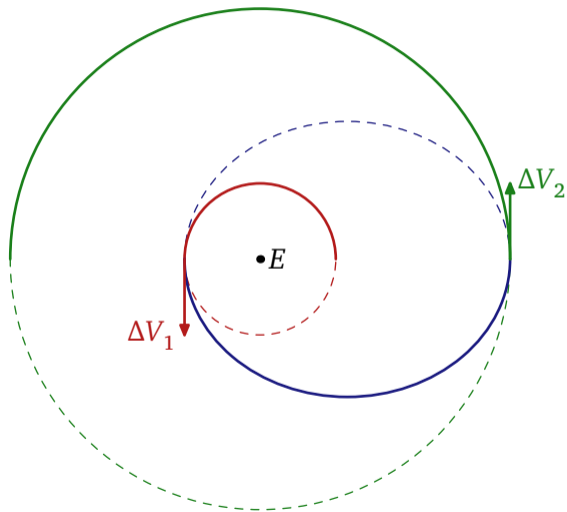
Concevoir des missions spatiales

1 De la pomme à la Lune
2 Le modèle des deux corps

3 Le modèle des trois corps
4 Concevoir des missions spatiales
5 Le contrôle optimal

- ▶ Transferts autour d'un seul astre (**problème des 2 corps**) par ΔV
- ▶ Trajectoire *interplanétaire* par *recollement* de trajectoires képlériennes (*patch conic method*), phénomène du *swing-by*





