Calcul stochastique appliqué à la finance

Romuald ELIE & Idris KHARROUBI

Table des matières

Chapitre 1

Notion d'arbitrage

1.1 Hypothèses sur le marché

Dans toute la suite, nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
3. On peut emprunter et vendre à découvert ;
4. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant r.

Ces hypothèses, bien que n'étant pas toujours vérifiées dans la réalité, constituent une première modélisation ayant l'avantage de pouvoir fournir une évaluation des produits dérivés, notamment à l'aide de la notion d'arbitrage que nous présentons dans la suite.

1.2 Arbitrage

De manière générale, la notion d'opportunité d'arbitrage fait référence à une situation où un individu rationnel a la possibilité de prendre une décision qui lui permet de tirer profit de manière certaine de l'avenir. Afin de formaliser cette notion, il faut donc mettre en place une modélisation de l'incertitude liée à l'évolution future du marché financier.

Quelles sont les évolutions possibles du marché ?
Ω : ensemble des états possibles du marché ;
$\mathbb{P}$: Probabilité réelle (ou en tout cas anticipée) de survenance de chacun des évènements.

Toujours dans le but de formaliser cette notion d'arbitrage, il nous faut préciser la manière dont peut intervenir notre agent sur le marché.

Quelles sont les stratégies d'investissement ?

Définition 1.2.1 *Un* ***portefeuille autofinancant*** *est une stratégie (non anticipative) d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés* ***dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent****. Pour $t \leq T$, on notera X_t la* ***valeur en*** *t du portefeuille X.*

Fixer un portefeuille revient donc simplement à se donner un capital initial et une stratégie dynamique d'investissement dans les actifs du marché à partir de ce capital de départ.

Qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage ?

Définition 1.2.2 *Un* ***arbitrage*** *entre les instants 0 et T est un portefeuille autofinançant X de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive :*

$$X_0 = 0, \qquad X_T \geq 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0 \ .$$

Absence d'arbitrage. On supposera dans la suite que le marché vérifie l'hypothèse d'**absence d'opportunités d'arbitrage** (**AOA** en abrégé et NFL en anglais pour *no free lunch*) entre les instants 0 et T :

$$\boxed{\{X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}(X_T > 0) = 0}$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Le raisonnement (défaitiste) est : "Si il y avait un arbitrage, quelqu'un en aurait déja profité". Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse est cohérente sur les marchés.

1.3 Comparaison de portefeuilles

Nous notons dans la suite $B(t,T)$ le prix en t d'un **zéro coupon** de maturité T $i.e.$ un actif dont la valeur en T vaut 1. La valeur $B(t,T)$ dépend du modèle choisi. Dans le cas d'un modèle en temps continu, la présence du taux d'intérêt r conduit à $B(t,T) = e^{-(T-t)}$ alors que dans un modèle en temps discret $B(t,T) = (1+r)^{-n}$ où n désigne le nombre de périodes entre t et T.

Proposition 1.3.1 *En AOA, si deux portefeuilles autofinançants X et Y ont même valeur en T, ils ont même valeur en 0 :*

$$X_T = Y_T \quad \Rightarrow \quad X_0 = Y_0 \ .$$

Démonstration. Supposons $X_0 < Y_0$ et proposons la stratégie suivante : A l'instant $t = 0$, achat de X, vente de Y et placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque. La valeur du portefeuille à l'instant $t = T$ est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0.

	en 0	en T
Achat de X	X_0	X_T
Vente de Y	$-Y_0$	$-Y_T$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0)/B(0,T) > 0$
Valeur	0	> 0

Donc AOA implique $X_0 \geq Y_0$ et, de manière similaire, on obtient $X_0 \leq Y_0$ si bien que $X_0 = Y_0$. □

Remarque 1.3.1 Pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Etant donné qu'ils ont même valeur en T, l'opération fournit un gain positif.

Proposition 1.3.2 *En AOA, si deux portefeuilles autofinançants X et Y ont même valeur en T, ils ont presque sûrement même valeur en tout instant $t \leq T$.*

$$X_T = Y_T \quad \Rightarrow \quad X_t = Y_t \quad \textit{pour tout} \quad t \leq T \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Ce résultat est une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition 1.3.3 *En AOA, considérons deux portefeuilles autofinançants X et Y, alors :*

$$X_T \leq Y_T \quad \Rightarrow \qquad X_t \leq Y_t \quad \textit{pour tout} \quad t \leq T \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration. Soit $t \leq T$. Proposons la stratégie suivante :
en 0 : je ne fais rien.
en t : Sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$, j'achète le portefeuille Y au prix Y_t, je vends le portefeuille X au prix X_t et je place la différence $X_t - Y_t > 0$ à la banque. Sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) \leq Y_t(\omega)\}$, je ne fais rien.

Finalement, en T, sur $\{X_t > Y_t\}$, je touche $Y_T - X_T \geq 0$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque qui est toujours > 0, soit une valeur > 0, et sur $\{X_t \leq Y_t\}$, la valeur du portefeuille est nulle.

		en t	en T
Sur $\{X_t > Y_t\}$	Achat de Y en t	Y_t	Y_T
	Vente de X en t	$-X_t$	$-X_T$
	Placement du gain à la banque	$X_t - Y_t > 0$	$(X_t - Y_t)/B(t,T) > 0$
	Valeur	0	> 0
Sur $\{X_t \leq Y_t\}$	Valeur	0	0

Donc AOA implique $\mathbb{P}(X_t > Y_t) = 0$. □

1.4 Relation de parité Call-Put

Un **call** de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(S_T - K)^+$; notons C_t son prix à l'instant t.
Un **put** de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(K - S_T)^+$; notons P_t son prix à l'instant t.
Nous rappelons qu'un **zero-coupon** d'échéance T est un produit financier de valeur 1 en T. Son prix en t est noté $B(t,T)$.

Alors, en AOA, les prix des calls et des puts en t sont reliés par la relation de **parité call put** :

$$\boxed{C_t - P_t \ = \ S_t - KB(t,T)}$$

En effet considérons les deux stratégies de portefeuille :

		en t	en T
Port. 1	Achat d'un Put européen en t	P_t	$(K - S_T)^+$
	Achat d'un actif risqué en t	S_t	S_T
	Valeur	$P_t + S_t$	$(K - S_T)^+ + S_T$
Port. 2	Achat d'un Call européen en t	C_t	$(S_T - K)^+$
	Achat de K actifs sans risque en t	$KB(t,T)$	K
	Valeur	$C_t + KB(t,T)$	$(S_T - K)^+ + K$

Remarquons que l'on a :

$$(K - S_T)^+ + S_T \;=\; K\,\mathbb{1}_{\{S_T \le K\}} + S_T\,\mathbb{1}_{\{K \le S_T\}} \;=\; (S_T - K)^+ + K$$

Donc, les deux portefeuilles ont des flux finaux égaux, et donc en AOA des valeurs égales à tout instant $t \le T$ ce qui nous donne la relation de parité Call-Put.

Remarque 1.4.1 Cette relation est intrinsèque à l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché et ne dépend en rien du modèle d'évolution imposé aux actifs.

1.5 Prix d'un contrat Forward

Le contrat Forward est un contrat signé à la date $t = 0$ qui assure l'échange en T de l'actif risqué S contre un prix $F(0,T)$ fixé en $t = 0$. Il n'y a aucun échange d'argent à la date $t = 0$. Pour déterminer le prix $F(0,T)$ du contrat, considérons les deux stratégies de portefeuille suivantes :

		en 0	en T
Port. 1	Achat de l'actif S_0 en 0	S_0	S_T
	Vente de $F(0,T)$ zéros coupons en 0	$-F(0,T)B(0,T)$	$-F(0,T)$
	Valeur	$S_0 - F(0,T)B(0,T)$	$S_T - F(0,T)$
Port. 2	Achat du contrat Forward en 0	0	$S_T - F(0,T)$

Sous AOA on a donc

$$F(0,T) \;=\; \frac{S_0}{B(0,T)}\,.$$

Remarque 1.5.1 De manière plus générale, on obtient :

$$F(t,T) \;=\; \frac{S_t}{B(t,T)}$$

pour tout $t \le T$.

Chapitre 2

Modèle binomial à une période

Le modèle binomial est très pratique pour les calculs et la plus grande partie des résultats obtenus se généralisent aux modèles en temps continu.

2.1 Modélisation probabiliste du marché

Considérons un marché à deux actifs et deux dates : $t = 0$ et $t = 1$.

• Un actif **sans risque** qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)$ en $t = 1$, qui représente l'argent placé à la banque au taux r (dans une obligation), il est sans risque dans le sens où l'on connaît en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$.

$$1 \quad \rightarrow \quad R = 1 + r$$

• Un **actif risqué** S de valeur S_0 en $t = 0$ et pouvant prendre deux valeurs différentes à l'instant 1 : une valeur haute $S_1^u = u.S_0$ et une valeur basse $S_1^d = d.S_0$ avec u et d deux constantes telles que $d < u$.

$$\begin{array}{ccc} & & uS_0 \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & dS_0 \end{array}$$

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de 3 objets : Ω, $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$.

• Ω est l'**ensemble des états du monde** : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d. $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$

• $\mathbb{P}$ est la **probabilité historique** sur Ω. $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilité réelle p de monter et $1 - p$ de descendre. Attention $p \in]0, 1[$ car les 2 états du monde peuvent arriver.

• $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instants $t = 0$ et $t = 1$.

– En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

– En $t = 1$, on sait si l'actif est monté ou descendu :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}.$$

Cette tribu représente l'ensemble des parties de Ω dont on peut dire à l'instant $t = 1$ si elles sont réalisées ou non.

Remarque 2.1.1 Bien sûr, on a $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, en effet plus le temps avance plus l'on acquiert de l'information.

Remarque 2.1.2 Une variable aléatoire est $\mathcal{F}_1$-mesurable si et seulement si elle est connue avec l'information donnée par $\mathcal{F}_1$, i.e. déterminée à l'instant 1. En effet, heuristiquement

Une variable aléatoire X est $\mathcal{F}_1$-mesurable

$\Leftrightarrow$ L'image réciproque de tout Borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{F}_1$;

$\Leftrightarrow$ Je peux dire en $t = 1$ pour tout Borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ si X est à valeur dans $\mathcal{B}$;

$\Leftrightarrow$ Je peux dire pour tout réel r si X est dans $] - \infty, r[$ ou pas ;

$\Leftrightarrow$ Je connais X à la date $t = 1$.

Remarque 2.1.3 $\mathcal{F}_1$ est la tribu engendrée par S_1 :

$$\boxed{\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)\ .}$$

En effet, par définition, la tribu engendrée par S_1 est l'image réciproque par S_1 des Boréliens de $\mathbb{R}$, i.e. $\{S_1^{-1}(\mathcal{B})\,, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. C'est la plus petite tribu qui rende S_1 mesurable. Pour tout Borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$,

– si uS_0 et dS_0 sont dans $\mathcal{B}$, on a $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \Omega$,
– si juste uS_0 est dans $\mathcal{B}$, on a $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega_u\}$,

- si juste dS_0 est dans $\mathcal{B}$, on a $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega_d\}$,
- et si aucun des 2 n'est dans $\mathcal{B}$, on a $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \emptyset$.

Donc $\mathcal{F}_1$ est bien la tribu engendrée par S_1, ce qui se réécrit :

"Connaître S_1 est équivalent à connaître tout élément $\mathcal{F}_1$-mesurable"

Définition 2.1.1 *Un **produit dérivé (ou actif contingent)** est une v.a. $\mathcal{F}_1$-mesurable.*

La valeur d'un produit dérivé dépend de l'état du monde réalisé à la date $t = 1$ et de manière équivalente, tout produit dérivé s'écrit comme une fonction mesurable ϕ de S_1.

