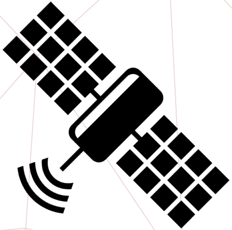


Maxime Chupin

chupin@ceremade.dauphine.fr

CEREMADE, Université Paris-Dauphine, PSL

27 janvier 2023 — Poitiers

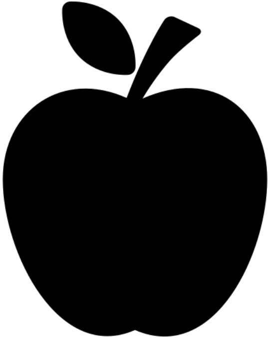
De la pomme de Newton aux courants de gravité

un ticket gratuit vers les étoiles ?

« Interplanetary transfers with low consumption using the properties of the restricted three body problem »

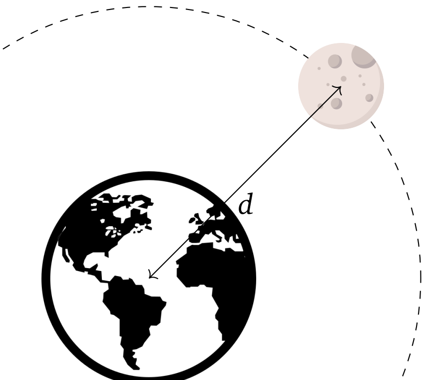
De la pomme à la Lune

La chute… de la pomme



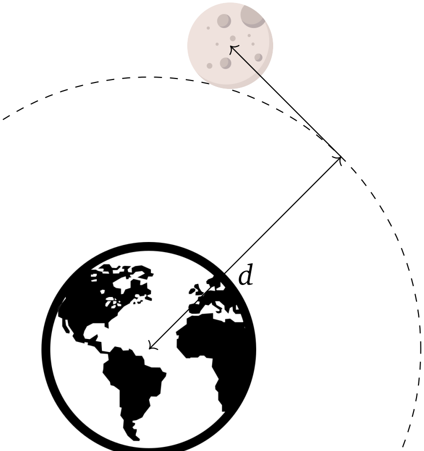
En une seconde, la pomme chute de cinq mètres
(faites l'expérience !)

La chute… de la Lune



- Période de la rotation de la Lune : $T \simeq 27.371\,\text{jours}$
- Périmètre de la trajectoire : $C \simeq 2\pi \times 384\,000\,\text{km}$
- Vitesse : $V \simeq 1\,\text{km/s}$

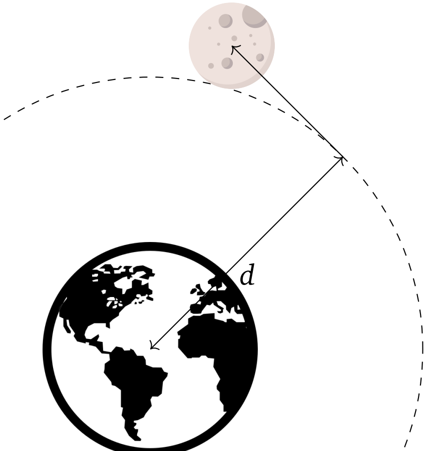
La chute… de la Lune



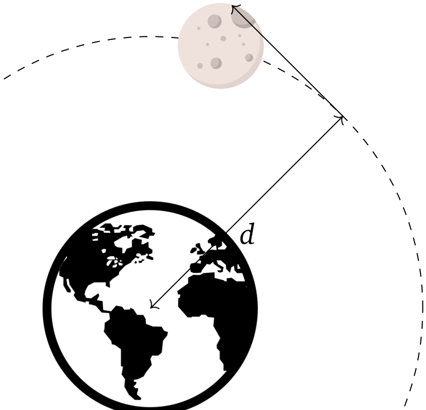
Si la Lune n'était pas attirée par la Terre : trajectoire rectiligne

La chute… de la Lune

En fait elle tombe un peu !

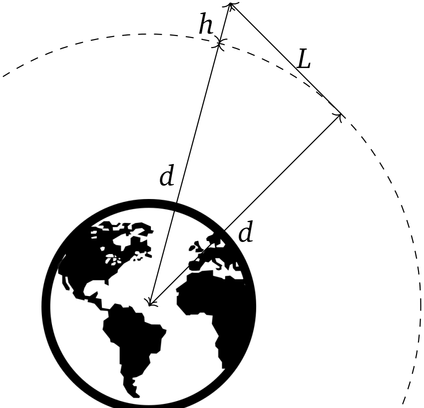


La chute… de la Lune



En fait elle tombe un peu !