Mission CASSINI

VENUS 1 FLYBY
26 APR 1998

VENUS 2 FLYBY
24 JUN 1999

VENUS
TARGETING
MANEUVER
3 DEC 1998

LAUNCH
15 OCT 1997

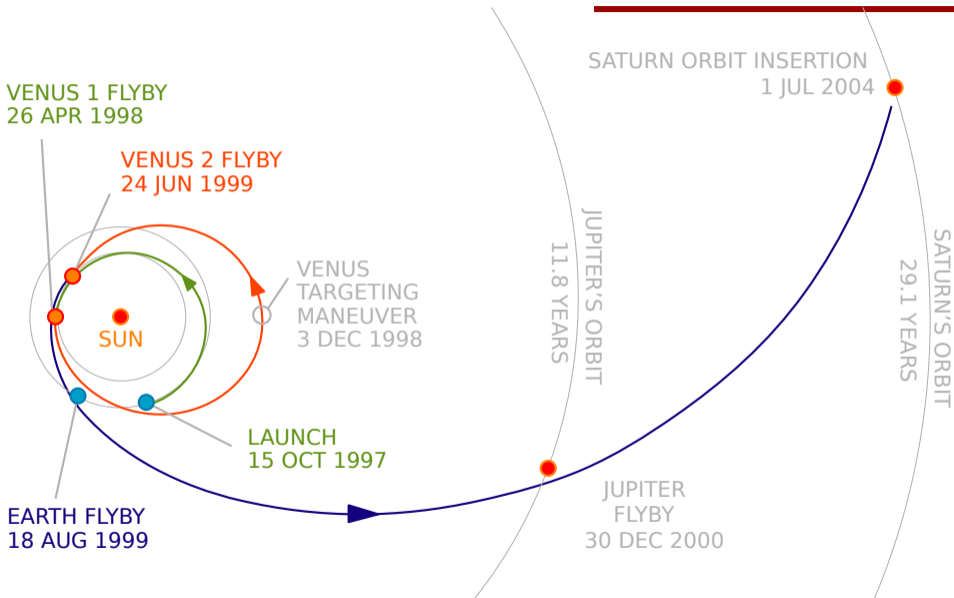
EARTH FLYBY
18 AUG 1999

SATURN ORBIT INSERTION
1 JUL 2004

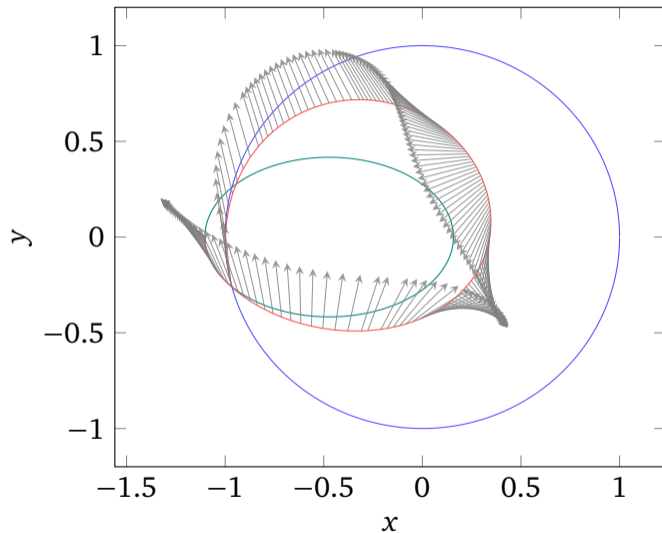
JUPITER
FLYBY
30 DEC 2000

JUPITER'S ORBIT
11.8 YEARS

SATURN'S ORBIT
29.1 YEARS



Poussée faible, 2 corps

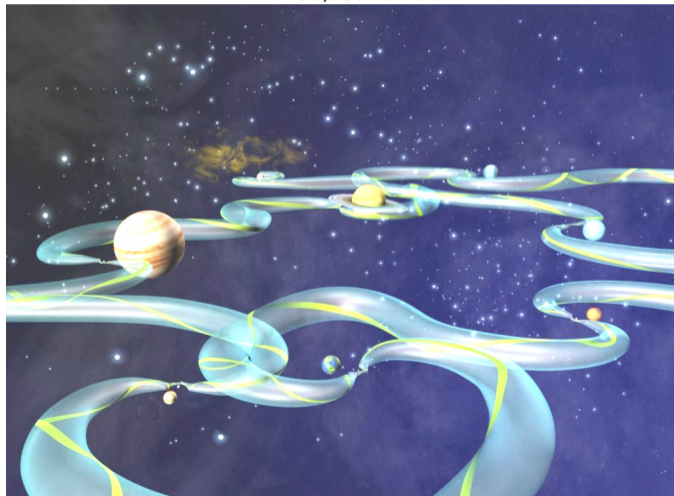


Dans le problème des trois corps

Les variétés invariantes comme réseau de courants

Interplanetary Transport Network

NASA/Caltech



Dans le problème des trois corps

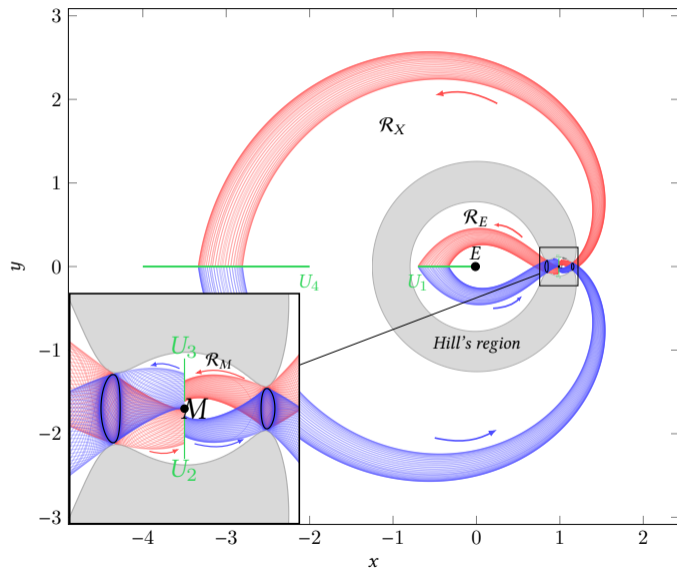
Les variétés invariantes comme réseau de courants

Interplanetary Transport Network



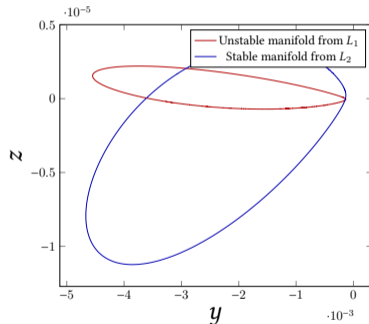
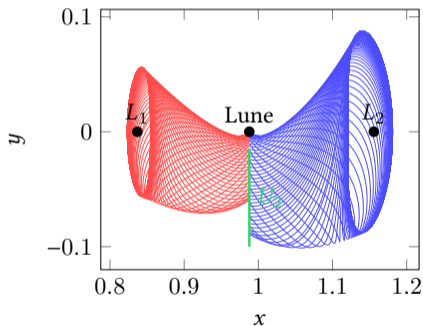
Progression in Capability Development Exploration Metro Map