Proposition 2.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors, Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si elle est de la forme $f(X)$ avec f une application mesurable (borélienne).*

Démonstration. Si $Y = f(X)$, alors, pour tout Borélien $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$, on a

$$f(X)^{-1}(\mathcal{B}) \;=\; X^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{B})\right) \in \sigma(X)\ .$$

Réciproquement, si Y est l'indicatrice d'un ensemble $\mathcal{A}$ qui est $\sigma(X)$-mesurable, on a :

$$Y \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \;=\; \mathbb{1}_{\mathcal{B}}(X) \quad \text{avec} \quad \mathcal{B} \;=\; X^{-1}(\mathcal{A})\ .$$

et $f = \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ convient. Si Y est une somme finie d'indicatrice $\mathbb{1}_{\mathcal{A}_i}$ avec $\mathcal{A}_i \in \sigma(X)$, la somme des $\mathbb{1}_{\mathcal{B}_i}$, où $\mathcal{B}_i = X^{-1}(\mathcal{A}_i)$, convient. Si Y est positive, elle s'écrit comme limite croissante de Y_n, sommes d'indicatrices qui donc s'écrivent $f_n(X)$ et $f = \overline{\lim} f_n$ convient. (cette fonction peut valoir $+\infty$ mais pas en des points atteints par X). Si Y est de signe quelconque, on la décompose en sa partie positive et sa partie négative et l'on approche les deux séparément. □

Par exemple, le call est donc un produit dérivé $\phi(S_1)$ avec $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - K)^+$

Notre problème est d'évaluer le prix à la date $t = 0$ d'un produit dérivé. On va donc essayer de créer un portefeuille de duplication de notre produit dérivé, i.e. une stratégie d'investissement autofinançante dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque. L'hypothèse d'AOA nous indiquera alors que ces deux stratégies qui ont même valeur en $t = 1$ ont même valeur en $t = 0$, ce qui nous donnera la valeur en 0 de notre produit dérivé.

2.2 Stratégie de portefeuille simple

Définition 2.2.1 *Une* ***stratégie de portefeuille simple*** $X^{x,\Delta}$ *est la donnée d'un capital initial* x *et d'une quantité d'actif risqué* Δ.

Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent. La stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date 0 de Δ actifs risqués et de $x - \Delta S_0$ actifs sans risque telle que la valeur en $t = 0$ du portefeuille est :

$$X_0^{x,\Delta} \;=\; \Delta S_0 + (x - \Delta S_0)\,1 = x\;.$$

Sa valeur en $t = 1$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} X_1^{x,\Delta} &= \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R \\ &= x\,R + \Delta(S_1 - S_0 R)\,. \end{aligned}$$

Cette stratégie est autofinançante car il n'y a ni d'apport ni de retrait d'argent à aucun instant entre $t = 0$ et $t = 1$. On l'appelle stratégie de portefeuille simple, car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l'actif sans risque et l'actif risqué.

Théorème 2.2.1 *Tout produit dérivé* C *est duplicable par une stratégie de portefeuille simple* (x, Δ) *(On dit que le marché est* ***complet****).*

Démonstration. Considérons un produit dérivé C. En $t = 1$, il prend la valeur C_1^u dans l'état "up" et C_1^d dans l'état "down". On cherche un couple (x, Δ) vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lll} C_1^u & = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R & = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d & = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R & = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{array}\right.$$

C'est un système inversible de deux équations à deux inconnues dont la solution est donnée par :

$$\Delta \;=\; \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)S_0}\;\left(=\;\frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}\right) \quad \text{et} \quad x \;=\; \frac{1}{R}\left(\frac{R - d}{u - d}C_1^u \;+\; \frac{u - R}{u - d}C_1^d\right)\;.$$

□

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, la définition économique du prix d'un produit dérivé en $t = 0$ est donc donnée par :

$$C_0 \;=\; \frac{1}{R}\left(\frac{R - d}{u - d}C_1^u \;+\; \frac{u - R}{u - d}C_1^d\right)\;.$$

Le prix du produit dérivé s'écrit comme une somme pondérée de ses valeurs futures. Etudions plus en détail comment s'exprime la valeur en $t = 0$ d'une stratégie de portefeuille simple en fonction de ses valeurs finales.

2.3 Probabilité risque neutre

Définition 2.3.1 *Une **opportunité d'arbitrage simple** est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en $t = 0$, est en $t = 1$ toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est la donnée de $\Delta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\boxed{X_1^{0,\Delta} \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}\left[X_1^{0,\Delta} > 0\right] > 0}$$

L' **absence d'opportunités d'arbitrage simple (AOA')** (sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit :

$$\boxed{\forall \Delta \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ X_1^{0,\Delta} \geq 0 \ \Rightarrow \ X_1^{0,\Delta} = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-p.s} \right\}}$$

Proposition 2.3.1 *L'hypothèse AOA' implique la relation $d < R < u$.*

Démonstration. Supposons $d \geq R$. Une stratégie d'arbitrage est alors donnée par l'achat d'un actif risqué en $t = 0$ ($\Delta = 1$) car la valeur du portefeuille en $t = 1$ est

- dans l'état "up", $X_1^{0,1} = S_0(u - R) > 0$,
- dans l'état "down", $X_1^{0,1} = S_0(d - R) \geq 0$.

Supposons $u \leq R$, alors une stratégie d'arbitrage est donnée par la vente d'un actif risqué en $t = 0$ ($\Delta = -1$). En effet, la valeur du portefeuille est

- dans l'état "up", $X_1^{0,-1} = S_0(R - u) \geq 0$,
- dans l'état "down", est $X_1^{0,-1} = S_0(R - d) > 0$.

□

Remarque 2.3.1 Pour créer un arbitrage, on a de nouveau acheté celui qui rapporte le plus et vendu celui qui rapporte le moins. Finalement, si l'une des inégalités dans $d < R < u$ n'était pas vérifiée, un des actifs rapporterait toujours plus que l'autre et l'hypothèse d'AOA' ne serait plus vérifiée.

Introduisons $\tilde{X}$, la **valeur actualisée** du portefeuille X définie pour $i = 0, 1$ par :

$$\boxed{\tilde{X}_i^{x,\Delta} \ := \ \frac{X_i^{x,\Delta}}{R^i} \, .}$$

On a alors $\tilde{X}_0^{x,\Delta} = x$ et $\tilde{X}_1^{x,\Delta} = \Delta \tilde{S}_1 + (x - \Delta S_0)$ et la condition d'autofinancement du portefeuille se réécrit en terme de valeurs actualisées de la manière suivante :

$$\boxed{\tilde{X}_1^{x,\Delta} - \tilde{X}_0^{x,\Delta} \ = \ \Delta(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0) \, .}$$

Définition 2.3.2 *On appelle **probabilité risque neutre** toute probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ qui rende martingale toute stratégie autofinançante simple actualisée , i.e. telle que :*

$$\tilde{X}_0^{x,\Delta} \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_1^{x,\Delta}] \quad \textit{ou de manière équivalente} \quad x \;=\; \frac{1}{R}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_1^{x,\Delta}]\,.$$

Remarque 2.3.2 Deux probabilités sont dites équivalentes lorsqu'elles ont les même ensembles négligeables, i.e. qu'elles chargent les mêmes états du monde. Ici, cela signifie simplement que $\mathbb{Q}(\omega_d) > 0$ et $\mathbb{Q}(\omega_u) > 0$.

Remarque 2.3.3 Dire que $\tilde{X}^{x,\Delta}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ signifie que l'espérance de ses valeurs futures est égale à elle même, autrement dit que ce portefeuille est un jeu équitable (nous verrons une définition plus générale de la notion de martingale au chapitre suivant).

Proposition 2.3.2 *Si $d < R < u$, alors il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Prenons un portefeuille autofinançant (x, Δ), et notons pour simplifier X_1^u et X_1^d ses valeurs en $t = 1$ dans les états "up" et "down". Alors, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_1^u & = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R & = xR + (u - R)\Delta S_0\,, \\ X_1^d & = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R & = xR + (d - R)\Delta S_0\,. \end{cases}$$

Nous obtenons le même système que précédemment, ce qui donne :

$$x \;=\; \frac{1}{R}\left(\frac{u-R}{u-d}\,X_1^d \;+\; \frac{R-d}{u-d}\,X_1^u\right)\,.$$

Introduisons donc la probabilité $\mathbb{Q}$ définie sur Ω par :

$$\mathbb{Q}(\omega_u) \;:=\; \frac{R-d}{u-d} \;:=\; q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(\omega_d) \;:=\; \frac{u-R}{u-d} \;=\; 1-q\,.$$

Comme $d < R < u$, $q \in]0, 1[$ et $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité et elle est équivalente à $\mathbb{P}$. Notre équation se réécrit alors :

$$X_0 \;=\; x \;=\; \frac{1}{R}\left(\mathbb{Q}(\omega_d)\,X_1^d \;+\; \mathbb{Q}(\omega_u)\,X_1^u\right) \;=\; \frac{1}{R}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_1^{x,\Delta}]\,.$$

□

Remarque 2.3.4 Le terme "risque neutre" provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. L'introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque, mais attention ce n'est pas le cas ! ! !

Proposition 2.3.3 *S'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, alors il y a AOA'.*

Démonstration. Soit $\Delta \in \mathbb{R}$ tel que $X_1^{0,\Delta} \geq 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque neutre, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1^{0,\Delta}] \;=\; R\,.\,0 \;=\; 0\,,$$

et $X_1^{0,\Delta}$ est une variable aléatoire positive d'espérance nulle donc elle est nulle $\mathbb{Q}$ p.s., et, comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes (elles ont les même négligeables), $\mathbb{P}(X_1^{0,\Delta} > 0) = 0$. □

Nous avons finalement montré que

$$AOA' \;\Rightarrow\; d < R < u \;\Rightarrow\; \text{il existe une proba risque neutre} \;\Rightarrow\; AOA'\,,$$

et donc toutes ces implications sont des équivalences :

$$\boxed{AOA' \;\Leftrightarrow\; d < R < u \;\Leftrightarrow\; \text{il existe une proba risque neutre}}$$

2.4 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable par une stratégie de portefeuille simple et que la valeur actualisée de toute stratégie de portefeuille simple est une martingale sous la probabilité risque neutre, en AOA, le prix du produit dérivé est donné par :

$$\boxed{C_0 \;=\; \frac{1}{R}\left(q\,C_1^d + (1-q)\,C_1^u\right) \;=\; \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_1]}$$

Remarque 2.4.1 La probabilité risque neutre n'est pas reliée aux probabilités historiques p de monter ou $1-p$ de descendre. Par conséquent

$$\boxed{\text{"Le prix d'une option ne dépend pas de la tendance réelle } p \text{ du sous-jacent"}}$$

Ceci s'explique en partie par le fait que le sous-jacent fait partie du portefeuille de duplication du produit dérivé.

Remarque 2.4.2 Comme tout produit dérivé est duplicable, la valeur éactualisée de tout produit dérivé est une martingale sous la probabilité risque neutre.

Remarque 2.4.3 On a juste besoin de connaître r, u et d, pour trouver le prix du produit dérivé, mais encore faut il estimer les paramètres. Connaître u et d revient a connaître ce que l'on nommera par la suite la volatilité de l'actif.

Remarque 2.4.4 Dans le portefeuille de couverture de l'option, la quantité d'actif risqué est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} \left(= \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right)$$

qui s'apparente à la variation du prix de l'option en réponse à la variation du prix du sous-jacent.