La chute… de la Lune



En fait elle tombe un peu !
Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d+h)^2$$

ce qui *au premier ordre* donne :

$$h \simeq L^2/2d$$

Pour 1 seconde, $L = 1\,\mathrm{km}$, et donc
$h \simeq 1.35\,\mathrm{mm}$

De la pomme à la Lune

- En 1 seconde la pomme tombe de 5 m à 6380 km du centre de la Terre
- En 1 seconde la Lune tombe de 1.35 mm à 380 000 km du centre de la Terre

$$\frac{d_{\text{Lune}}}{d_{\text{Pomme}}} = \frac{380000}{6380} \simeq 60 \qquad \frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{0.00135}{5} \simeq \frac{1}{60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, et elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance.

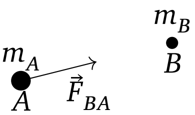
Principe fondamental de la dynamique

> *« Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »*
>
> Isaac Newton

qui se résume en

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Force gravitationnelle



$$m_A \vec{a}_A = \vec{F}_{BA} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

Équation différentielle !

Le problème des N-corps

Évolution d'un satellite dans le système solaire sous l'influence de N corps

Équation différentielle d'évolution

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

- q position du satellite (donc dans $\mathbb{R}^3$)
- q_i est la position du i-ème corps (donc dans $\mathbb{R}^3$)
- $\mu_i = Gm_i$, G est la constante gravitationnelle
- m_i la masse du i-ème corps

Besoin de simplification

- Équations trop compliquées (trouver des trajectoires intéressantes, etc.)
- Besoin de simplification
- Tous les astres n'attirent pas avec la même force le satellite, possibilité de négliger certaines influences

Le modèle des deux corps

Les équations

Modèle :

- satellite de masse négligeable
- influence d'un corps (ex : Terre)
- on connaît toutes les trajectoires libres

$$\ddot{q}(t) = -\mu_0 \frac{q(t)}{\|q(t)\|^3}$$

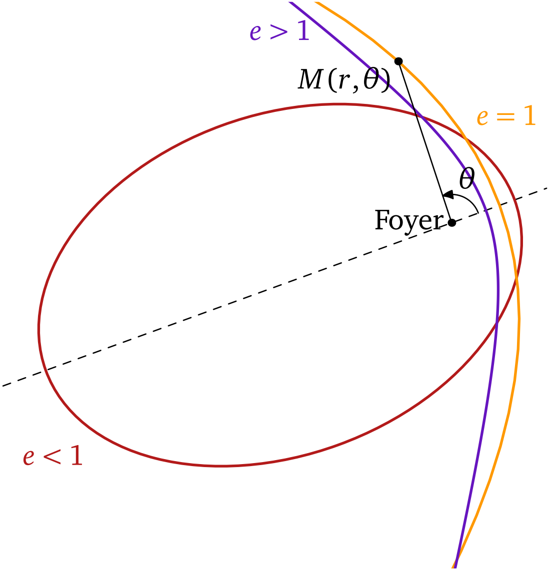
Solutions

En coordonnées polaire (r, θ) :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

coniques

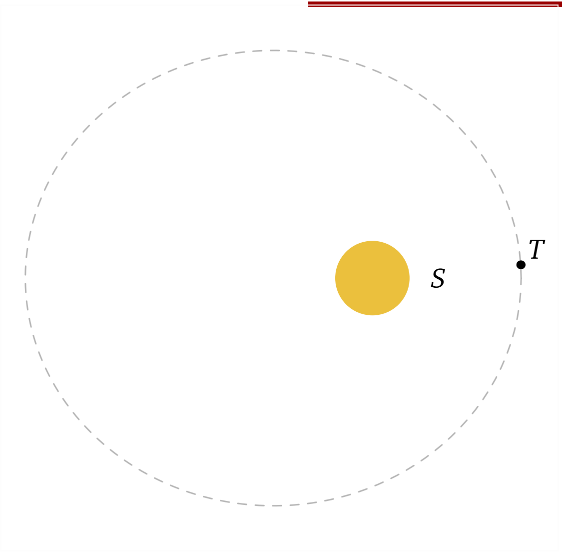
Les différentes solutions



Graphe de

$$\theta \mapsto r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Animation d'une solution

