Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Intégrale de Lebesgue et Probabilités

# Partiel du 5 novembre 2012

Deux heures. Sans document, ni calculatrice, ni téléphone, etc.

*Chaque question numérotée sera notée sur le même nombre de points.*
*Il n'est pas nécessaire de traiter tout le sujet pour avoir le maximum de points.*
*Chaque réponse doit être justifiée et concise.*

## Exercice 1 Tribu engendrée

1. Montrer que la tribu $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{C} = \{[0,1],[0,2]\}$ contient une partition $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$ à 3 éléments ; on explicitera $\mathcal{P}$.
2. En déduire quelle est la tribu $\mathcal{A}$, et en particulier combien de parties de $\mathbb{R}$ cette tribu contient.

## Exercice 2 Fonction de répartition

1. Tracer le graphe de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_{[0,+\infty[} + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}\right)$ et montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité.
2. Calculer la probabilité correspondante de $A = [0,1[$, $B = \{0\}$ et $C = ]0,+\infty[$.

## Exercice 3 Espérance par rapport à une mesure à densité

Soient $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une variable aléatoire positive telle que $E(X) = 1$, et $XP$ la probabilité de densité $X$ par rapport à $P$. Rappeler la définition de $XP$ et montrer que, pour toute variable aléatoire $Y$ positive ou bornée, $\int Y\, d(XP) = \int XY\, dP$.

## Exercice 4 Formule de Stirling

Soit

$$f(n) = \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $f(n) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que

$$f(n) = \sqrt{n}\, n^n\, e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}\, dy.$$

Indication : on pourra partir du membre de droite.

3. En déduire la formule de Stirling :

$$f(n) \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n};$$

on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi}$.

## Exercice 5 Une marche aléatoire

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi

$$P_{X_1}(1) = p, \quad P_{X_1}(-1) = 1-p, \quad 0 < p < 1.$$

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ la suite de changements de signes de $(X_n)$ : $Z_n = \mathbf{1}_{\{X_n \neq X_{n+1}\}}$.

1. Montrer que si les $Z_n$ sont indépendantes, $p = 1/2$ (la réciproque est vraie, mais on ne demande pas de la démontrer) ; on pourra utiliser en particulier l'indépendance de $Z_1$ et $Z_2$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} X_k$. Soient

$$\Sigma = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n=0\}} \quad \text{et} \quad A = \{\Sigma < \infty\};$$

donc, la variable aléatoire $\Sigma$ compte le nombre d'annulation des $S_n$, et $A$ est l'événement "les $S_n$ s'annulent seulement un nombre fini de fois".

2. Montrer qu'il existe une constante $C$, qu'on déterminera, telle que

$$P(S_{2n} = 0) \sim_{n\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{n}}(4p(1-p))^n$$

(on pourra utiliser la formule de Stirling), tandis que $P(S_{2n+1} = 0) = 0$.

3. (*) En déduire que $P(A) = 0$ si $p = 1/2$ et $P(A) = 1$ si $p \neq 1/2$ ; on pourra calculer l'espérance de $\Sigma$.

**Solution de l'exercice 1**

1. La tribu $\mathcal{A}$ contient

$$\begin{cases} P_1 = [0,1] \in \mathcal{C} \\ P_2 = ]1,2] = [0,2] \setminus [0,1] \\ P_3 = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ = \complement[0,2], \end{cases}$$

   qui forment une partition $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$.

2. Notons $\mathcal{Q} = \{\cup_{i \in I} P_i,\ I \subset \{1,2,3\}\}$. La tribu engendrée par $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{P}$, et, étant stable par union finie, $\mathcal{Q}$. Comme $\sigma(\mathcal{P})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{P}$ et comme $\mathcal{Q}$ est une tribu, on en déduit que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

   On a vu que $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$, donc $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{A}$. Réciproquement,

$$\begin{cases} [0,1] = P_1 \in \mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{P}) \\ [0,2] = P_1 \cup P_2 \in \sigma(\mathcal{P}) \end{cases}$$

   donc $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{P})$. Donc $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{P})$. Donc $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P})$. Cette tribu est indexée par les parties de $\{1,2,3\}$, donc possède 8 éléments.

**Solution de l'exercice 2**

1. On a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

   Donc $F$ est croissante, continue à droite, et a pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Donc il existe une unique probabilité $P$ sur $\mathbb{R}$ dont $F$ soit la fonction de répartition.

2. On a

$$[0,1[ = ]-\infty, 1[ \setminus ]-\infty, 0[,$$

   donc

$$P([0,1[) = F(1^-) - F(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

   De même,

$$P(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2}$$

   et

$$P(]0, +\infty[) = 1 - F(0) = \frac{1}{2}.$$

### Solution de l'exercice 3

Par définition, pour tout événement $A \in \mathcal{A}$,

$$(XP)(A) = \int_A X\, dP.$$

Si $Y = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{A}$,

$$\int Y\, d(XP) = (XP)(A) = \int_A X\, dP = \int XY\, dP.$$

Si $Y$ est étagée, on voit que l'égalité voulue est vraie, par linéarité par rapport à $Y$.