Proposition 2.4.1 *Comme le marché est complet (tout actif est duplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a* ***unicité de la probabilité risque neutre****.*

Démonstration. En effet, prenons deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$. Pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est un produit dérivé car il est $\mathcal{F}_1$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinançant (x, Δ) et on a

$$\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = Rx = \mathbb{E}_{Q_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = \mathbb{Q}_2(\mathcal{B}) .$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables. □

Exemple : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie
Prenons $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $d = 0.9$ et $u = 1.1$.
1. Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie i.e. $K = S_0 = 100$?
On construit la probabilité risque neutre :

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.75 .$$

On en déduit le prix et la stratégie de couverture :

$$C_0 = \frac{.75 \times 10 + .25 \times 0}{1.05} = \frac{7.5}{1.05} \sim 7.14 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{10-0}{20} = 0,5$$

$\Rightarrow$ stratégie : achat de $1/2$ actif risqué et placement de $(7.14 - 50)$ dans l'actif sans risque.
2. Qu'en est t-il du Put à la monnaie ?
Connaissant la probabilité risque neutre, on calcule le prix et la stratégie de couverture :

$$P_0 = \frac{.75 \times 0 + .25 \times 10}{1.05} = \frac{2.5}{1.05} \sim 2.38 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{P_1^u - P_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{0-10}{20} = -0,5$$

$\Rightarrow$ stratégie : vente de $1/2$ actif risqué et placement de $(50+2.38)$ dans l'actif sans risque.
3. Vérifie t'on la relation de parité call put ?

$$C_0 - P_0 \; = \; \frac{7.5}{1.05} - \frac{2.5}{1.05} \; = \; \frac{5}{1.05} \; = \; 100 - \frac{100}{1.05} \; = \; 100 - \frac{100}{R} \; = \; S_0 - KB(0,T)$$

$\square$

Chapitre 3

Modèle binomial à plusieurs périodes

L'etude de ce modèle, nommé également modèle de Cox Ross Rubinstein, va permettre de ré-obtenir des résultats similaires au cas du modèle à une période et à donner de bonnes intuitions sur les résultats que l'on obtiendra beaucoup plus difficilement dans l'étude des modèles en temps continu.

3.1 "Rappels" de probabilité : processus discret et martingale

Dans cette section, on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 3.1.1 *On appelle* ***processus discret*** *toute collection finie de variables aléatoires $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

Définition 3.1.2 *On appelle* ***filtration*** *toute collection croissante $(\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1} \subset \mathcal{A} ,$$

pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Définition 3.1.3 *Un processus discret $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$, est dit* ***adapté*** *à la filtration $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}$-adapté) si pour tout $k \leq n$, Y_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable.*

Proposition 3.1.1 *Si $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ est $\mathcal{F}$-adapté, la v.a. Y_i est $\mathcal{F}_k$-mesurable pour tout $i \leq k$.*

Démonstration. En terme d'information, si Y_i est connue avec l'information donnée par $\mathcal{F}_i$, elle sera connue avec l'information donnée par $\mathcal{F}_k \supset \mathcal{F}_i$. En effet, l'image réciproque de tout Borélien $\mathcal{B}$ par Y_i est dans $\mathcal{F}_i$ et donc dans $\mathcal{F}_k$. □

Définition 3.1.4 *La* ***filtration engendrée*** *par un processus discret $(Y_k)_{0\leq k\leq n}$ est la plus petite filtration qui rende ce processus $\mathcal{F}$-adapté. Par analogie avec les tribus engendrées,*

$$\mathcal{F}_k^Y \quad := \quad \sigma(Y_0, \ldots, Y_k)\,.$$

Remarque 3.1.1 Suite à une proposition vue dans le chapitre précédent, une variable aléatoire est $\mathcal{F}_k^Y$-mesurable si et seulement si elle s'écrit comme une fonction (borélienne) de $(Y_0, \ldots, Y_k)$.

Définition 3.1.5 *Un processus discret $(M_k)_{0\leq k\leq n}$ est une* ***$\mathcal{F}$-martingale*** *sous $\mathbb{P}$ s'il vérifie :*
- $\mathbb{E}[|M_k|] < \infty$ *pour tout* $k \in \{0, \ldots, n\}$,
- M *est $\mathcal{F}$-adapté,*
- $\mathbb{E}[M_{k+1}|\mathcal{F}_k] = M_k$ *pour tout* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Remarque 3.1.2 Si l'égalité précédente est remplacée par une inégalité on parle de **surmartingale** ($\leq$) ou de **sous-martingale** ($\geq$). Une martingale est un jeu équitable, une surmartingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant.

Remarque 3.1.3 Si M est une **$\mathcal{F}$-martingale** sous $\mathbb{P}$, alors,

$$\mathbb{E}[M_k|\mathcal{F}_i] \quad = \quad M_i\ ,$$

pour tout $i \leq k$ et en particulier, si $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, on a $\mathbb{E}[M_k] = M_0$ pour tout k.

3.2 Modélisation du marché

On reprend la même modélisation que dans le chapitre précédent mais dans un monde à n périodes. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Le marché est composé de 2 actifs,
- un **actif sans risque** S_t^0 :

$$1 \quad \to \quad (1+r) \quad \to \quad (1+r)^2 \quad \to \quad \ldots \quad \to \quad (1+r)^n$$

– et un **actif risqué** S_t :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & u^nS_0 \\
 & & & & & & & \nearrow\ \ddots & \\
 & & & & & & u^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & \iddots & & \searrow & \\
 & & & & u^2S_0 & & & & du^{n-1}S_0 \\
 & & & \nearrow & & \ddots & & & \\
 & & uS_0 & & & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & \iddots & & & \\
S_0 & & & & udS_0 & & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \ddots & & & \\
 & & dS_0 & & & & & & \\
 & & & \searrow & & \iddots & & & \\
 & & & & d^2S_0 & & & & d^{n-1}uS_0 \\
 & & & & & \ddots & & \nearrow & \\
 & & & & & & d^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & d^nS_0
\end{array}
$$

L'arbre est **recombinant** : à l'instant t_i, l'actif peut prendre $i+1$ valeurs différentes.

Ensemble des états du monde : Ω est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué. C'est l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ tel que chaque ω_i prenne deux valeurs possibles ω_i^d ou ω_i^u.

$$\Omega \quad := \quad \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \ : \quad \omega_i = \omega_i^d \text{ ou } \omega_i = \omega_i^u, \quad \forall i \leq n\}$$

On se donne une **probabilité historique** $\mathbb{P}$ de survenance de chacun des états du monde et l'on suppose que la probabilité de monter et de descendre est la même dans tout noeud de l'arbre, i.e.

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

pour tout i.

Hypothèse cruciale :

$$\boxed{\text{Les rendements } Y_i := \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \text{ sont indépendants.}}$$

Par indépendance des tirages, on en déduit donc :

$$\mathbb{P}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad = \quad p^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}.(1-p)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

et l'on peut écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant t_i comme :

$$S_{t_i} \quad = \quad S_0.\prod_{k=1}^{i} Y_k \, ,$$

avec les Y_k des variables aléatoires **indépendantes** sur Ω qui prennent la valeur u avec une probabilité p et la valeur d avec une probabilité $1-p$. Alors on a bien sûr :

$$\mathbb{P}(Y_i = u) \;=\; \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) \;=\; p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_i = d) \;=\; \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) \;=\; 1-p$$

L'information disponible à toute date t_i est donnée par la **filtration** $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$ définie par :

$$\mathcal{F}_{t_0} \quad = \quad \{\emptyset, \Omega\} \, ,$$

et

$$\mathcal{F}_{t_i} \quad := \quad \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_i) \;=\; \sigma(S_{t_0}, S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_i}) \, ,$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable est donc naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'à l'instant t_i. Elle s'écrit donc comme un fonction de $(S_{t_1}, \ldots, S_{t_i})$ ou de manière équivalente comme une fonction de $(Y_1, \ldots, Y_i)$.

Définition 3.2.1 *Un **produit dérivé** (ou actif contingent) C_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable et s'écrit donc sous la forme*

$$C_T \quad = \quad \phi(S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}) \, .$$

avec ϕ application borélienne.

On cherche comme précédemment à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé qui seront encore donnés par le capital initial et la stratégie de son portefeuille de duplication. Avant de montrer que l'actif est duplicable, étudions les propriétés des stratégies de portefeuille simple dans ce modèle.

3.3 Stratégie de portefeuille

Définition 3.3.1 *Une **stratégie de portefeuille simple** $X^{(x,\Delta)}$ est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_0, ..., \Delta_{n-1})$ qui est $\mathcal{F}$-adapté.*

La stratégie consiste à tout instant t_i en l'investissement dans une quantité Δ_i d'actif risqué. Le processus Δ est $\mathcal{F}$-adapté, car **la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant t_i est déterminée avec l'information accumulée jusqu'à l'instant t_i**.

Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent (**condition d'autofinancement**). Entre les instants t_i et t_{i+1} le portefeuille $X^{x,\Delta}$ est constitué d'une quantité Δ_i d'actif risqué et d'une quantité $(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})/(1+r)^i$ d'actif sans risque. La valeur du portefeuille à l'instant t_i est donc donnée par :

$$X^{x,\Delta}_{t_i} \;=\; \Delta_i \, \mathbf{S_{t_i}} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} \, (\mathbf{1+r})^{\mathbf{i}} \, .$$

Or, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1})$, le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :

$$X^{x,\Delta}_{t_{i+1}} \;=\; \Delta_i \, \mathbf{S_{t_{i+1}}} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} \, (\mathbf{1+r})^{\mathbf{i+1}}$$

Donc, en introduisant les **processus actualisés** :

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} := \frac{X^{x,\Delta}_{t_i}}{(1+r)^i} \;\text{ et }\; \tilde{S}_{t_i} := \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}},$$

ces deux relations se réécrivent :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} \;=\; \Delta_i \, \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{t_i}} + (\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i}) \, \mathbf{1} \, , \quad \text{et} \quad \tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} \;=\; \Delta_i \tilde{S}_{t_{i+1}} + (\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i}) \, .$$

Par différence, on obtient donc la relation que l'on appelle **relation d'autofinancement** :

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} - \tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} \;=\; \Delta_i(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i})},$$

qui se réécrit également :

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} \;=\; x + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})}.$$

Remarque 3.3.1 Le processus valeur du portefeuille $X^{x,\Delta}$ est bien sûr $\mathcal{F}$-adapté.

3.4 Arbitrage et probabilité risque neutre

Définition 3.4.1 *Une* ***opportunité d'arbitrage simple*** *est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en $t = 0$ est toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive en $t = T$. C'est donc la donnée d'un processus $\Delta = (\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1})$ qui est $\mathcal{F}$-adapté et satisfait*

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \quad et \quad \mathbb{P}\left[X_T^{0,\Delta} > 0\right] > 0 \, .$$

L' **absence d'opportunités d'arbitrage simple (AOA')** (sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit donc :

$$\boxed{\forall \Delta \text{ processus } \mathcal{F}\text{-adapté} \, , \qquad \left\{ \, X_T^{0,\Delta} \geq 0 \; \Rightarrow \; X_T^{0,\Delta} = 0 \qquad \mathbb{P} - p.s \, \right\}}$$

Proposition 3.4.1 *Sous l'hypothèse d'AOA', on a $d < 1 + r < u$.*

Démonstration. Supposons par exemple $1 + r \leq d$ et considérons la stratégie de portefeuille $(0, \Delta)$, où $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_i = 0$ pour $i \geq 1$: on achète l'actif risqué en t_0, on le revend en t_1 et on place le gain dans l'actif sans risque. Cette stratégie est $\mathcal{F}$-adaptée car déterministe et la valeur du portefeuille en T est donnée par :

$$\tilde{X}_T^{0,\Delta} \;\; = \;\; 0 + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) \;\; = \;\; \tilde{S}_{t_1} - \tilde{S}_{t_0}$$

Comme S_{t_1} peut prendre 2 valeurs, la valeur du portefeuille en T peut prendre 2 valeurs qui sont

$$(1+r)^n \, S_0 \left(\frac{u}{1+r} - 1 \right) \; > \; 0 \, , \quad \text{et} \quad (1+r)^n \, S_0 \left(\frac{d}{1+r} - 1 \right) \; \geq \; 0$$

avec respectivement des probabilités p et $1 - p$ toutes deux strictement positives si bien que notre stratégie crée un arbitrage. Le cas $u \leq 1 + r$ est traité similairement en vendant l'actif risqué ($\Delta_0 = -1$). □

Remarque 3.4.1 Comme dans le modèle à une période, si $R > u$ l'actif sans risque rapporte toujours plus que le l'actif risqué donc arbitrage, et si $R < d$, l'actif risqué rapporte toujours plus que l'actif sans risque, donc il y a arbitrage.

Remarque 3.4.2 En fait, **sous l'hypothèse AOA', il y a AOA' sur tous les sous-arbres**. Par contraposée, si il existe une stratégie d'arbitrage sur un sous arbre, il faut considérer la stratégie globale qui ne fait rien si elle ne croise pas le noeud de départ du sous-arbre, et qui utilise la stratégie gagnante jusqu'à la fin du sous arbre puis place les gains dans l'actif sans risque sinon. Comme la probabilité de passer par chaque noeud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.

