Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Partiel du 15 novembre 2013

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.

Chaque question numérotée sera notée sur environ 2 points.
Chaque réponse doit être justifiée et concise.

Exercice 1 Nombres diophantiens Soit $n \mapsto q_n$ une bijection $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$. Définissons

$$\begin{cases} I_{n,k} = \left]q_n - 2^{-n-k}, q_n + 2^{-n-k}\right[\quad (n, k \in \mathbb{N}) \\ U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{n,k} \\ A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k. \end{cases}$$

Les nombres de $A\backslash\mathbb{Q}$ sont qualifiés de *liouvilliens*, et ceux de $\mathbb{R}\backslash A$ de *diophantiens*. L'objectif est de montrer que presque tous les nombres réels sont diophantiens.

1. Montrer que A est borélien.
2. Montrer que A est Lebesgue-négligeable ; on pourra trouver une majoration convenable de la mesure de Lebesgue de U_k.

Exercice 2 Tribu invariante Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : E \to E$ une application mesurable.

1. Montrer que $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A},\ \varphi^{-1}(A) = A\}$ est une tribu de E (on l'appelle la *tribu invariante* de φ).
2. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable. Montrer que f est $\mathcal{I}$-mesurable si et seulement si elle est φ-invariante ($f \circ \varphi = f$).

Exercice 3 Calcul d'une intégrale On veut retrouver l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2}\, du\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt.$$

1. Montrer que $f(0) = \pi/4$ et que $\lim_{+\infty} f = \left(\int_0^\infty e^{-u^2}\, du\right)^2$.
2. Montrer que, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}\, du$, le taux d'accroissement $(g(x+\xi)-g(x))/\xi$ a une limite quand ξ tend vers 0. En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée (quels que soient les théorèmes utilisés, on justifiera leur application). Conclure.

Exercice 4 Un espace mesurable

1. Monter que la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons d'un ensemble E est la classe des parties qui sont soit dénombrables soit de complémentaire dénombrable. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, comparer $\mathcal{A}$ à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

On suppose dorénavant que E est (infini) non dénombrable. Pour toute partie $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

2. Montrer que, dans une famille (A_i) de parties mesurables disjointes deux à deux, il existe au plus une partie non dénombrable. En déduire que P est une probabilité.
3. Soit Q une probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. Montrer que, si A est l'ensemble des $x \in E$ tels que $Q(\{x\}) > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ que l'on calculera tel que

   $$Q = \sum_{a \in A} Q(\{a\})\delta_a + cP$$

   (δ_a désignant la mesure de Dirac).
4. Montrer qu'une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est constante en dehors d'une partie dénombrable ; on pourra d'abord considérer le cas d'une fonction étagée.

Solution de l'exercice 1

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ parce que les $I_{n,k}$ sont des intervalles ouverts et parce que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les ouverts, et est stable par union et intersection dénombrables.

2. Un entier k étant fixé, U_k est l'union dénombrable d'intervalles $I_{n,k}$ de longueur respective égale à $2/2^{n+k}$. Par sous-additivité,

$$\lambda(U_k) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Par ailleurs, chaque intervalle $I_{n,k}$ décroît par rapport à k, donc la suite (U_k) est décroissante, donc, pour tout k,

$$\lambda(A) \leq \lambda(U_k) \leq \frac{1}{2^{k-2}}.$$

En passant à la limite quand k tend vers l'infini, on obtient

$$\lambda(A) = 0.$$

Solution de l'exercice 2

1. On a $\emptyset, \Omega \in \mathcal{I}$. De plus, si $A \in \mathcal{I}$,

$$\varphi^{-1}(A^c) = \varphi^{-1}(A)^c = A^c,$$

donc $A^c \in \mathcal{I}$. Enfin, si (A_n) est une suite d'événements de $\mathcal{I}$,

$$\varphi^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n \varphi^{-1}(A_n) = \cup_n A_n,$$

donc $\cup_n A_n \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I}$ est une tribu de Ω, contenue dans $\mathcal{A}$.

2. Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(\varphi(x)) \neq f(x)$. Notons $y = f(\varphi(x))$. L'ensemble $A = f^{-1}(\{y\})$ contient $\varphi(x)$ mais pas x, donc $A \notin \mathcal{I}$. Donc f n'est pas $\mathcal{I}$-mesurable.