Supposons maintenant $Y$ mesurable positive. Soit $(Y_n)$ une suite croissante de variables aléatoires étagées positives, qui tende vers $Y$. D'après le cas précédent, pour tout $n$ on a

$$\int Y_n\, d(XP) = \int XY_n\, dP.$$

D'après le théorème de convergence monotone, à la limite on obtient l'égalité voulue.

Si $Y$ est bornée, $Y$ est intégrable et la formule voulue s'obtient à partir du cas précédent appliqué aux parties positive et négatives de $Y$ :

$$\int Y^{\pm}\, d(XP) = \int XY^{\pm}\, dP,$$

(et ces intégrales sont finies), donc

$$\begin{aligned}
\int Y\, d(XP) &= \int Y^{+}\, d(XP) - \int Y^{-}\, d(XP) \quad \text{par linéarité} \\
&= \int XY^{+}\, dP - \int XY^{-}\, dP \quad \text{d'après le cas précédent} \\
&= \int XY\, dP \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

### Solution de l'exercice 4

1. On a $f(0) = 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une intégration par partie montre :

   $$f(n) = \frac{f(n+1)}{n+1}.$$

   Donc par récurrence $f(n) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
n^{n+1/2}e^{-n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}\,dy &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}(n+y\sqrt{n})^n\,e^{-(n+y\sqrt{n})}\,\sqrt{n}\,dy \\
&= \int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt \quad (t=n+y\sqrt{n}) \\
&= f(n).
\end{aligned}$$

3. On veut trouver la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, de

$$g(n) := \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}\,dy;$$

la formule de Stirling revient à dire que cette limite vaut $\sqrt{2\pi}$.

Notons $h_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$. Quand $n$ tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
h_n(y) &= e^{n\log(1+y/\sqrt{n})-y\sqrt{n}} \\
&= e^{n\left(\frac{y}{\sqrt{n}}-\frac{y^2}{2n}+o(1/n)\right)-y\sqrt{n}} = e^{-\frac{y^2}{2}+o(1)} \\
&\to e^{-y^2/2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie que pour tout $y>0$, la fonction $n\mapsto -y\sqrt{n}+n\log(1+y/\sqrt{n})$ est décroissante, donc majorée au voisinage de $n=+\infty$ par sa valeur en $n=1$, par exemple, soit $-y+\log(1+y)$ ; et pour tout $y\in[-\sqrt{n},0]$, cette même fonction est majorée par exemple par $-y^2/2$. La fonction de domination

$$e^{-y^2/2}\,\mathbf{1}_{[-\sqrt{n},0]} + e^{-y+\log(1+y)}\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$$

étant $dy$-intégrable, d'après le théorème de convergence dominée, quand $n\to+\infty$,

$$g(n)\to\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}.$$

La formule de Stirling en découle.

**Solution de l'exercice 5**

1. D'une part,

$$P(Z_n=1) = P(X_n=1\cap X_{n+1}=-1)+P(X_n=-1\cap X_{n+1}=1) = 2p(1-p),$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
P(Z_1=1\cap Z_2=1) &= P(X_1=X_3=1\cap X_2=-1)+P(X_1=X_3=-1\cap X_2=1) \\
&= p^2(1-p)+p(1-p)^2 = p(1-p).
\end{aligned}$$

Si les $Z_n$ sont indépendantes, en particulier

$$P(Z_1 = 1 \cap Z_2 = 1) = P(Z_1 = 1)P(Z_2 = 1),$$

donc

$$p(1-p) = 4p^2(1-p)^2,$$

donc $p = 1/2$.

2. On a

$$P(S_{2n}) = C_{2n}^n p^n (1-p)^n$$

et, d'après la formule de Stirling ($n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n$ tend vers l'infini),

$$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{C}{\sqrt{n}}(4p(1-p))^n, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Par ailleurs, l'événement $S_{2n+1} = 0$ est vide : en notant $k$ le nombre de tirages égaux à $+1$, on a $k - (2n+1-k) = 0$, soit $2(k-n) - 1 = 0$, ce qui est impossible puisque 0 est pair.

3. Supposons d'abord $p \neq 1/2$. On a $4p(1-p) < 1$. D'après le théorème de convergence monotone,

$$E(\Sigma) = \sum_{n\geq 0} E(\mathbf{1}_{\{S_{2n}=0\}}) = \sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)$$

et donc, d'après l'équivalent de la question précédente, $E(\Sigma) < \infty$. Donc $\Sigma$ est finie presque sûrement. Par définition de $A$, c'est dire que $P(A) = 1$.

Supposons maintenant $p = 1/2$. On a $4p(p-1) = 1$. Par un raisonnement analogue, on voit que $E(\Sigma) = \sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0) = +\infty$. Or, $A = \cup_{k\geq 0} A_k$, avec

$$A_k = \{S_k = 0,\ \forall n > k\ S_n \neq 0\}.$$

Par $\sigma$-additivité,

$$P(A) = \sum_{k\geq 0} P(A_k).$$

Comme de plus $P(A_k) = P(S_k = 0)P(A_0)$,

$$P(A) = P(A_0) \sum_{k\geq 0} P(S_{2k} = 0) = +\infty.$$

Donc forcément $P(A_0) = 0 = P(A)$.