En s'inspirant des résultats du modèle à une période, introduisons la **probabilité** $\mathbb{Q}$ **sur** Ω identique sur chaque sous arbre à une période à celle obtenue dans l'étude du modèle à une période. On définit donc $\mathbb{Q}$ de la manière suivante :

$$\mathbb{Q}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \;=\; q^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} . (1-q)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}} \quad \text{avec} \quad q \;:=\; \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Remarque 3.4.3 On a alors les relations suivantes :

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}) \;=\; \mathbb{Q}(Y_i = u) \;=\; q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}) \;=\; \mathbb{Q}(Y_i = d) \;=\; 1-q$$

Définition 3.4.2 *Une* ***probabilité risque neutre*** *est une probabilité équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple actualisée est martingale.*

On se propose de montrer que $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque neutre.

Proposition 3.4.2 *$\tilde{S}$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. $\tilde{S}$ est intégrable $\mathcal{F}$-adapté et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t_{k+1}} \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right] &= \frac{1}{1+r}\left(q\, u\tilde{S}_{t_k} + (1-q)\, d\tilde{S}_{t_k}\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\, u + \frac{u-(1+r)}{u-d}\, d\right)\tilde{S}_{t_k} \\
&= \tilde{S}_{t_k} \,.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.3 *La valeur actualisée $\tilde{X}^{x,\Delta}$ de toute stratégie de portefeuille simple (x, Δ) est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. $\tilde{X}^{x,\Delta}$ est intégrable $\mathcal{F}$-adapté et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\tilde{X}^{x,\Delta}_{k+1} - \tilde{X}^{x,\Delta}_{k}\big|\mathcal{F}_{t_k}\big] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})\big|\mathcal{F}_{t_k}\big] \;=\; \Delta_k\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})\big|\mathcal{F}_{t_k}\big] \;=\; 0\,.$$

□

Remarque 3.4.4 Ce résultat nous indique que si les actifs de base actualisés sont martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuilles simples le sont aussi. Ceci est du à la condition d'autofinancement et surtout au fait que **la quantité d'actif risqué entre t_k et t_{k+1} est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable**. (On dit que la valeur actualisée du portefeuille est une transformée de martingale). Donc, on vient de voir que :

"Tout actif de base actualisé est martingale sous une probabilité $\mathbb{Q}$"

$$\Updownarrow$$

"Toute stratégie de portefeuille simple actualisée est martingale sous une probabilité $\mathbb{Q}$"

Théorème 3.4.1 *Si $d < 1 + r < u$, il existe une probabilité risque neutre ($\mathbb{Q}$).*

Démonstration. Nous venons de voir que $\mathbb{Q}$ rendait toute stratégie de portefeuille simple actualisée est martingale. De plus $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité qui est équivalente à $\mathbb{P}$. En effet, comme $d < R < u$, q et $(1-q)$ sont dans $]0,1[$ et donc chaque $\mathbb{Q}(\omega_1,\dots,\omega_n)$ est dans $]0,1[$ et tous les états du monde ont une probabilité strictement positive d'arriver. □

La valeur à tout date t_i d'une stratégie de portefeuille simple de valeur finale $X^{x,\Delta}_T$ s'écrit :

$$\boxed{X^{x,\Delta}_{t_i} \;=\; \frac{1}{(1+r)^{n-i}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[X^{x,\Delta}_T\big|\mathcal{F}_i\big]}$$

Donc, si l'on arrive à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA, sa valeur à tout instant t_i sera donnée par l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son flux final actualisé. Avant cela, remarquons que l'existence d'une probabilité risque neutre va encore impliquer l'hypothèse AOA' comme dans le modèle à une période.

Proposition 3.4.4 *L'existence d'une probabilité risque neutre implique l'hypothèse AOA'.*

Démonstration. Exactement comme dans le cas du modèle à une période,

$$X^{0,\Delta}_T \geq 0 \;\text{ et }\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[X^{0,\Delta}_T\big] = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{Q}(X^{0,\Delta}_T = 0) = 1$$

donc $X^{0,\Delta}_T$ est nulle $\mathbb{Q}$-p.s. et donc $\mathbb{P}$-p.s. □

On a donc, comme dans le modèle à une période :

$$\boxed{AOA' \;\Leftrightarrow\; d < R < u \;\Leftrightarrow\; \text{il existe une probabilité risque neutre}}$$

3.5 Duplication d'un produit dérivé

Théorème :

$$\boxed{\text{Tout produit dérivé } C \text{ est duplicable par une stratégie de portefeuille simple } (x, \Delta)}$$

Le marché est dit **complet**.

ANALYSE DU PROBLEME

Nous recherchons une stratégie de portefeuille simple de duplication (x, Δ) de notre produit dérivé de valeur C_T en T. Comme C_T est $\mathcal{F}_{t_n}$-adapté, la valeur du produit dérivé se réécrit $\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$ et on cherche donc (x, Δ) tel que :

$$X_{t_n}^{x,\Delta} \;=\; \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

Comme nous venons de le voir, toute stratégie de portefeuille simple est martingale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ donc la valeur $X_{t_k}^{x,\Delta}$ du portefeuille de duplication satisfait :

$$X_{t_k}^{x,\Delta} \;=\; \frac{1}{(1+r)^{n-k}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right]$$

Donc, la richesse initiale x de notre portefeuille de duplication est nécessairement :

$$x \;:=\; \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})\right]$$

Remarquons que $\frac{1}{(1+r)^{n-k}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})|\mathcal{F}_{t_k}]$, en tant que variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable, se réécrit sous la forme $V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$ avec V_k une fonction déterministe (i.e. non aléatoire). On note donc :

$$V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) \;:=\; \frac{1}{(1+r)^{n-k}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})\middle|\mathcal{F}_{t_k}\right]$$

Dans le calcul du portefeuille à une période, nous avions vu que la quantité d'actif risqué du portefeuille de duplication s'apparentait à la variation de la valeur du produit dérivé en réponse à la variation du sous-jacent. Nous proposons donc le processus de couverture Δ défini pour $k \in \{1, \dots, n\}$ par :

$$\Delta_k \;:=\; \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u.S_{t_k}) \;-\; V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d.S_{t_k})}{u.S_{t_k} - d.S_{t_k}}.$$

L'investissement initial x est déterministe et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, Δ_k est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable en tant que fonction de $(S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$. Donc Δ est $\mathcal{F}$-adapté et (x, Δ) définit bien une stratégie de portefeuille simple.

RESOLUTION DU PROBLEME

On se propose donc de montrer que la stratégie de portefeuille (x, Δ) définie précédemment duplique notre produit dérivé, soit : $X_{t_n}^{x,\Delta} = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = V_n(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$.
Pour cela, montrons, par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$, la relation :

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) \tag{3.5.1}$$

• Par définition de x (3.5.1) est vraie pour $k = 0$.

• Supposons (3.5.1) est vraie au rang k et montrons la au rang $k + 1$.

On cherche d'abord a établir le lien entre les fonction V_k et V_{k+1}. Par définition de V_k nous avons

$$\begin{aligned}
V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) &= \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \Big| \mathcal{F}_{t_k} \right] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{(1+r)^{n-(k+1)}} \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \Big| \mathcal{F}_{t_{k+1}} \right] | \mathcal{F}_{t_k} \right] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big[V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_{k+1}}) \Big| \mathcal{F}_{t_k} \Big] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \Big[V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u\, S_{t_k})\, \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} \\
&\qquad + V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d\, S_{t_k})\, \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=d\}} \Big| \mathcal{F}_{t_k} \Big] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \Big\{ \mathbb{Q}(Y_{k+1} = u).V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u\, S_{t_k}) \\
&\qquad + \mathbb{Q}(Y_{k+1} = d).V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d\, S_{t_k}) \Big\} \\
&= \frac{1}{(1+r)} \Big\{ q.V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u\, S_{t_k}) + (1-q).V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d\, S_{t_k}) \Big\} .
\end{aligned}$$

Revenons à l'expression de notre portefeuille en $t_k + 1$. La condition d'autofinancement du portefeuille s'écrit :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = \tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) .$$

En "désactualisant", on obtient donc

$$
\begin{aligned}
X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} \;&=\; q.V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},u\,S_{t_k}) \;+\; (1-q).V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},d\,S_{t_k}) +\\
&\quad \frac{V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},u\,S_{t_k}) \;-\; V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},d\,S_{t_k})}{u\,S_{t_k}-d\,S_{t_k}}\big(S_{t_{k+1}}-(1+r)S_{t_k}\big)\;.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $S_{t_{k+1}}$ par $Y_{k+1}\,S_{t_k}$ et q par $\frac{1+r-d}{u-d}$, on en déduit

$$
X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} \;=\; V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},u\,S_{t_k})\,\frac{Y_{k+1}-d}{u-d} \;+\; V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},d\,S_{t_k})\,\frac{u-Y_{k+1}}{u-d}\;.
$$

Comme Y_{k+1} ne prend que les valeurs d ou u, on vérifie alors

$$
X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} \;=\; V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},Y_{k+1}\,S_{t_k}) \;=\; V_{k+1}(S_{t_1},\ldots,S_{t_k},S_{t_{k+1}})\,,
$$

ce qui conclut la récurrence et donc la preuve. □

3.6 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable, on en déduit que, sous AOA, la valeur à tout instant t_k d'un produit dérivé $C_T \;:=\; \phi(S_{t_1},\ldots,S_{t_n})$ est donnée par

$$
C_{t_k} \;=\; \frac{1}{(1+r)^{n-k}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\phi(S_{t_1},\ldots,S_{t_n})\big|\mathcal{F}_{t_k}\big]\,,
$$

et, en particulier, son prix en 0 est donné par

$$
C_0 \;=\; \frac{1}{(1+r)^{n}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\phi(S_{t_1},\ldots,S_{t_n})\big]\,.
$$

Proposition 3.6.1 *Comme le marché est complet (tout actif est duplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a* ***unicité de la probabilité risque neutre****.*

Démonstration. Comme dans le modèle à une période, prenons deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$. Pour tout $\mathcal{B}\in\mathcal{F}_1=\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est un produit dérivé car il est $\mathcal{F}_1$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinançant (x,Δ) et l'on a

$$
\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] \;=\; Rx \;=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] \;=\; \mathbb{Q}_2(\mathcal{B})\,.
$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables. □

Remarque 3.6.1 Comme dans le modèle à une période, le prix de l'actif ne dépend que de la forme du payoff, de u, r et d. Donc **le prix de dépend pas de la probabilité réelle p qu'a le prix de monter ou de descendre !**

Remarque 3.6.2 Nous avons également déterminé le portefeuille de couverture qui permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option. **La quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille de couverture s'interprète de nouveau comme la variation du prix de l'option en réponse à une variation du cours du sous-jacent**. En temps continu, on obtiendra naturellement le portefeuille de duplication comme dérivée de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.

Comment utiliser ce type d'arbre dans la pratique ? Si nous considérons un produit dérivé dont la valeur ne dépend que de la valeur finale, on peut calculer sa valeur sur chacun des noeuds à maturité. On revient alors progressivement en arrière dans l'arbre pour passer de ses valeurs aux noeuds de l'instant t_{i+1} à ses valeurs aux noeuds de l'instant t_i en actualisant sous la probabilité risque neutre. L'intérêt d'utiliser un arbre recombinant à n périodes et que l'on a seulement $n+1$ valeurs possible en T au lieu de 2^n si l'arbre n'était pas recombinant. Pour connaître son prix en 0, on doit donc faire $\mathbf{n}!$ calculs au lieu de $2^n \times 2^{n-1} \times \ldots \times 2 = \mathbf{2^{n(n+1)/2}}$. Pour $n = 10$ par exemple on obtient 11 valeurs possibles et $11! \sim 4 \times 10^7$ avec un **arbre recombinant**, et 2048 valeurs possibles soit 7×10^{19} calculs sinon.

A RETENIR :
- Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.
- La probabilité risque neutre rend les actifs actualisés martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple actualisées martingales.

