Examen de janvier 2012

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.

Chaque question numérotée vaut le même nombre de points.

Il est demandé de traiter deux des trois exercices suivants, en indiquant clairement son choix. Seuls les deux premiers exercices traités seront corrigés.

Exercice 1 Partie finie de Hadamard

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est continue sur $[a,b]$; on pourra commencer par appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à des suites de fonctions du type $(f(t)\mathbb{1}_{[a,x_n]}(t))$, où $x_n \to x \in]a,b[$.
2. Montrer que, si f est continue, F est dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f (en revenant à la définition d'une dérivée). En déduire que, si f est continue et si F_0 est un primitive de f, on a $\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)$.

Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

3. Déduire de la question précédente qu'il existe une fonction θ continue telle que

$$\phi(x) = \phi(0) + x\,\theta(x).$$

4. Dans quels cas la fonction $x \mapsto \phi(x)/x$ est-elle intégrable sur $[0,1]$? En déduire que, dans tous les cas, quand ϵ tend vers 0, la limite, notée P.f. $\int_0^1 \phi(t)/t\,dt$, de

$$\int_\epsilon^1 \frac{\phi(t)}{t}\,dt + \phi(0)\,\ln\epsilon,$$

existe (*partie finie de Hadamard* de $\int_0^1 \phi(t)/t\,dt$).

Exercice 2 Développements décimaux

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$.

1. Calculer la loi et la fonction caractéristique communes des X_n.

Pour tout $n \geq 1$, on définit Y_n comme la somme partielle de rang n de la série $\sum_k \frac{X_k}{10^k}$:

$$Y_n = \frac{X_1}{10} + \frac{X_2}{10^2} + \cdots + \frac{X_n}{10^n}.$$

2. Montrer que la suite (Y_n) converge simplement, vers une variable aléatoire que l'on notera Y. Converge-t-elle en probabilité ? En loi ?
3. Montrer que la fonction caractéristique de Y_n est
$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n} \frac{1 - \exp(it)}{1 - \exp(10^{-n} it)} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \ ;$$
on pourra commencer par supposer $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
4. En déduire que la loi de Y est uniforme sur $[0, 10]$; on pourra commencer par calculer la fonction caractéristique de Y.

Exercice 3 Un exemple de vecteur gaussien

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires réelles inhdépendantes de loi $N_1(0, 1)$. On note $X = (X_1, X_2, X_3)$.
Soient Y, Z et W les vecteurs aléatoires $Y = AX$, $Z = BY$ et $W = CY$, où

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la loi de Y ; possède-t-elle une densité ? Les composantes de Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer la loi de Z et celle de W ; possèdent-t-elles une densité ?
3. Interpréter géométriquement la question précédente en fonction de Y.

Notons $\tilde{X} = (X_1, X_2)$. On rappelle que l'espérance conditionnelle $E(X_3|\tilde{X})$ est la projection orthogonale de X_3 sur l'espace $L^2(\sigma(\tilde{X}))$, où $\sigma(\tilde{X})$ est la plus petite tribu rendant le vecteur aléatoire $\tilde{X}$ borélien.

4. Montrer qu'une variable aléatoire réelle W est $\sigma(\tilde{X})$-mesurable si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $W = h \circ \tilde{X}$.
5. Montrer que dans le cas où $W = E(X_3|X_1, X_2)$, W est la projection orthogonale V de X_3 sur le plan vectoriel réel engendré par X_1 et X_2 (et donc h est une forme linéaire) ; on pourra commencer par justifier que $X_3 - V$ est indépendante de $\tilde{X}$ et que donc $E(X_3 - V|\tilde{X}) = E(X_3 - V) = 0$.

Solution de l'exercice 1

1. Soient $c \in]a,b[$ et (x_n) une suite de $[a,b]$ qui tend vers c. Presque partout, la suite $(f\,\mathbb{1}_{[a,x_n]})$ converge simplement vers la fonction $f\,\mathbb{1}_{[a,c]}$. (Le "presque partout" est important, puisqu'on ne sait pas ce qui se passe au point c lui-même. En effet, si (x_n) converge par valeurs inférieures, la limite de $f(c)\,\mathbb{1}_{[a,x_n]}(c)$ est $f(c)$; si elle converge par valeurs strictement supérieures, sa limite est 0 ; et en général, si $f(c) \neq 0$, $f(c)\,\mathbb{1}_{[a,x_n]}(c)$ possède deux valeurs d'adhérences distinctes 0 et $f(c)$, donc n'a pas de limite.) D'autre part, $f\,\mathbb{1}_{[a,x_n]}$ est dominée par la fonction $|f|$, qui est intégrable. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f(t)\,dt = \int_{[a,c[} f(t)\,dt = \int_{[a,c]} f(t)\,dt = F(c).$$

Donc F est continue sur $]a,b[$. De même, en prenant une suite (x_n) convergeant à droite vers a ou à gauche vers b, on voit que F est continue à droite en a et à gauche en b, et donc, finalement, continue sur $[a,b]$.