Réciproquement, si f est $\mathcal{A}$-mesurable et φ-invariante, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-mesurabilité) et

$$f^{-1}(B) = \varphi^{-1}(f^{-1}(B)) \quad \text{(invariance)},$$

donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{I}$; c'est dire que f est $(\mathcal{I}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Solution de l'exercice 3

1. On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= [\operatorname{Arctan} t]_0^1 \quad \text{(intégrale de Riemann)} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la limite de f en $+\infty$. Quelle que soit la suite réelle (x_n) qui tend vers l'infini, la suite croissante de fonctions positives

$$e^{-u^2}\mathbf{1}_{[0,x_n]}$$

(produit d'une fonction continue donc borélienne, et de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, x_n]$, donc elle aussi borélienne) converge vers la fonction e^{-u^2}. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathbf{1}_{[0,x_n]}(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

Comme ceci est vrai pour toute suite (x_n) tendant vers l'infini,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathbf{1}_{[0,x]}(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

Enfin, comme la fonction $y \mapsto y^2$ est continue,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^{x} e^{-u^2}\,du\right)^2 = \left(\int_0^{-\infty} e^{-u^2}\,du\right)^2.$$

Calculons la limite du second terme dans l'expression de f. On peut appliquer une variante du théorème de convergence monotone (on est dans le cas d'une fonction décroissante par rapport à t, majorée par exemple par la fonction intégrable constante $e^{-2x^2}/2$), ou le théorème de convergenc dominée (la famille indexée par x des fonctions $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ étant dominée par la fonction $1/(1+t^2) \in \mathcal{L}^1([0,1])$). Dans les deux cas, en prenant comme précédemment une suite réelle (x_n) tendant vers $+\infty$, on voit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = 0.$$

Donc f a bien la limite demandée en $+\infty$.

2. Soit (ξ_n) une suite de réels non nuls, tendant vers 0 par valeurs positives. Notons
$$\tau_n(x) = \frac{g(x+\xi_n) - g(x)}{\xi_n}.$$
On a
$$\begin{aligned}
\tau_n(x) &= \frac{1}{\xi_n} \int_{[x,x+\xi_n]} e^{-u^2}\, du \\
&= \frac{1}{\xi_n} \int_{[0,1]} e^{-(x+\xi_n v)^2} \xi_n \, dv \\
&\text{(changement de variables } \varphi(v) = x + \xi_n v \text{, avec } \operatorname{Jac}\varphi(v) = \xi_n) \\
&= \int_0^1 e^{-(x+\xi_n v)^2}\, dv.
\end{aligned}$$
Quand n tend vers l'infini, cette dernière intégrale tend vers e^{-x^2} d'après le théorème de convergence dominée, puisque $e^{-(x+\xi_n v)^2} \to e^{-x^2}$ et $|e^{-(x+\xi_n v)^2}| \leq e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Ceci montre que g est dérivable à droite en tout x et que sa dérivée à droite en x vaut e^{-x^2}. On voit de même que la dérivée à gauche de g en 0 est e^{-x^2} ; la petite différence calculatoire apparaît dans le changement de variables :
$$\begin{aligned}
\frac{g(x-\xi_n) - g(x)}{-\xi_n} &= -\frac{1}{-\xi_n} \int_{[x-\xi_n,x]} e^{-u^2}\, du \\
&= \frac{1}{\xi_n} \int_{[0,1]} e^{-(x-\xi_n v)^2} \xi_n \, dv \\
&\text{(changement de variables } \varphi(v) = x - \xi_n v, \\
&\text{avec } |\operatorname{Jac}\varphi(v)| = \xi_n) \\
&= \int_0^1 e^{-(x-\xi_n v)^2}\, dv \to e^{-x^2}.
\end{aligned}$$
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée e^{-x^2}.