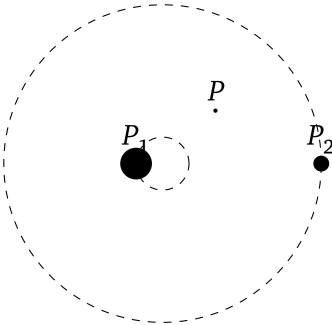


Le modèle des trois corps

Le problème restreint des 3 corps

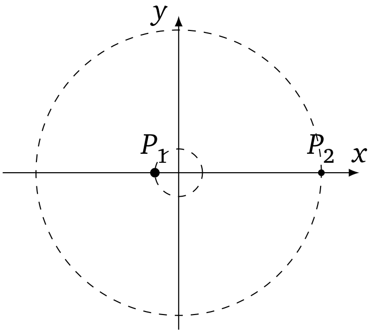
- Un satellite P de masse m négligeable de position q (fonction du temps)
- 2 primaires P_1 et P_2 en rotation circulaire autour de leur centre de masse, de positions respectives q_1 et q_2 (fonctions du temps)
- Leurs masses respectives : M_1 et M_2

$$m\frac{\mathrm{d}^2 q(t)}{\mathrm{d}t^2} = -GM_1 m\frac{q(t)-q_1(t)}{\left\|q(t)-q_1(t)\right\|^3} - GM_2 m\frac{q(t)-q_2(t)}{\left\|q(t)-q_2(t)\right\|^3}$$



Le problème restreint des 3 corps

- Système de coordonnées tournant dans lequel les deux primaires sont fixes (le long de l'axe (Ox))
- Problème circulaire restreint des trois corps (CR3BP)



Équations du CR3BP

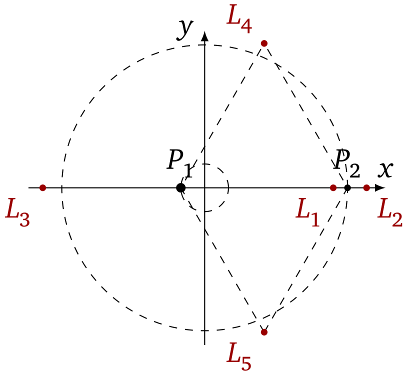
Étude mathématique du problème : normalisation, étude de l'équation différentielle du mouvement, etc.

Dynamique

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_4 \\
\dot{x}_2 = x_5 \\
\dot{x}_3 = x_6 \\
\dot{x}_4 = x_1 + 2x_5 - (1-\mu)\dfrac{x_1+\mu}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_1 - 1 + \mu}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_5 = x_2 - 2x_4 - (1-\mu)\dfrac{x_2}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_2}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_6 = -(1-\mu)\dfrac{x_3}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_3}{r_{23}^3}
\end{cases}
$$

Points de Lagrange

- Cinq points d'équilibre appelés points de Lagrange
- Points colinéaires : L_1, L_2 et L_3
- Points équilatéraux : L_4 et L_5



Stabilité des équilibres

Questions ?

- Est-ce que ces points peuvent être utiles ?
- Est-ce que ce points attirent les objets ?
- Est-ce que ces points repoussent les objets ?

On montre que :

- L_1, L_2 et L_3 sont instables
- La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système

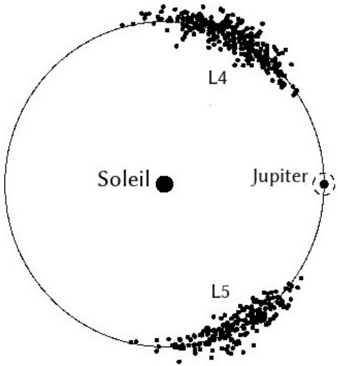
Stabilité des équilibres

Questions ?

- Est-ce que ces points peuvent être utiles ?
- Est-ce que ce points attirent les objets ?
- Est-ce que ces points repoussent les objets ?