Si l'on fait tendre le nombre n de périodes vers l'infini, et pour un choix judicieux de la forme de u et d, ce modèle converge vers un modèle en temps continu appelé modèle de Black-Scholes (cf TD). Afin de manipuler des objets similaires en temps continu, il nous faut développer la théorie des processus en temps continu que l'on appelle calcul stochastique.

Chapitre 4

Options américaines dans le modèle binomial

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'une classe de produits dérivés où le détenteur du contrat associé peut choisir le temps d'exercice de son option. Nous aurons donc besoin de modéliser les temps d'intervention, ce qui sera possible grâce à la notion de temps d'arrêt. Nous introduirons ensuite l'enveloppe de Snell qui nous permettra de résoudre le problème d'arrêt optimal. Enfin nous appliquerons ces notions à l'étude des options américaines.

Dans toute ce chapitre, nous fixons un expace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_k)_{0\leq k\leq n}, \mathbb{P})$, que nous préciserons en dernière section.

4.1 Notion de temps d'arrêt en temps discret

Définition 4.1.1 *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeurs dans l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$ et telle que*

$$\big\{\tau = k\big\} \quad \in \quad \mathcal{F}_k \ ,$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Remarque 4.1.1 Une définition équivalente est la suivante : τ est un temps d'arrêt si et seulement si

$$\big\{\tau \leq k\big\} \quad \in \quad \mathcal{F}_k \ ,$$

pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. C'est cette définition qui sera utilisée dans le cas des processus en temps continu.

Nous introduisons maintenant un objet qui nous permettra de modéliser la décision d'exercice d'une option américaine par son détenteur à un instant aléatoire. Il s'agit de la notion de processus arrêté.
Dans la suite, nous notons $a \wedge b$ le minimum entre deux réels a et b.

Définition 4.1.2 *Soit $X = (X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k \leq n}$ et τ un temps d'arrêt. Le processus X arrêté en τ, noté $X^\tau = (X_k^\tau)_{0 \leq k \leq n}$ est défini par*

$$X_k^\tau(\omega) \quad = \quad X_{\tau(\omega) \wedge k}(\omega)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et tout $\omega \in \Omega$.

Cela signifie que sur l'ensemble $\{\tau = j\}$ nous avons

$$X_k^\tau = \begin{cases} X_k & \text{si} \quad k \leq j \ , \\ X_j & \text{si} \quad k > j \ , \end{cases}$$

pour tous entiers $j, k \in \{0, \dots, n\}$. Il nous faut vérifier que ce nouvel objet satisfait la condition de non anticipation de l'information future.

Proposition 4.1.1 *Soit $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ un processus adapté et τ un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté $(X_k^\tau)_{0 \leq k \leq n}$ est lui aussi adapté. Si de plus $(X_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une martingale (resp. surmartingale, sousmartingale) alors $(X_k^\tau)_{0 \leq k \leq n}$ est aussi une martingale (resp. surmartingale, sousmartingale).*

Démonstration. Remarquons que

$$X_k^\tau \quad = \quad X_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\tau \geq j}(X_j - X_{j-1}) \ , \tag{4.1.1}$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. D'après la remarque 4.1.1 et puisque $\{\tau \geq j\}$ est le complémentaire de $\{\tau \leq j-1\}$, nous obtenons que $\mathbb{1}_{\tau \geq j}$ est $\mathcal{F}_{j-1}$-mesurable, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, ce qui nous donne d'après (4.1.1) la $\mathcal{F}_k$-mesurabilité de X_k^τ.

Supposons que X est une martingale. Nous notons que d'après $(4.1.1)$, X_k^τ est intégrable en tant que combinaison linéaire de variables aléatoires intégrable et de variables aléatoires bornés. Nous avons alors toujours d'après (4.1.1)

$$\mathbb{E}\big[X_k^\tau | \mathcal{F}_{k-1}\big] \quad = \quad \mathbb{E}\big[X_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\tau \geq j}(X_j - X_{j-1}) | \mathcal{F}_{k-1}\big] \ .$$

Puisque $\mathbb{1}_{\tau\geq j}$ est $\mathcal{F}_{j-1}$-mesurable, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ et X est une martingale, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[X_k^\tau|\mathcal{F}_{k-1}\big] &= X_0+\sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{1}_{\tau\geq j}(X_j-X_{j-1})+\mathbb{1}_{\tau\geq k}(\mathbb{E}\big[X_k|\mathcal{F}_{k-1}\big]-X_{k-1})\\
&= X_0+\sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{1}_{\tau\geq j}(X_j-X_{j-1})\\
&= X_{k-1}^\tau\ .
\end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique pour montrer que X^τ est une surmartingale ou une sous-martingale. □

4.2 Arrêt optimal et enveloppe de Snell

Nous nous intéressons dans cette section à un problème d'optimisation permettant de modéliser le choix du détenteur d'une option américaine. Il s'agit du problème d'arrêt optimal.

Pour un processus adapté donné $(X_k)_{0\leq k\leq n}$, le problème d'arrêt optimal consiste à calculer la quantité

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\big[X_\tau\big]\ , \tag{4.2.1}$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt, ainsi qu'à trouver un temps d'arrêt τ^* tel que

$$\mathbb{E}\big[X_{\tau^*}\big] = \sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\big[X_\tau\big]\ .$$

Un tel temps d'arrêt τ^* est alors appelé temps d'arrêt optimal.

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, nous allons introduire un objet appelé enveloppe de Snell.

Définition 4.2.1 *L'enveloppe de Snell d'un processus adapté et intégrable $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ est le processus $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par les relations de récurrence suivantes*

$$U_n = X_n$$

et

$$U_k = \max\big\{X_k,\mathbb{E}\big[U_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\big]\big\}$$

pour tout $k\in\{0,\ldots,n-1\}$.

Proposition 4.2.1 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus adapté et intégrable. Son enveloppe de Snell $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ est une surmartingale. La variable aléatoire τ^* définie par*

$$\tau^* \quad = \quad \inf\{k \geq 0 \mid U_k = X_k\} \tag{4.2.2}$$

est un temps d'arrêt et le processus arrêté $(U_k^{\tau^*})_{0\leq k\leq n}$ est une martingale.

Démonstration. Notons tout d'abord que le processus U est majoré par la variable aléatoire $\sup_{0\leq k\leq n}|X_k|$ qui est intégrable puisque le processus X est intégrable. Nous en déduisons que U est intégrable. De plus, par définition, U est bien adapté. D'après la definition de l'enveloppe de Snell, nous avons alors

$$U_k \quad \geq \quad \mathbb{E}\big[U_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\big] \ ,$$

U est donc une surmartingale.
Montrons que τ^* est un temps d'arrêt. Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ nous avons

$$\{\tau^* = k\} \quad = \quad \{U_0 > X_0\} \cap \cdots \cap \{U_{k-1} > X_{k-1}\} \cap \{U_k = X_k\} \ ,$$

ce qui nous donne $\{\tau^* = k\} \in \mathcal{F}_k$ et τ^* est bien un temps d'arrêt.
Montrons que U^{τ^*} est une martingale. Pour cela, nous écrivons

$$U_k^{\tau^*} \quad = \quad U_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\tau^*\geq j}(U_j - U_{j-1}) \ ,$$

ce qui nous donne

$$U_{k+1}^{\tau^*} - U_k^{\tau^*} \quad = \quad \mathbb{1}_{\{\tau^*\geq k+1\}}(U_{k+1} - U_k) \ . \tag{4.2.3}$$

Puisque $U_k > X_k$ sur $\{\tau^* \geq k+1\}$ et $U_k = \max\{X_k, \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$, nous obtenons $U_k = \mathbb{E}[U_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ sur $\{\tau^* \geq k+1\}$. En prenant l'espérance conditionnellement à $\mathcal{F}_k$ dans (4.2.3), nous obtenons

$$\mathbb{E}\big[U_{k+1}^{\tau^*}\big|\mathcal{F}_k\big] \quad = \quad U_k^{\tau^*} \ ,$$

et U^{τ^*} est une martingale. □

Ces propriétés de l'enveloppe de Snell nous permettent d'exhiber un temps d'arrêt optimal pour le problème (4.2.1).

Corollaire 4.2.1 *Le temps d'arrêt τ^* défini en* (4.2.2) *est optimal pour le problème* (4.2.1). *De plus l'enveloppe de Snell $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ du processus $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ satisfait*

$$U_0 \;=\; \mathbb{E}\big[X_{\tau^*}\big] \;=\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\big[X_\tau\big] \;.$$

Démonstration. Soit τ un temps d'arrêt. D'après les propositions 4.1.1 et 4.2.1, le processus arrêté U^τ est une surmartingale, ce qui nous donne

$$U_0 \;\geq\; \mathbb{E}\big[U_\tau\big] \;\geq\; \mathbb{E}\big[X_\tau\big] \;.$$

τ étant arbitraire, nous obtenons

$$U_0 \;\geq\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\big[X_\tau\big] \;. \tag{4.2.4}$$

En utilisant le fait que U^{τ^*} est une martingale nous avons par définition de τ^*

$$U_0 \;=\; U_0^{\tau^*} \;=\; \mathbb{E}\big[U_n^{\tau^*}\big] \;=\; \mathbb{E}\big[U_{\tau^*}\big] \;=\; \mathbb{E}\big[X_{\tau^*}\big] \;,$$

ce qui nous donne avec (4.2.4) le résultat. □

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour un temps d'arrêt à l'aide de l'enveloppe de Snell.

Théorème 4.2.1 *Soit $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ un processus adapté et intégrable et $(U_k)_{0\leq k\leq n}$ son enveloppe de Snell. Un temps d'arrêt τ est optimal pour le problème* (4.2.1) *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$X_\tau \;=\; U_\tau \;,$$

et le processus arrêté $(U_k^\tau)_{0\leq k\leq n}$ est une martingale.

Démonstration. Fixons un temps d'arrêt τ. Supposons que le processus arrêté U^τ est une martingale et que $X_\tau = U_\tau$. Nous obtenons alors $U_0 = \mathbb{E}\big[U_\tau\big] = \mathbb{E}\big[X_\tau\big]$, ce qui nous donne l'optimalité de τ d'après le corollaire 4.2.1.

Réciproquement, soit τ un temps d'arrêt optimal. Nous obtenons

$$U_0 \;=\; \mathbb{E}\big[X_\tau\big] \;\leq\; \mathbb{E}\big[U_\tau\big] \;,$$

mais puisque U^τ est une surmartingale, nous avons $\mathbb{E}[U_\tau] \leq U_0$, ce qui nous donne

$$\mathbb{E}\big[U_\tau\big] \;=\; \mathbb{E}\big[X_\tau\big] \;.$$

De cette dernière égalité et du fait que que $U_\tau \geq X_\tau$, nous obtenons $U_\tau = X_\tau$. D'autre part, pusique U^τ est une surmartingale, nous déduisons de l'égalité $U_0 = \mathbb{E}\big[U_\tau\big]$ que

$$U_k^\tau \;=\; \mathbb{E}\big[U_{k+1}^\tau\big|\mathcal{F}_k\big]\ ,$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et U_τ est bien une martingale. □

4.3 Evaluation des options américaines

Nous reprenons l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_{t_k})_{0\leq k\leq n}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ainsi que modèle binomial à n périodes présentés au chapitre précédent et que nous rappelons brièvement. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. Le marché est composé de 2 actifs,
• un **actif sans risque** S^0 de prix initial $S_0^0 = 1$ et dont la dynamique est donnée par $S_{t_{k+1}}^0 = (1+r)S_{t_k}^0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,
• un **actif risqué** S de prix initial $S_0 > 0$ et dont la dynamique est donnée par $S_{t_{k+1}} = Y_{k+1}S_{t_k}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ où $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite de variable aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées de loi

$$\mathbb{P}(Y_k = u) \;=\; p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_k = d) \;=\; 1-p\ ,$$

où u et d sont deux réels tels que $u > 1+r > d > 0$. Sous ces conditions, il existe une unique probabilité neutre au risque notée $\mathbb{Q}$ sous laquelle les variables aléatoires Y_k sont $i.i.d.$ de loi

$$\mathbb{Q}(Y_k = u) \;=\; \frac{1+r-d}{u-d} \;=:\; q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(Y_k = d) \;=\; \frac{u-1+r}{u-d} \;=:\; 1-q\ .$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour une fonction mesurable h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une option américaine de gain h est un contrat permettant à son détenteur d'obtenir le gain $h(S_{t_k})$ à une date t_k qu'il peut choisir. Etant donné qu'à la date choisie, le détenteur du contrat ne dispose d'information que sur le présent et le passé, la date d'exercice de l'option peut être modélisée comme un temps d'arrêt τ. Il s'agit donc de choisir un temps d'arrêt τ qui lui garantira au temps τ le gain $h(S_\tau)$.