2. Soient $c \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $c+h \in [a,b]$. Le taux d'accroissement de F entre c et $c+h$ vaut

$$\tau_c(h) = \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

Comme f est continue en c, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t tel que $|t-c| < \eta$ on ait $|f(t)-f(c)| < \epsilon$. Alors, si $|h| < \eta$, par croissance de l'intégrale on a

$$|\tau_c(h) - f(c)| \leq \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ, F est dérivable en c et $F'(c) = f(c)$. C'est dire que f possède une primitive et que F est la primitive de f telle que $F(a) = 0$.

Si F_0 est une primitive quelconque de f, comme $(F-F_0)' = 0$ il existe un réel c tel que $F = F_0 + c$; comme $F(a) = 0$, on a $c = -F_0(a)$, donc

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F_0(b) - F_0(a).$$

3. D'après la question précédente,

$$\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)\,dt.$$

D'après la formule du changement de variable ($t = ux$),

$$\phi(x) - \phi(0) = x\theta(x), \quad \text{avec } \theta(x) = \int_0^1 \phi'(tx)\,dx.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \phi(tx)$ est continue. Comme ϕ est continue, pour tout $x \in [0,1]$ la fonction $t \mapsto \phi(tx)$ est intégrable et dominée par une une constante qui ne dépend pas de x. Donc la fonction θ est continue sur $[0,1]$.

4. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(0)}{x} + \theta(x),$$

où θ est continue donc intégrable. Donc $x \mapsto \phi(x)/x$ est intégrable si et seulement si $x \mapsto \phi(0)/x$ est intégrable, c'est-à-dire si et seulement si $\phi(0) = 0$.

Nous venons d'utiliser le fait que $1/x$ n'est pas intégrable. Redémontrons ce fait classique, pour l'exemple. Notons $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$, et, par exemple, $f(0) = 0$. Soit $A \in]0,1]$. La fonction logarithme est une primitive de f sur $[A,1]$ et la restriction de f à l'intervalle $[A,1]$ est de classe C^∞, donc continue. D'après la question précédente, on a donc

$$\int_A^1 \frac{dt}{t} = -\ln A \geq 0,$$

et, en particulier, f est intégrable sur $[A,1]$. De plus, la suite croissante des fonctions positives $f\,\mathbb{1}_{[1/n,1]}$, $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $]0,1]$, donc presque partout sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int_{[0,1]} \frac{dt}{t} = \lim_n -\ln\frac{1}{n} = +\infty.$$

Donc $1/x$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Maintenant, comme $\phi(t) = \phi(0) + t\theta(t)$, on a

$$\int_\epsilon^1 \frac{\phi(t)}{t}\,dt + \phi(0)\,\ln\epsilon = \int_\epsilon^1 \left(\frac{\phi(0)}{t} + \theta(t)\right) dt + \phi(0)\,\ln\epsilon = \int_\epsilon^1 \theta(t)\,dt\ ;$$

comme θ est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème de convergence dominée cette quantité a bien une limite quand ϵ tend vers 0.

Solution de l'exercice 2

1. La loi des X_n est la mesure uniforme U sur $\{0, \cdots, 9\}$:

$$U = \frac{1}{10}\sum_{0\leq k\leq 9} \delta_k.$$

La fonction caractéristique de X_n est la fonction (indépendante de n)

$$\varphi_{X_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\,dU(x) = \frac{1}{10}\sum_{0\leq k\leq 9} e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

soit

$$\varphi_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}\frac{1-\exp(10it)}{1-\exp(it)} & \text{si } e^{it} \neq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour tout $k \geq 0$, le terme général de la série $\sum_k \frac{X_k}{10^k}$ vérifie

$$0 \leq \frac{X_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k},$$

donc la série converge simplement vers une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}^+$, avec

$$0 \leq Y \leq 9\sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^k} = 1.$$

Cette convergence simple partout implique la convergence presque sûre, donc la convergence en probabilité et la convergence en loi.