On montre que :

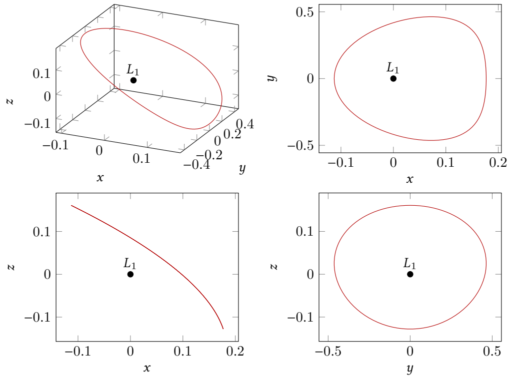
- L_1, L_2 et L_3 sont instables
- La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système



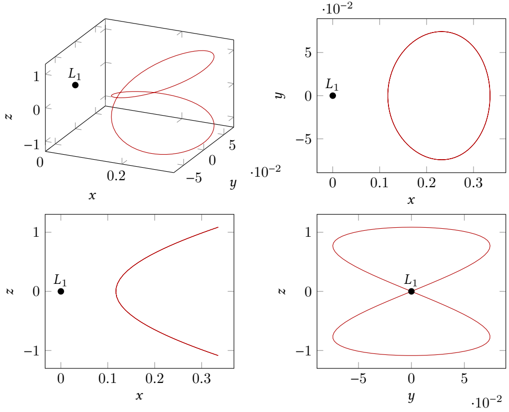
Orbites périodiques

On démontre l'existence d'orbites périodiques autour des points d'équilibre de Lagrange

orbite de Halo (Soleil-Terre)

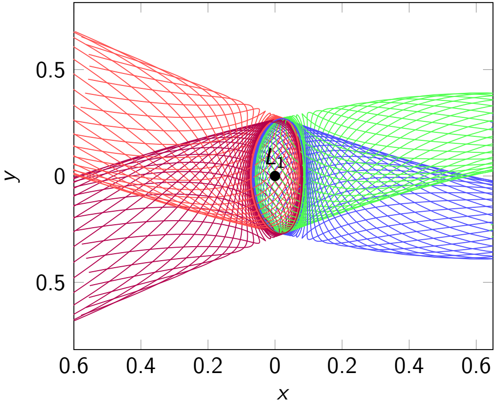


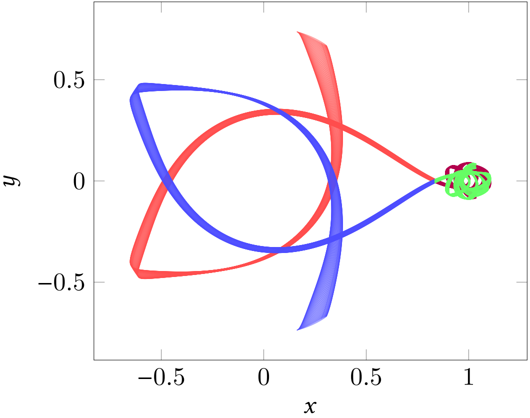
orbite en huit (Terre-Lune)



Variétés invariantes

On démontre l'existence de courants gravitationnels issus de ces orbites périodiques autour des points d'équilibre de Lagrange





Exemples de courants gravitationnels dans le système Terre-Lune

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

- Et pour les mathématiques ?

Est-ce utile ?

- Comment calculer pratiquement les orbites périodiques et les courants gravitationnels ?

→ Méthodes numériques : besoin de mathématiques

- Est-ce qu'on peut les utiliser dans « la vie réelle » ?

→ Les mathématiques ont permis de trouver dans la vie réelle ces courants gravitationnels, missions ISEE-3, Hiten, Genesis, etc.

- Et pour les mathématiques ?

→ Sujet de recherche actuel !

Récapitulatif

Dynamique du problème des N-corps

$$\ddot{q}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left(\frac{q(t) - q_i(t)}{\|q(t) - q_i(t)\|^3} \right),$$

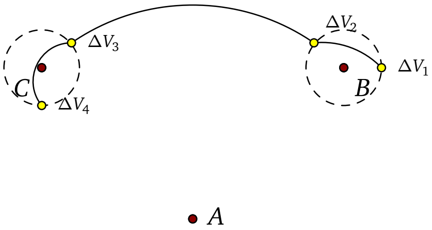
Simplifications

- Seulement garder les influences principales (un ou deux astres)
- Propriétés intéressantes et exploitables pour la conception de missions spatiales