Evaluation des options américaines La valeur d'une option amércaine de gain h est donnée par

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\frac{h(S_\tau)}{S_\tau^0}\Big]$$

L'explication de ce résultat est la suivante : si on savait que le détenteur de l'option exercera au temps d'arrêt τ, alors la valeur de l'option serait égale à la valeur de l'option européenne correspondante de maturité τ soit $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{h(S_\tau)}{S^0_\tau}\right]$. Mais, l'émetteur de l'option ne sait pas quand le détenteur va l'exercer et va charger le prix au maximum parmi tous les exercices possibles. De manière similaire, le détenteur veut exercer l'option à la date qui lui permet d'obtenir la plus haute valeur, ce qui donne le prix indiqué.

Ceci conduit à introduire le processus U qui est l'enveloppe de Snell du processus X donné par

$$X_k \;=\; \frac{h(S_{t_k})}{S^0_{t_k}}\;, \quad k \;=\; 0,\dots,n\;.$$

Le processus $\tilde{U}$ est alors défini par

$$U_n = \frac{h(S_{t_n})}{S^0_{t_n}}\;,$$

et

$$U_k \;=\; \max\left\{\frac{h(S_{t_k})}{S^0_{t_k}}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\tilde{U}_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\big]\right\}\;,$$

pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

Calcul de l'enveloppe de Snell U.

Proposition 4.3.1 *L'enveloppe de Snell U est donnée par $U_k = v(k, S_{t_k})$ où la fonction v est définie de manière récursive par*

$$v(n,x) \;=\; \frac{h(x)}{(1+r)^n}\;,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$v(k,x) \;=\; \max\left\{\frac{h(x)}{(1+r)^k}, qv(k+1,ux) + (1-q)v(k+1,dx)\right\}\;,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$.

Démonstration. Nous montrons par récurrence descendante que

$$U_k \;=\; v(k, S_{t_k}) \quad \text{pour tout } \; k \in \{0,\dots,n\}\;.$$

D'après la définition de $v(n,.)$ il est clair que $U_n = v(n, S_{t_n})$.

Fixons $k \in \{1, \dots, n\}$ et supposons que $U_{k+1} = v(k+1, S_{t_{k+1}})$. D'après la définition de U_k et la loi de $S_{t_{k+1}}$ sous $\mathbb{Q}$, nous avons

$$\begin{aligned} U_k &= \max\left\{\frac{h(S_{t_k})}{(1+r)^k}\ ,\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[v(k+1, S_{t_{k+1}})\big|\mathcal{F}_k\big]\right\} \\ &= \max\left\{\frac{h(S_{t_k})}{(1+r)^k}\ ,\ v(k+1, uS_{t_k}) + (1-q)v(k+1, dS_{t_k})\right\} \\ &= v(k, S_{t_k})\ . \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang k et est donc vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. □

Rappelons que, d'après le corollaire 4.2.1, un temps optimal d'exercice, pour le détenteur de l'option, est donné par

$$\tau^* = \inf\left\{t_k \mid U_k = \frac{h(S_{t_k})}{(1+r)^k}\right\}\ ,$$

qui est connu une fois le processus U calculé.

Chapitre 5

Calcul stochastique

Dans toute la suite on se place sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

5.1 Processus et Martingale

5.1.1 Processus

Définition 5.1.1 *Un* ***processus (aléatoire)*** X *sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est une famille de v.a. aléatoires* $(X_t)_{t\in[0,T]}$*. C'est donc une fonction de 2 variables :*

$$X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

Remarque 5.1.1 La variable $t \in [0,T]$ représente le temps mais on aurait pu également prendre $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^2$... De même, l'espace d'arrivée pourrait être bien plus complexe que $\mathbb{R}$.

Remarque 5.1.2 On peut voir un processus comme une fonction qui à $\omega \in \Omega$ associe une fonction de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto X_t(\omega)$, appelée **trajectoire** du processus.

Définition 5.1.2 *On dit que* X *est un* ***processus continu (p.s.)*** *si il est continu trajectoire par trajectoire, i.e.* $t \mapsto X_t(\omega)$ *est* C^0 *pour presque tout* $\omega \in \Omega$*.*

5.1.2 Espaces $\mathcal{L}^p$

Notation : Pour tout $p \in \mathbb{R}^+$, nous noterons :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \ := \ \left\{X \text{ v.a. t.q. } \|X\|_p \ := \ \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega,[0,T]) \;:=\; \Big\{(\theta_s)_{0\le s\le T} \text{ processus } \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{A}\text{-mesurable t.q.}$$
$$\|\theta\|_p' \;:=\; \mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_s|^p ds\right]^{1/p} < \infty\Big\}$$

Proposition 5.1.1 *Pour $p \ge 1$ les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_p$ et $\mathcal{L}^p(\Omega,[0,T])$ muni de $\|\cdot\|_p'$ sont des espaces de Banach (i.e. complets).*

Nous passerons sur la démonstration mais vous avez déja vu que l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ était complet et $\mathcal{L}^p(\Omega,[0,T])$ l'est également pour les même raisons. Au lieu de considérer des fonctions d'une variable ω, il suffit de considérer des fonctions de deux variables (t,ω). □

5.1.3 Filtration

Définition 5.1.3 *Une **Filtration** $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est une collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, i.e.*

$$\mathcal{F}_s \;\subset\; \mathcal{F}_t \;\subset\; \mathcal{A}$$

pour tous $s,t \in [0,T]$ tels que $s \le t$.

Remarque 5.1.3 $\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps.

Définition 5.1.4 *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit $\mathcal{F}$**-adapté** si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \in [0,T]$.*

Proposition 5.1.2 *Si X est $\mathcal{F}$-adapté, la v.a. X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \in [0,t]$ et tout $t \in [0,T]$.*

Démonstration. Le résultat est naturel lorsque l'on raisonne en terme d'information, la tribu $\mathcal{F}_t$ est plus grande que la tribu $\mathcal{F}_s$, donc, si X_s est connue avec l'information $\mathcal{F}_s$, il l'est avec l'information $\mathcal{F}_t$. Maintenant, analytiquement, soit $\mathcal{B}$ un Borélien de $\mathbb{R}$, alors l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par X_s, $X_s^{-1}(\mathcal{B})$ est un élément de $\mathcal{F}_s$ et est donc un élément de $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s$. □

Définition 5.1.5 *La **filtration engendrée** par un processus X, notée $\mathcal{F}^X$ est la suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ engendrées par $(X_t)_{t\in[0,T]}$ i.e.,*

$$\mathcal{F}_t^X \;=\; \sigma(X_s, s \le t)$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque 5.1.4 $\mathcal{F}^X$ est la plus petite filtration qui rend X adapté.

Une tribu est dite complète lorsqu'elle contient l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui est défini par

$$\mathcal{N} \;:=\; \{N \subset \Omega \, , \, \exists A \in \mathcal{A} \, / \, N \subset A \, , \, \mathbb{P}(A) = 0\}$$

Définition 5.1.6 *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ est* **complète** *lorsque $\mathcal{F}_t$ est complète pour tout $t \in [0, T]$ (ce qui équivaut à $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$).*

Remarque 5.1.5 Pour compléter une filtration $\mathcal{F}$, il suffit de remplacer $\mathcal{F}_t$ par $\sigma(A \cup N \, , (N, A) \in \mathcal{N} \times \mathcal{F}_t)$ pour tout $t \in [0, T]$. La filtration complétée engendrée par un processus X est généralement appelée **filtration naturelle** du processus.

Si $\mathcal{F}$ est complète et X et Y sont deux processus, **à t fixé**, on a

$$X_t \;=\; Y_t \quad p.s. \;\; \Longrightarrow \;\; \Big[X_t \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \;\Leftrightarrow\; Y_t \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\Big] \, .$$

On montre alors que, si $\mathcal{F}$ est complète et $(X^n)_{n \geq 0}$ une suite de processus, alors, toujours à t fixé :

$$\Big[X_t^n \xrightarrow{p.s.} X_t \text{ et } \; X_t^n \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable pour tout } n \geq 0\Big] \;\; \Longrightarrow \;\; \Big[X_t \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\Big] \, .$$

Le résultat reste vrai pour une convergence dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ avec $p \geq 1$, car on peut alors extraire un sous suite qui converge p.s. vers la même limite et donc la limite reste mesurable :

$$\Big[X_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X_t \quad \text{et} \quad \forall n \; X_t^n \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\Big] \;\; \Longrightarrow \;\; \Big[X_t \;\text{ est }\; \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\Big] \, .$$

Dans toute la suite, nous allons considérer des filtrations complètes
et parlerons donc de filtration naturelle de processus.

5.1.4 Martingale

Définition 5.1.7 *Un processus aléatoire $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ est une **$\mathcal{F}$-martingale** (resp. **$\mathcal{F}$-sur-martingale** et une **$\mathcal{F}$-sous-martingale**) si*

(i) M est $\mathcal{F}$-adapté,

(ii) $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, pour tout $t \in [0, T]$,

(iii) $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ *pour tout* $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$.

Un processus M *est une* $\mathcal{F}$***-sur-martingale*** *(resp. une* $\mathcal{F}$***-sous-martingale****) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et* $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$ *(resp.* $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$*) pour tout* $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$.

Remarque 5.1.6 Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant.

Proposition 5.1.3 *Toute martingale* M *vérifie*

$$\mathbb{E}[M_t] \;=\; \mathbb{E}[M_0] \,,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. On a $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout $t \in [0, T]$. □

Proposition 5.1.4 *Soit* M *une* $\mathcal{F}$*-martingale et* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* **convexe** *mesurable, alors si* $\phi(M_t) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *pour tout* $t \in [0, T]$*,* $\Phi(M) = (\phi(M_t))_{t\in[0,T]}$ *est une sous-martingale.*

Démonstration. $\phi(M)$ est intégrable et adapté et l'inégalité de Jensen conditionelle nous donne :

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)|\mathcal{F}_s] \;\geq\; \phi(\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]) \;=\; \phi(M_s) \,,$$

pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$. □

Proposition 5.1.5 *Soit* M *une* $\mathcal{F}$*-martingale de carré intégrable (i.e.* $\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty$ *pour tout* $t \in [0, T]$*), alors*

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s] \,,$$

pour tout $s, t \in [0, T]$ *tels que* $s \leq t$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_t - M_s|^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[|M_t|^2|\mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[|M_s|^2|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[|M_t|^2|\mathcal{F}_s] - 2M_s\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] + |M_s|^2 \\
&= \mathbb{E}[|M_t|^2 - |M_s|^2|\mathcal{F}_s]
\end{aligned}$$

On retrouve donc que $|M|^2$ est une $\mathcal{F}$-sous-martingale. □

Proposition 5.1.6 ***Stabilité $\mathcal{L}^p$ des martingales***
Soit $p \geq 1$ et $(M^n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{F}$-martingales, telles que $M_t^n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ pour tout $n \geq 0$ et $t \in [0,T]$.
Si la v.a. M_t^n converge vers la v.a M_t dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour tout t dans $[0,T]$, alors le processus limite M est une $\mathcal{F}$-martingale et $M_t \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Il faut montrer 3 choses :
(1) M est $\mathcal{F}$-adapté ;
(2) pour tout $t \in [0,T]$, $M_t \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ (alors $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$) ;
(3) pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a : $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.
(1) Pour tout n, M_t^n est $\mathcal{F}_t$-mesurable, donc M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable (car la filtration $\mathcal{F}$ est complète).
(2) Pour tout t fixé, M_t^n converge vers M_t dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$, donc M_t est dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$.
(3) Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|M_s^n - \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]\|_p & = & \|\mathbb{E}[M_t^n - M_t|\mathcal{F}_s]\|_p \\ & \leq & \|M_t^n - M_t\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \end{array}$$

Or $M_s^n - \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ converge vers $M_s - \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$, d'où $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$. □

5.1.5 Processus gaussien

Définition 5.1.8 *Un vecteur de v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ est un* ***vecteur gaussien*** *si et seulement si toute combinaison linéraire des X_i est gaussienne i.e. la variable aléatoire $\langle a, X\rangle$ définie par*

$$\langle a, X\rangle \ := \ \sum_{k=1}^{n} a_i X_i$$

est une v.a. gaussienne pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Voici deux propositions très utiles dans la manipulation des vecteurs gaussiens.