3. Comme les X_n sont indépendantes,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{1\le k\le n} \varphi_{X_k/10^k}(t) = \prod_{1\le k\le n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{10^k}\right).$$

Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, certainement $\frac{t}{10^k} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $k \ge 1$, donc, d'après la question précédente,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n} \prod_{1\le k\le n} \frac{1-\exp(10^{-(k-1)}it)}{1-\exp(10^{-k}it)},$$

soit, après simplification,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n}\frac{1-\exp(it)}{1-\exp(10^{-n}it)}.$$

Comme la fonction caractéristique d'une variable aléatoire intégrable est continue, cette expression est valable pour tout $t \notin 10^n 2\pi\mathbb{Z}$. Si $t \in 10^n 2\pi\mathbb{Z}$, on voit soit par un calcul direct soit en prenant la limite de l'expression précédente, que $\varphi_{Y_n}(t) = 1$.

4. Quand n tend vers l'infini,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n}\left(\frac{1-\exp(it)}{-10^{-n}it + O(10^{-2n})}\right) \to \frac{\exp(it)-1}{it} \quad \text{si } t \neq 0,$$

et

$$\varphi_{Y_n}(0) \equiv 1 \to 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée, puisque (Y_n) converge simplement vers Y et est dominée par la fonction intégrable constante 1, (φ_{Y_n}) converge simplement vers φ_Y presque partout. D'après le calcul précédent, on a donc

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \frac{\exp(it)-1}{it} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

presque partout, et, par continuité, partout. On reconnaît la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[0,1]$. Donc, par injectivité de la transformation de Fourier, la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

Solution de l'exercice 3

1. La fonction caractéristique de X est

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}\|t\|^2} \quad (t \in \mathbb{R}^3),$$

donc celle de $Y = AX$ vaut

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(A' \cdot t) = e^{-\frac{1}{2}t'\cdot(AA')\cdot t} \quad (t \in \mathbb{R}^2),$$

donc, par injectivité de la transformation de Fourier, la loi de Y est $N_2(0, D_Y)$, avec $D_Y = AA' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Comme la matrice de dispersion D de Y n'est pas diagonale, les composantes de Y ne sont pas indépendantes (en fait, $Y_1 = Y_2$).

Comme $\det D = 0$, D n'est pas inversible et $Y = (Y_1, Y_2)$ n'a pas de densité.

2. De même, la loi de Z est $N_1(0, D_Z)$, avec $D_Z = BD_YB' = \frac{1}{2}$, donc P_Z admet pour densité $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$.

   La loi de W est $N_1(0, D_W)$, avec $D_W = CD_YC' = 0$, donc P_W n'admet pas de densité.

3. La droite vectorielle $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} C$ d'équation $y_1 = y_2$ concentre la mesure P_Y (puisque $Y_1 = Y_2$), au sens où la mesure d'un ensemble disjoint de $\mathcal{D}$ est automatiquement de mesure nulle. B est la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$, tandis que C est la projection orthogonale sur la droite orthogonale à $\mathcal{D}$.

4. Voir le théorème 5.7 du cours polycopié.

5. Notons $V = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ la projection orthogonale de X_3 sur le plan vectoriel engendré par X_1 et X_2. Remarquons que

$$\operatorname{cov}(X_3 - V, X_i) = E[(X - V)X_i] = 0, \quad i = 1, 2,$$

   (par définition de la projection orthogonale), donc $X - V$ est indépendant de $\tilde{X}$, donc

$$E(X_3 - V|\tilde{X}) = E(X_3 - V).$$

   (Cette dernière égalité vient du fait que, si T est $\sigma(\tilde{X})$-mesurable, T est indépendante de $X_3 - V$, donc $E((X_3 - V)T) = E(X_3 - V)E(T) = E(E(X_3 - V)T)$.) Donc

$$E(X_3 - V|\tilde{X}) = E(X_3) - E(V) = 0 - 0 = 0.$$

   L'espérance conditionnelle cherchée est

$$W = E(X_3|\tilde{X}) = E(X_3 - V|\tilde{X}) + E(V|\tilde{X}) = E(V|\tilde{X}).$$

   Comme de plus V est $\sigma(\tilde{X})$-mesurable, $E(V|\tilde{X}) = V$. Donc $W = V$.