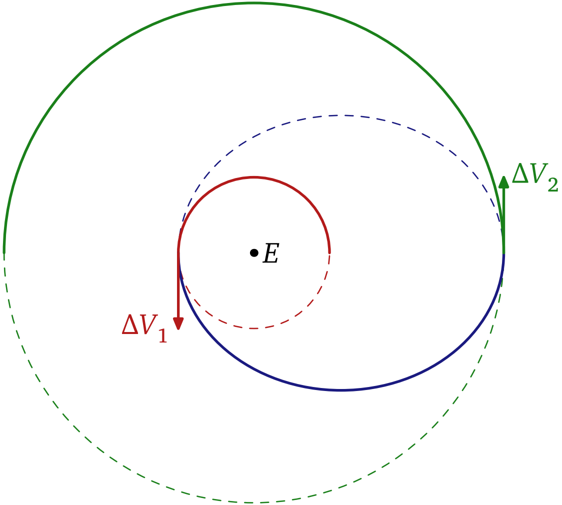
Concevoir des missions spatiales

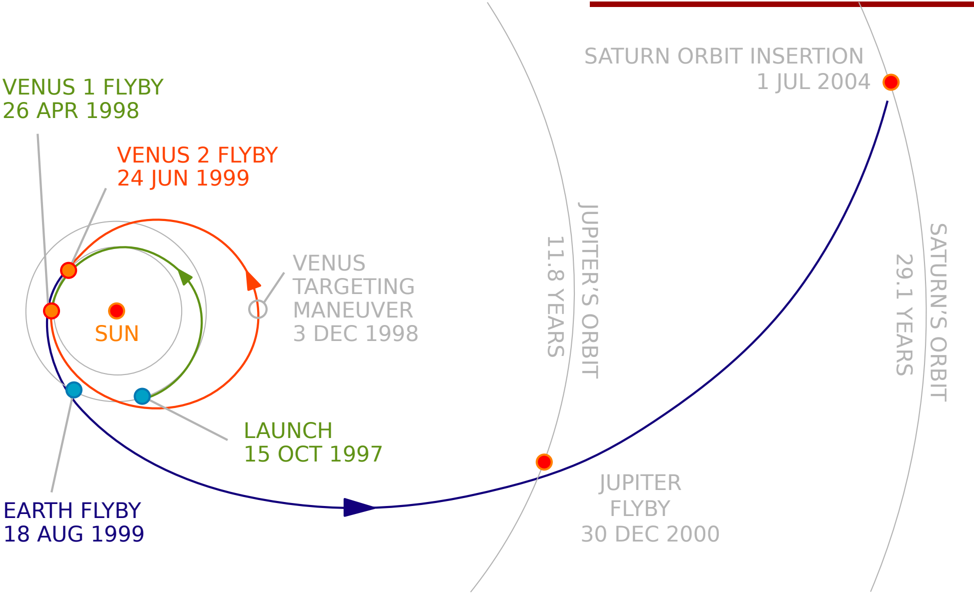
Patch Conic Method

- Transferts autour d'un seul astre (problème des 2 corps) par ΔV
- Trajectoire *interplanétaire* par *recollement* de trajectoires képlériennes (*patch conic method*), phénomène du *swing-by*



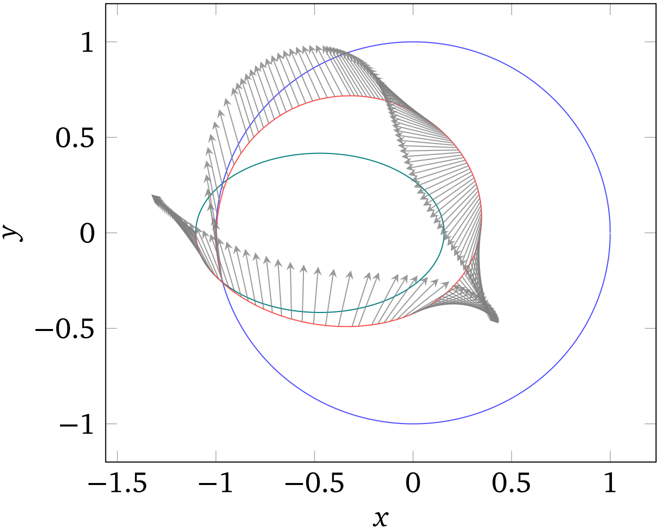
Transfert de Hohmann





SATURN ORBIT INSERTION
1 JUL 2004
VENUS 1 FLYBY
26 APR 1998
VENUS 2 FLYBY
24 JUN 1999
VENUS
TARGETING
MANEUVER
3 DEC 1998
SUN
JUPITER'S ORBIT
11.8 YEARS
SATURN'S ORBIT
29.1 YEARS
LAUNCH
15 OCT 1997
EARTH FLYBY
18 AUG 1999
JUPITER
FLYBY
30 DEC 2000