Proposition 5.1.7 *Si le vecteur (X_1, X_2) est gaussien, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $cov(X_1, X_2) = 0$.*

Proposition 5.1.8 *Tout vecteur de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est un vecteur gaussien.*

Remarque 5.1.7 Attention, il est possible de trouver des variables aléatoires gaussiennes non indépendantes de covariance nulle.

La version continue des vecteurs gaussiens sont les processus gaussiens.

Définition 5.1.9 *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appelé* ***processus gaussien*** *si pour tout n et tout $t_1, \ldots, t_n \in [0,T]$, tels que $t_1 \leq \ldots \leq t_n$, le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est gaussien.*

5.2 Mouvement brownien

Historiquement :
- **1828** : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.
- **1877** : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction),
- **1900** : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif)
- **1905** : Einstein détermine la densité du MB et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.
- **1923** : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.

Définition 5.2.1 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un $\mathcal{F}$-**mouvement brownien (standard)** est un processus B vérifiant :*

(i) *B est $\mathcal{F}$-adapté*

(ii) *$B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s.,*

(iii) *B est continu, i.e. $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,*

(iv) *B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0,T]$ tels que $s \leq t$,*

(v) *B est à accroissements stationnaires et gaussiens : $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pour tous $t, s \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.*

Certaines fois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la filtration à considérer ou lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du processus B, on parlera de mouvement brownien tout court.

Remarque 5.2.1 Pour information, dans le définition, la quatrième propriété peut être remplacée par *"les accroissements sont stationnaires centrés de carré intégrable avec $Var(B_1) = 1$"*. Cette hypothèse plus faible implique, grâce à la continuité de B, que les accroisements sont gaussiens. En effet, on a $B_t - B_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{n} (B_{s+(t-s)i/n} - B_{s+(t-s)(i-1)/n})$ somme composée de v.a. aléatoires indépendantes de même loi car le processus est stationnaire. Grâce à la continuité du B, on obtient qu'elles sont d'espérance nulle et de variance $(t-s)/n$. On a alors envie de conclure grâce au Théorème Centrale Limite mais les termes de la somme dépendent de n et la démonstration nécessite une généralisation du TCL, un théorème du type Lindebergh, qui est possible par contrôle des moments des v.a. aléatoires. Lorsque l'on cherche un processus stationnaire, continu à accroissements indépendants et de variance finie, il est donc naturel de considérer un mouvement brownien qui sera donc un outil très utile pour modéliser les fluctuations des cours des actifs dans un marché financier.

Théorème 5.2.1 *Le mouvement brownien existe ! ! !*

Démontration : Ce résultat non évident est admis. La plus grosse difficulté réside dans l'obtention de la continuité du mouvement brownien. Le mouvement brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts. □

Proposition 5.2.1 *Si B est un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, les processus (B_t), $(B_t^2 - t)$ et $(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}})$ (Brownien Exponentiel) sont des $\mathcal{F}$-martingales.*

Démonstration. Ces trois processus sont adaptés à $\mathcal{F}$. Il sont intégrables car $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, donc son espérance, sa variance et sa transformée de Laplace sont finies. Reste à vérifier la dernière condition. Pour le premier, on a :

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] \;=\; B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] \;=\; B_s + 0 \;=\; B_s$$

Pour le deuxième, comme B est une martingale, on a :

$$\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \;=\; Var[B_t - B_s] \;=\; t - s$$

Et la condition sur le dernier s'obtient grâce à la transformée de Laplace d'une gaussienne :

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}|\mathcal{F}_s\right] \;=\; e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}\mathbb{E}\left[e^{\lambda(B_t - B_s)}e^{\lambda B_s}|\mathcal{F}_s\right] \;=\; e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}e^{\lambda B_s}\mathbb{E}\left[e^{\lambda(B_t - B_s)}\right] \;=\; e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}$$

□

Pour démontrer qu'un processus est un mouvement brownien, au lieu de revenir à sa définition, il est souvent plus aisé d'utiliser la caractérisation suivante :

Théorème 5.2.2 ***Caractérisation du mouvement brownien***
Un processus X est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par $cov(X_s, X_t) = s \wedge t$, pour $s, t \in [0, T]$.

Démonstration.
Sens direct : Pour $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est composé de v.a. gaussiennes indépendantes, donc il est gaussien et toute combinaison linéaire des B_{t_i} qui se réécrit comme combinaison linéaire de ces v.a. et est gaussienne. Par conséquent, le processus B est gaussien. Il est continu par hypothèse, centré car $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_t - B_0] = 0$ et de fonction de covariance, pour $s \leq t$:

$$\begin{aligned} Cov(B_s, B_t) &= \mathbb{E}[B_s B_t] \;=\; \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= B_s \mathbb{E}[B_t - B_s] + Var[B_s - B_0] \;=\; 0 + s \;=\; s \end{aligned}$$

Réciproquement, on va montrer les propriétés de la définition du MB une à une :
- $\mathbb{E}[B_0^2] = Var[B_0] = 0$ donc $B_0 = 0$ p.s.
- B est continu par hypothèse
- Prenons $r_1 \leq \ldots \leq r_n \leq s \leq t$, le vecteur $(B_{r_1}, \ldots, B_{r_n}, B_t - B_s)$ est gaussien. Or $cov(B_t - B_s, B_{r_i}) = r_i \wedge s - r_i \wedge t = 0$, donc $B_t - B_s$ est indépendante de tout vecteur $(B_{r_1}, \ldots, B_{r_n})$ et donc de $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_r, r \leq s)$.
- Pour $s \leq t$, $B_t - B_s$ est gaussienne et est donc déterminée par son espérance $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$ et sa variance :

  $$\begin{aligned} Var[B_t - B_s] &= Var(B_t) + Var(B_s) - 2\,cov(B_t, B_s) \\ &= t + s - 2\,s \wedge t \;=\; t - s. \end{aligned}$$

  Donc $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ et, la loi de $B_t - B_s$ ne dépendant que de $t - s$, les accroissements sont stationnaires.

□

Remarque 5.2.2 Le résultat indiquant que montrer l'indépendance entre $B_t - B_s$ et $\sigma(B_s, s \leq t)$ est équivalent à montrer que tout vecteur de la forme $(B_{r_1}, \ldots, B_{r_n})$ se démontre à l'aide du théorème de la classe monotone. Le lecteur intéréssé pourra se reporter au Livre de Briane-Pages.

Proposition 5.2.2 *Si B est un mouvement brownien, les processus $\frac{1}{a}B_{a^2t}$, $tB_{1/t}$ + valeur nulle en 0, et $B_{t+t_0} - B_t$ sont des Mouvements Browniens.*

Démonstration. On utilise la caractérisation en tant que processus gaussien. Ce sont des processus gaussiens. On a la continuité facilement sauf pour $tB_{1/t}$ (faîte en TD) □

Remarque 5.2.3 Le fait que le processus $\frac{1}{a}B_{a^2t}$ soit encore un mouvement brownien est la **propriété fractale** du mouvement brownien. Son comportement est stable par changement d'échelle. Il traduit également que les trajectoires du mouvement brownien ont une longueur infinie.

Citons quelques propriétés du mouvement brownien sans les démontrer simplement pour mieux comprendre la manière dont il se comporte :

(1) Si B est un mouvement brownien, alors :

$$\frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad p.s.$$

Ce résultat, difficile à montrer pour $t \in \mathbb{R}$, est obtenu naturellement sur les suites à valeur dans $\mathbb{N}$:

$$\frac{B_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B_i - B_{i-1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[B_i - B_{i-1}] = 0 \quad p.s.$$

grâce à la loi de grands nombres, les $B_i - B_{i-1}$ étant indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(2) Le mouvement brownien a ses trajectoires continues mais elles ne sont dérivables nulle part.

(3) Si B est un mouvement brownien, alors, on a :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, B_t = +\infty \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{t\to\infty}}\, B_t = -\infty$$

Ainsi, le mouvement brownien passe par tous les points de l'espace presque surement.

(4) Le mouvement brownien repasse presque surement en tout point une infinité de fois.

(5) Le mouvement brownien est un processus markovien :

$$\forall s \leq t \qquad B_t|\mathcal{F}_s \overset{loi}{\sim} B_t|B_s$$

En conclusion, le mouvement brownien oscille énormément. Il est continu et imprévisible dans le sens ou ses accroissements sont indépendants du passé. Cet outil sera donc idéal pour modéliser la partie aléatoire de l'évolution d'un actif sur un marché.

5.3 Variation totale et variation quadratique

Définition 5.3.1 *On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X sur $[0,T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, \ldots, t_n^n)$ de $[0,T]$ par :*

$$V_T^p(\Pi_n) \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p$$

Si $V_T^p(\Pi_n)$ a une limite dans un certain sens (convergence $\mathcal{L}^p$, convergence p.s.) lorsque $\pi_n := \|\Pi_n\|_\infty := \max_{i\leq n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$, la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre p de X sur $[0,T]$. En particulier :

- *si $p = 1$, la limite s'appellera* ***variation totale de*** *X sur $[0,T]$,*
- *si $p = 2$, la limite s'appellera* ***variation quadratique de*** *X sur $[0,T]$ notée $\langle X\rangle_T$.*

Remarque 5.3.1 Pourquoi la limite ne dépend pas de la subdivision choisie ?
Supposons que la variation infinitésimale d'ordre p a une limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Considérons deux subdivisions différentes. Alors la nouvelle subdivision composée de l'union des 2 précédentes converge également et les deux subdivisions précédentes sont des subdivisions extraites de celle-ci qui convergent donc vers la même limite.

Remarque 5.3.2 Si la variation totale d'un processus existe presque surement alors elle vaut :

$$V_T^1 \quad := \quad \sup_{\Pi\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \qquad p.s.$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0,T]$. Réciproquement, si ce sup est fini, le processus admet une variation totale. Ce résultat est du à la décroissance en Π de la variation infinitésimale : si $\Pi \subset \Pi'$ alors $V_T^1(\Pi) \geq V_T^1(\Pi')$ qui vient naturellement de l'inégalité triangulaire $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$. **La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.**

Proposition 5.3.1 *La variation quadratique sur $[0,T]$ du mouvement brownien existe dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (la variation infinitésimale converge en $\|.\|_2$) et vaut T. De plus, si la subdivision Π_n satisfait $\sum_{n=1}^\infty \pi_n < \infty$, on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\boxed{\langle B\rangle_T \ = \ T}$$

Démonstration. La variation infinitesimale d'ordre 2 du mouvement brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Pi_n) \;\; := \;\; \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}|^2$$

On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$ et $Var[X^2] = 2\,\sigma^4$. On a donc :

$$\mathbb{E}[V_T^2(\Pi_n)] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] \;=\; \sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n) \;=\; T$$

Et en notant $\pi_n := Max|t_{i-1}^n - t_i^n|$, on obtient :

$$Var[V_T^2(\Pi_n)] \;=\; \sum_{i=1}^{n} Var[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] \;=\; 2\sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \;\leq\; 2\,T\,\pi_n \underset{\pi_n \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\|V_T^2(\Pi_n) - T\|_2 = Var[V_T^2(\Pi_n)] \to 0$ quand $\pi_n \to 0$. Pour obtenir la convergence presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout ϵ :

$$\mathbb{P}[|V_T^2(\Pi_n) - T| > \epsilon] \leq \frac{Var[V_T^2(\Pi_n)]}{\epsilon} \leq \frac{2\,T\,\pi_n}{\epsilon}$$

Donc si $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$, on a pour tout ϵ, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[|V_T^2(\Pi_n) - T| > \epsilon] < \infty$ ce qui (par Borel-Cantelli) entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2(\Pi_n)$ vers T.