Transfert d'une variété à une autre

- ▶ Calcul d'intersection en espace entre deux variétés
- ▶ Passage de l'une à l'autre par une impulsion ΔV



Le contrôle optimal

- 1 De la pomme à la Lune
- 2 Le modèle des deux corps

- 3 Le modèle des trois corps
- 4 Concevoir des missions spatiales
- 5 Le contrôle optimal

La théorie du contrôle a comme objet d'étude le comportement de systèmes dynamiques paramétrés, c'est-à-dire l'étude d'équations différentielles de la forme :

$$x'(t) = f(x, u)$$

où u est le contrôle (fonction).

Des questions qu'on se pose

- ▶ Ces équations ont-elles des solutions ?
- ▶ S'il existe une solution, est-elle unique ?
- ▶ Comment les solutions dépendent des conditions initiales ?
- ▶ Et bien d'autres encore...

Cadre dans lequel rentre la conception de mission spatiale où le contrôle est la poussée des moteurs du satellite !

- ▶ Dans le cadre des missions spatiales : **contrôle du satellite**
- ▶ On cherche donc à amener le satellite d'un point A à un point B
- ▶ Le fuel « coûte » cher : on veut **minimiser** la consommation, par exemple :

$$\min \sum_i \Delta V_i$$

- ▶ Comme on a vu, on peut aussi avoir une **poussée « continue »**, dans ces cas là, on cherche à minimiser :

$$C(u) = \int_0^{t_f} \|u(t)\| dt \rightarrow \min$$

- ▶ La fonctionnelle de coût sur le contrôle u :

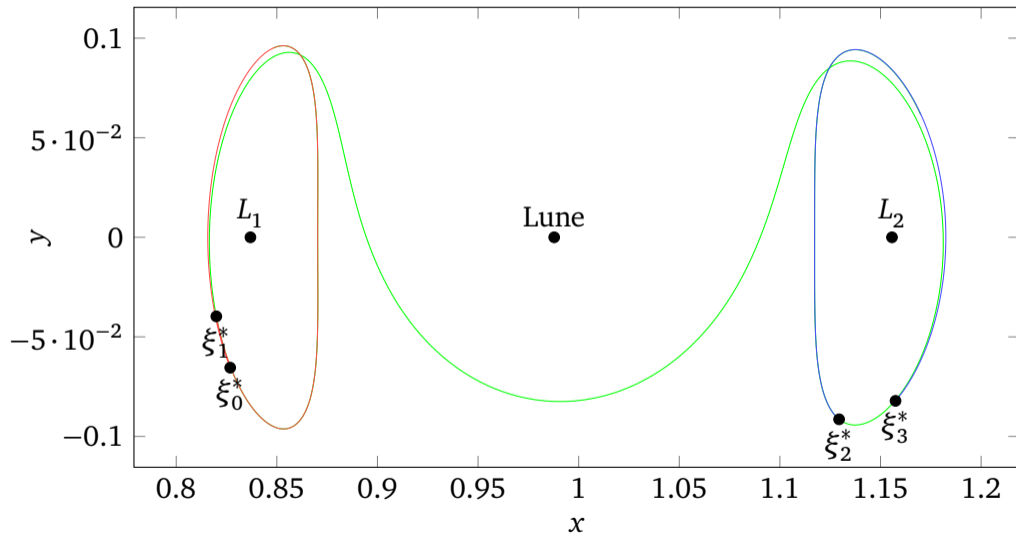
$$\text{Minimiser } C_{x_0, t_f}(u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