Poussée faible, 2 corps

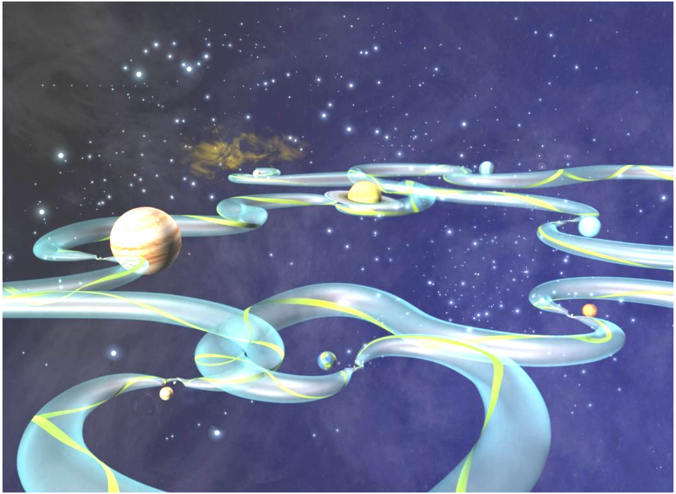


Avec le problème des trois corps

Les variétés invariantes comme réseau de courants

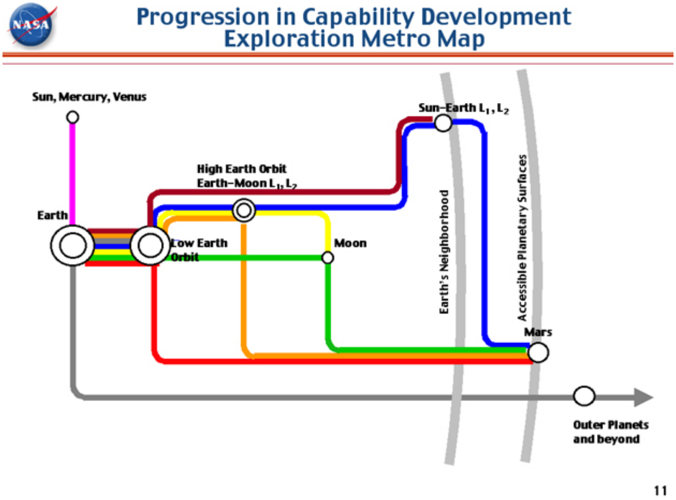
Interplanetary Transport Network

NASA/Caltech

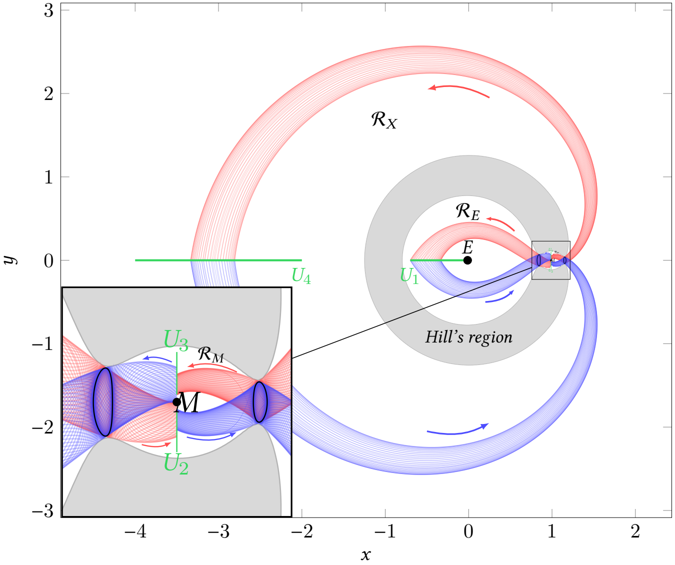


Les variétés invariantes comme réseau de courants

Interplanetary Transport Network

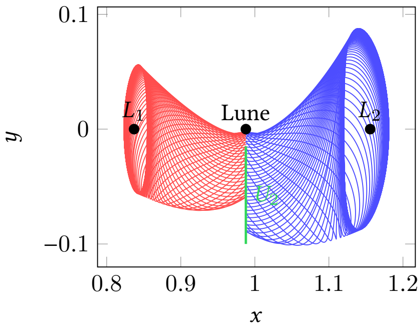


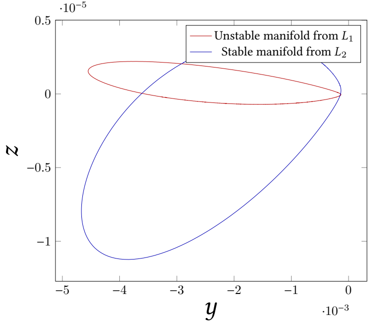
Système Terre-Lune



Transfert d'une variété à une autre

- Calcul d'intersection en espace entre deux variétés
- Passage de l'une à l'autre par une impulsion ΔV