3. On a
$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \right) \right| = \left| -2xe^{-x^2(1+t^2)} \right| \leq 2xe^{-x^2} \in \mathcal{L}^1([0,1], dt).$$
D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$-2x \int_{[0,1]} e^{-x^2(1+t^2)}\, dt = -2e^{-x^2} \int_{[0,x]} e^{-u^2}\, du$$

(changement de variable $u = tx$). Donc f elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 0.$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}$, et, en particulier,

$$f(0) = \frac{\pi}{4} = \lim_{+\infty} f = \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du \right)^2.$$

Solution de l'exercice 4

1. Soit $\mathcal{B}$ la classe des parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable.
   — $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$?
   La tribu $\mathcal{A}$, étant stable par union dénombrable, contient les parties dénombrables ; étant aussi stable par passage au complémentaire, elle contient les parties de complémentaire dénombrable. Donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
   — $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$?
   Réciproquement, les singletons de E sont dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu engendrée par les singletons, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ parce que $\mathcal{B}$ est une tribu (ce que nous allons démontrer ci-après).

   Dans l'argument qui précède, on a utilisé que $\mathcal{B}$ est une tribu, ce qui se vérifie ainsi :

   L'ensemble vide étant dénombrable, $\emptyset \in \mathcal{B}$.

   $\mathcal{B}$ est trivialement stable par passage au complémentaire.

   Soient $A_1, A_2, ... \in \mathcal{B}$. Si tous les A_i sont dénombrables, leur union (dénombrable) est dénombrable, donc appartient à $\mathcal{B}$. Sinon, il existe j tel que A_j soit infini non dénombrable, et, par définition de $\mathcal{B}$, le complémentaire de A_j est dénombrable ; alors

   $$\complement \cup_i A_i = \cap_i \complement A_i \subset \complement A_j$$

   est dénombrable, donc $\cup_i A_i \in \mathcal{B}$.)

   Donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Dans le cas particulier décrit en fin de question, on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit (A_i) une famille de parties mesurables disjointes deux à deux. Supposons que les complémentaires de A_i et de A_j soient dénombrables. Comme A_i ne peut être contenue dans le complémentaire de A_j, forcément $i = j$. Donc il existe au plus un indice i tel que A_i soit non dénombrable.

Vérifions maintenant que P est une probabilité. Comme l'ensemble vide est dénombrable, $P(\emptyset) = 0$ et, comme E est supposé non dénombrable, $P(E) = 1$. Vérifions l'additivité dénombrable de P. Soient $A_1, A_2... \in \mathcal{A}$ une famille dénombrable de parties mesurables disjointes deux à deux. D'après le début de la question, il existe 0 ou 1 partie parmi les A_i qui soit non dénombrable.

Si tous les A_i sont dénombrables, leur union est dénombrable et donc P-négligeable, de sorte que

$$P(\cup A_i) = 0 = \sum P(A_i).$$

Sinon, il existe exactement un j tel que A_j soit non dénombrable, et A_i est dénombrable pour tout $i \neq j$. Donc $P(\cup A_i) = 1 = P(A_j) = \sum_i P(A_i)$.

3. Soit Q une probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. Soit A l'ensemble des $x \in E$ tels que $Q(\{x\}) > 0$; A est dénombrable (éventuellement fini). La fonction

$$\tilde{Q} := Q - \sum_{a \in A} Q(\{a\})\delta_a$$

est une mesure qui est nulle sur tous les singletons, et donc sur toutes les parties dénombrables. En passant au complémentaire, on voit que $\tilde{Q}(A) = \tilde{Q}(E)$ pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ non dénombrable. Donc

$$Q = \sum_{a \in A} Q(\{a\})\delta_a + \left(1 - \sum_{a \in A} P(\{a\})\right) P.$$

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable étagée. Ses ensembles de niveau $f^{-1}(y)$, $y \in f(E)$, forment une partition finie de E. D'après le début de la question 2, il existe au plus un $y \in f(E)$ tel que $f^{-1}(y)$ soit non dénombrable. Mais il en existe forcément un, parce que E est non dénombrable. Alors $f = y$ en dehors de l'ensemble dénombrable $\complement f^{-1}(y)$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives, convergeant vers f. Pour chaque fonction f_n, d'après le cas précédent il existe un réel y_n tel que $f_n = y_n$ en dehors d'une partie dénombrable A_n. En dehors de la partie dénombrable $\cup A_n$, $f_n = y_n \to f$; donc la suite réelle (y_n) converge vers un certain $y \in \mathbb{R}$, et $f = y$ en dehors de $\cup A_n$.

Pour une fonction f mesurable de signe quelconque, le cas précédent appliqué aux parties positive et négative de f montre que f est constante en dehors d'une partie dénombrable.