- ▶ Départ $x(0) \in M_0$ et arrivée $x(t_f) \in M_1$,
- ▶ Le problème

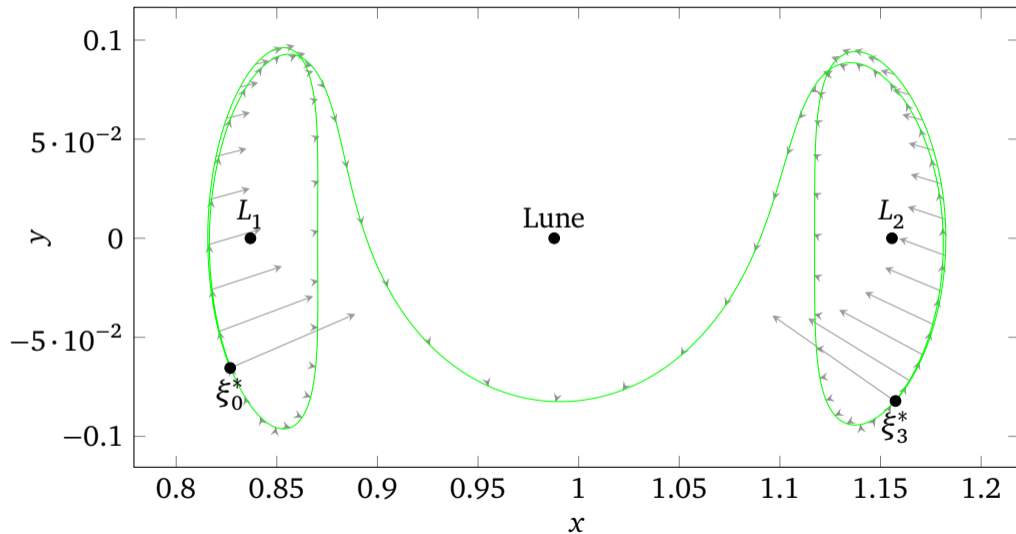
$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } C_{x_0, t_f}(u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ u \in \mathcal{U}_{x_0, t_f, \Omega} \\ x(0) \in M_0, \quad x(t_f) \in M_1. \end{array} \right.$$

- ▶ Cadre très général du contrôle optimal

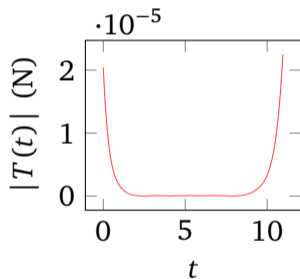
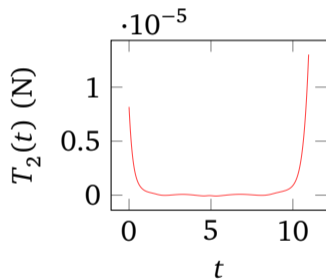
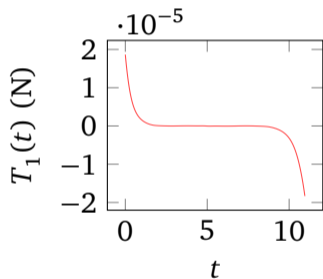
Exemple de transfert optimal

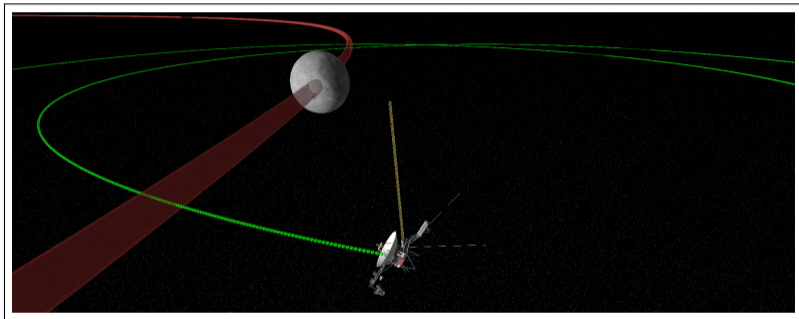


Exemple de transfert optimal



Effet turnpike





Domaines d'application bien plus vastes que les satellites

- ▶ Les robots, les voitures automatiques, etc.
- ▶ Les recherches sur le corps humain (fonctionnement de l'œil, déplacement dans une pièce, etc.)
- ▶ La biologie, la médecine (traitement médical optimal, etc.)
- ▶ et bien d'autres...

- ▶ Site web du Professeur **Jérôme PÉREZ** <http://perso.ensta-paristech.fr/~perez/>
- ▶ Site web du Professeur **Emmanuel TRÉLAT** <https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/>
 - ▶ Article sur le site Images des maths
<http://images.math.cnrs.fr/Theorie-du-contrôle-points-de>
 - ▶ Conférence « Tout est sous contrôle » <https://www.youtube.com/watch?v=ET7f8Sp0kVQ>
- ▶ Introduction de ma thèse : <https://www.ceremade.dauphine.fr/~chupin/>



Merci de votre attention !