Le contrôle optimal

1 De la pomme à la Lune

2 Le modèle des deux corps

3 Le modèle des trois corps

4 Concevoir des missions spatiales

5 Le contrôle optimal

Des théories mathématiques

La théorie du contrôle a comme objet d'étude le comportement de systèmes dynamiques paramétrés, c'est-à-dire l'étude d'équations différentielles de la forme :

$$x'(t) = f(x, u)$$

où u est le contrôle (fonction).

Des questions qu'on se pose

- Ces équations ont-elles des solutions ?
- S'il existe une solution, est-elle unique ?
- Comment les solutions dépendent des conditions initiales ?
- Et bien d'autres encore…

Cadre dans lequel rentre la conception de mission spatiale où le contrôle est la poussée des moteurs du satellite !

Le contrôle optimal

- Dans le cadre des missions spatiales : contrôle du satellite
- On cherche donc à amener le satellite d'un point A à un point B
- Le fuel « coûte » cher : on veut minimiser la consommation, par exemple :

$$\min \sum_i \Delta V_i$$

- Comme on a vu, on peut aussi avoir une poussée « continue », dans ces cas là, on cherche à minimiser :

$$C(u) = \int_0^{t_f} \|u(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Contrôle optimal : formulation

- La fonctionnelle de coût sur le contrôle u :

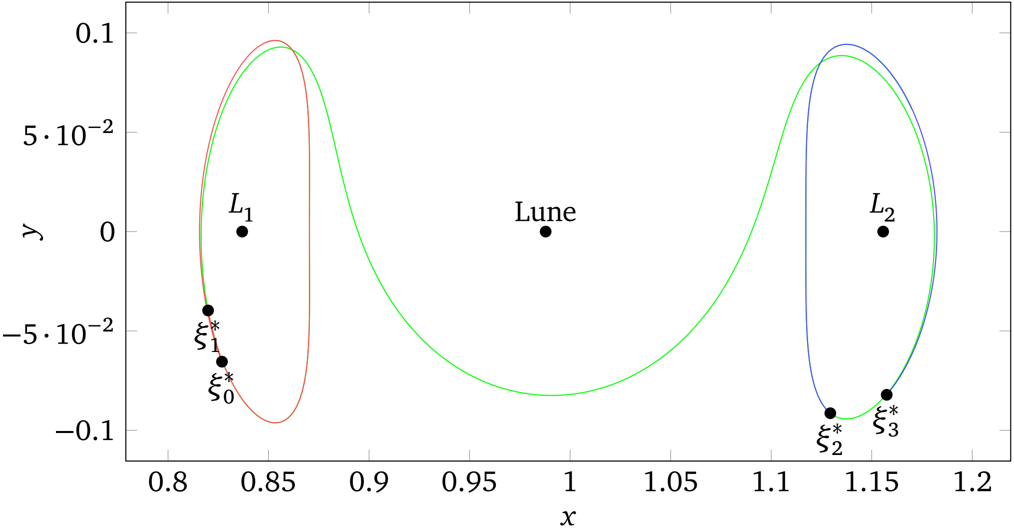
$$\text{Minimiser } C_{x_0,t_f}(u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$$

- Départ $x(0) \in M_0$ et arrivée $x(t_f) \in M_1$,
- Le problème

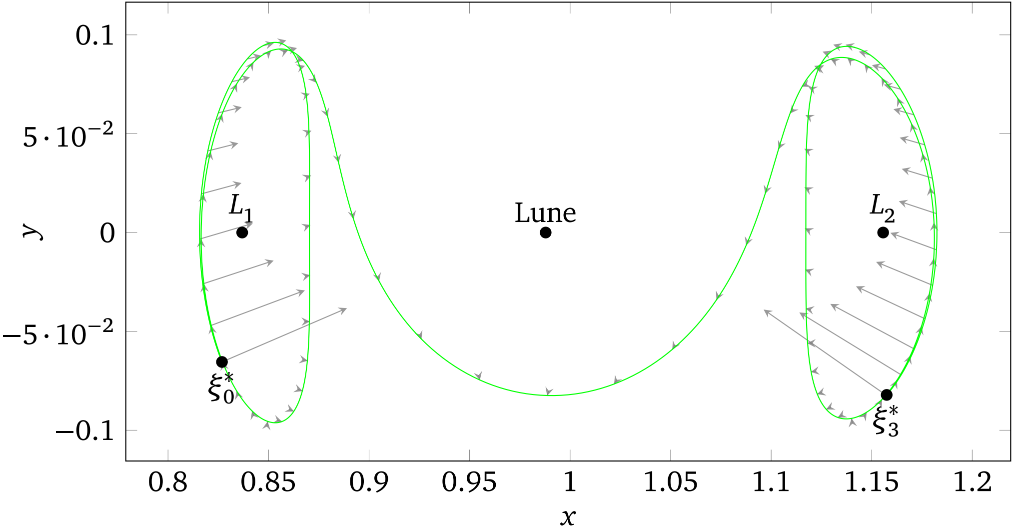
$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } C_{x_0,t_f}(u) = \displaystyle\int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ u \in \mathscr{U}_{x_0,t_f,\Omega} \\ x(0) \in M_0, \quad x(t_f) \in M_1. \end{cases}$$

- Cadre très général du contrôle optimal

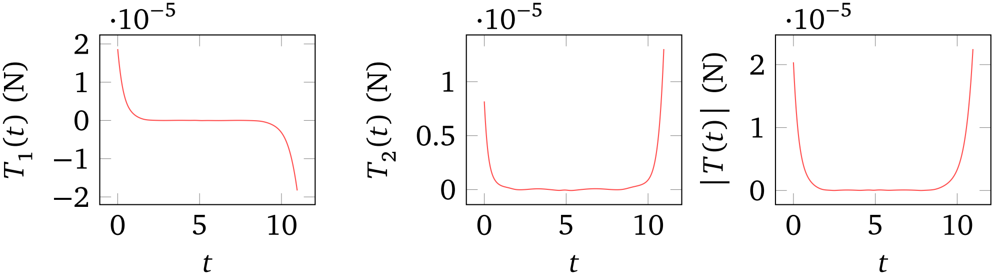
Exemple de transfert optimal



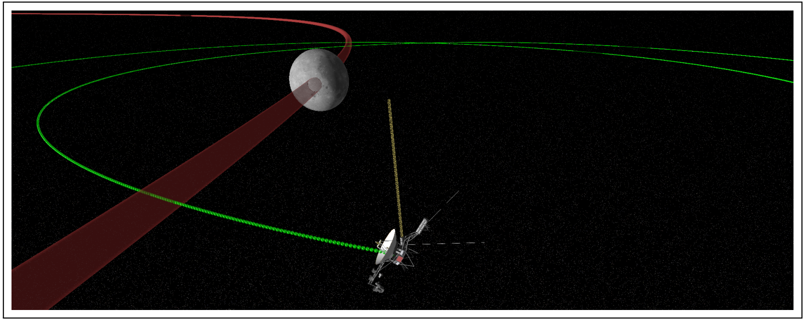
Exemple de transfert optimal



Effet turnpike



Vidéo



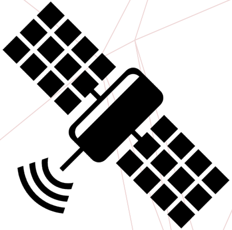
Les théories du contrôle

Domaines d'application bien plus vastes que les satellites

- Les robots, les voitures automatiques, etc.
- Les recherches sur le corps humain (fonctionnement de l'œil, déplacement dans une pièce, etc.)
- La biologie, la médecine (traitement médical optimal, etc.)
- et bien d'autres…

Références

- Site web du Professeur Jérôme Pérez http://perso.ensta-paristech.fr/~perez/
- Site web du Professeur Emmanuel Trélat https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/
  - Article sur le site Images des maths http://images.math.cnrs.fr/Theorie-du-controle-points-de
  - Conférence « Tout est sous contrôle » https://www.youtube.com/watch?v=ET7f8SpOkVQ
- Introduction de ma thèse : https://www.ceremade.dauphine.fr/~chupin/



Merci de votre attention !