Proposition 5.3.2 *Pour toute subdivision Π_n satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$, la variation infinitésimale d'ordre 1 sur $[0, T]$ du mouvement brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers $+\infty$. Donc, la variation totale du mouvement brownien vaut $+\infty$ p.s. :*

$$V_T^1 \;=\; \sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) \;\;=\;\; \infty \qquad p.s.$$

Démonstration. Soit Π_n une suite de subdivision de $[0, T]$ satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$. Alors, sur presque tout chemin ω, on a la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \;\;\leq\;\; \underset{|u-v| \leq \pi_n}{sup} |B_u(\omega) - B_v(\omega)| \;\; V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Le terme de gauche tend vers T car on a la convergence p.s. de la variation quadratique. Le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement brownien a ses trajectoires uniformément continues sur $[0, T]$ en tant que fonctions continues sur un compact. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini. □

En conclusion, la variation quadratique du mouvement brownien est non nulle, elle vaut T dans $\mathcal{L}^2$, mais que sa variation totale est infinie presque surement.

Remarque 5.3.3 La variation totale du mouvement brownien trajectoire par trajectoire est simplement la longueur de son chemin. Le résultat obtenu est donc cohérent avec la propriété fractale du mouvement brownien. Un mouvement brownien oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie. Ceci est également lié au fait que les trajectoires du MB, bien que continues ne sont pas régulières.

En effet, lorsqu'une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est dérivable à dérivées bornées, pour toute subdivision Π_n de [0,T], il existe $s_i \in]t_{i-1}, t_i]$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)| \;=\; \sum_{i=1}^{n} f'(s_i^n)|t_i^n - t_{i-1}^n| \;\leq\; \|f'\|_\infty \, T$$

Donc, cette fonction est à variation totale finie :

$$\sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \;<\; \infty$$

On obtient également qu'elle est à variation quadratique nulle :

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2 \;\leq\; \|f'\|_\infty \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \;\leq\; \|f'\|_\infty \, T \, \pi_n \longrightarrow 0$$

Donc, les trajectoires du mouvement brownien de sont pas dérivables à dérivées bornées. On peut même montrer que **les trajectoires du mouvement brownien ne sont dérivables nulle part**.

De la même façon, on dit qu'une fonction est à variation bornée sur $[0,T]$ si :

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \;<\; \infty \,.$$

On peut s'intéresser à la notion de processus à variation bornée.

Définition 5.3.2 *Un processus X est **un processus à variation bornée** sur $[0,T]$ s'il est variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \;<\; \infty \qquad p.s.$$

Proposition 5.3.3 *Un processus est à variation bornée si et seulement s'il est la différence de deux processus croissants.*

Démonstration. S'il est à variation bornée, notons pour tout $t \leq T$

$$X_t^* \;:=\; \sup_{\Pi(t)} \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \;<\; \infty$$

où les $\Pi(t)$ sont des subdivisions de $[0, t]$. Alors X_t se réécrit :

$$X_t \;=\; \frac{X_t + X_t^*}{2} - \frac{X_t^* - X_t}{2} \;:=\; X_t^+ \;-\; X_t^-$$

Les processus X_t^+ et X_t^- sont croissants car, pour $s \leq t$, $|X_t - X_s| \;\geq\; X_t^* - X_s^*$.

Réciproquement, si X et de la forme $X^+ - X^-$ avec X^+ et X^- croissants, on a, pour toute subdivision de $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \;&=\; \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i}^+ - X_{t_{i-1}}^+) \;+\; \sum_{i=1}^{n} (X_{t_{i-1}}^- - X_{t_i}^-) \\
&=\; X_t^+ \;-\; X_0^+ \;+\; X_0^- \;-\; X_t^- \;=\; X_t \;-\; X_0
\end{aligned}$$

Donc X est à variation bornée. □

Proposition 5.3.4 *Si X est un processus à variation bornée à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque surement : $\langle X \rangle_T = 0$.*

Démonstration. Comme nous l'avions vu précédemment, pour presque tout ω :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \;\;\leq\;\; \sup_{|u-v| \leq \pi_n} |X_u(\omega) - X_v(\omega)| \;\; V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Comme X est continu sur le compact $[0, T]$, le sup tend vers 0 et la variation totale de X est finie donc sa variation quadratique est nulle p.s. □

Remarque 5.3.4 Malheureusement les résultats que nous obtenons sont des convergence dans $\mathcal{L}^2$ ou des convergence presque sûre. A une modification presque sûre prêt, la limite ne dépend pas du type de convergence considéré mais ces convergences ne sont pas équivalentes. L'outil adéquat pour définir la variation quadratique est la convergence en probabilité mais cet outil est peu intuitif et difficile à manipuler.

Finalement le tableau récapitulatif à retenir est le suivant :

	Variation totale	Variation quadratique
mouvement brownien	∞	T
Processus continu à var. bornée	$< \infty$	0

Par construction de la variation quadratique, $\langle \alpha X \rangle = \alpha^2 \langle X \rangle$, si bien qu'il est naturel de prolonger l'application $X \mapsto \langle X, X \rangle := \langle X \rangle$ en une application bilinéaire.

Définition 5.3.3 *Soient X et Y deux processus tels que X, Y et $X+Y$ ont des variations quadratiques finies dans $\mathcal{L}^2$. On définit alors la covariation quadratique entre les processus X et Y comme :*

$$\langle X, Y \rangle \;:=\; \frac{1}{2}\left(\langle X+Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle\right)$$

Par construction, cette définition rend l'application $(X,Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ bilinéaire :

$$\begin{aligned} \textit{Relation de bilinéarité :} \quad & \langle X+Y, X+Y \rangle \;=\; \langle X, X \rangle + 2\,\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle \\ \textit{Relation scalaire} \quad & \langle \alpha X, \beta Y \rangle \;=\; \alpha\,\beta\,\langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

Démonstration. Par construction, $2\;||\sum \Delta X_i \Delta Y_i - \langle X, Y \rangle||_2$ converge vers 0 car il est borné par :

$$\left\|\sum \Delta(X_i+Y_i)^2 - \langle X+Y \rangle\right\|_2 + \left\|\sum \Delta X_i^2 - \langle X \rangle\right\|_2 + \left\|\sum \Delta Y_i^2 - \langle Y \rangle\right\|_2$$

$\square$

Remarque 5.3.5 $\langle X, Y \rangle$ s'identifie à la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de $\sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|\,|Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}|$.

Proposition 5.3.5 *Soit X un processus à variation bornée continu ayant une variation quadratique dans $\mathcal{L}^2$ (qui est donc nulle) et Y un processus à variation quadratique finie dans $\mathcal{L}^2$, alors $X+Y$ est à variation finie dans $\mathcal{L}^2$ et l'on a :*

$$\langle X+Y \rangle \;=\; \langle Y \rangle$$

Ce qui revient à dire que :

$$\langle X, Y \rangle \;=\; 0$$

Démonstration. On a la relation

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum \Delta X_i\,\Delta Y_i\right)^2\right] \;\le\; \mathbb{E}\left[\left(\sum \Delta X_i^2\right)\,\left(\sum \Delta Y_i^2\right)\right] \;\le\; \left\|\sum \Delta X_i^2\right\|_2\,\left\|\sum \Delta Y_i^2\right\|_2$$

Ce qui donne $\langle X, Y \rangle = 0$ à la limite. $\square$

Remarque 5.3.6 Nous venons de voir que la variation quadratique du mouvement brownien sur $[0, T]$ est T. Or, si vous vous souvenez, nous avions vu que le processus $(B_t^2 - t)$ est une martingale. Ceci n'est pas un hasard, il existe un résultat plus général que nous ne démontrerons pas mais qui permet de caractériser les martingales de carré intégrables. Il s'agit de la décomposition de Doob-Meyer.

Théorème 5.3.1 (Décomposition de Doob Meyer) *Si M est une martingale continue de carré intégrable ($\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$ pour tout t), alors $\langle M \rangle$ est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que $M^2 - \langle M \rangle$ soit une martingale.*

5.4 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s \, dB_s$$

Lorsque l'on intègre une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s) \, df(s) \quad = \quad \int_0^T g(s) \, f'(s) ds$$

Si jamais f n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s) \, df(s) \quad = \quad \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes. Dans notre cas, le mouvement brownien n'est pas à variation bornée donc, **on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire**. Par contre, comme il est a variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au mouvement brownien comme une **limite dans $\mathcal{L}^2$ (convergence au sens de $\|.\|_2$)** de cette variable aléatoire.

$$\int_0^T \theta_s \, dB_s \quad = \quad \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Attention, la convergence est au sens de la convergence des variables aléatoires dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Pour cela nous allons donc devoir **imposer au processus θ d'être $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$**.

On demandera également à l'intégrant θ **d'être $\mathcal{F}$-adapté** afin que θ_{t_i} soit indépendant de $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. En effet, dans les applications en finance, θ_t représentera la quantité d'actif risqué contenue dans notre portefeuille à l'instant t et dB_t la variation infinitésimale de cet actif risqué. Il est donc naturel de vouloir imposer que θ soit $\mathcal{F}$-adapté.
S'il ne l'était pas, on pourrait tout de même définir une intégrale par rapport au mouvement brownien mais elle serait très différente car la variation quadratique du mouvement brownien est non nulle. Sur un exemple simple par exemple, comme approximations de $\int_0^T B_t \, dB_t$, nous aurions entre autre le choix entre les 2 approximations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$$

L'écart entre nos deux intégrales est alors égal à :

$$\sum_{i=0}^{n-1} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2 \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \quad T$$

Nous allons construire l'intégrale stochastique ou l'approximation est faite au point le plus à gauche afin que l'intégré soit indépendant de l'intégrant. C'est l'intégrale au sens d'Ito (et non Stratonovich ou anticipante). Enfin, pour des raisons techniques, nous allons demander de la régularité aux processus que nous manipulons. Nous leur demanderons d'être presque surement Continus A Droite avec Limite A Gauche (CADLAG).

Finalement, nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble

$$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) \quad = \quad \Big\{ (\theta_t)_{0 \le t \le T} \quad \text{processus CADLAG } \mathcal{F}\text{-adapté t.q. } \theta \in \mathcal{L}^2(\Omega, [0,T]) \Big\}$$

Construisons tout d'abord l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires.

Définition 5.4.1 *Un processus $(\theta_t)_{0 \le t \le T}$ est appelé* ***processus élémentaire*** *s'il existe une subdivision $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0 \le i \le n-1}$ avec θ_i mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_i}$ et dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ tel que :*

$$\theta_t(\omega) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$.

Définition 5.4.2 *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre* 0 *et* $t \leq T$ *d'un processus élémentaire* $\theta \in \mathcal{E}$ *est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s \quad := \quad \sum_{i=0}^{k} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k}) \quad \textit{sur }]t_k, t_{k+1}]\,,$$

soit

$$\boxed{\int_0^t \theta_s dB_s \;=\; \sum_{i=0}^{n} \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i})\,.}$$

On associe donc à $\theta \in \mathcal{E}$ le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$.

Remarque 5.4.1 On définit naturellement $\int_s^t \theta_u dB_u := \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u$.

Proposition 5.4.1 ***Propriétés de l'intégrale Stochastique sur*** $\mathcal{E}$
Sur l'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$*, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*
(1) $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire*
(2) $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s.*
(3) $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ *est un processus* $\mathcal{F}$*-adapté.*
(4) $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ *et* $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
(5) propriété d'Isométrie :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]}$$

(6) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right] = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv | \mathcal{F}_s\right]$$

(7) On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right) | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv | \mathcal{F}_s\right]$$

(8) $\left(\int_0^t \boldsymbol{\theta_s dB_s}\right)_{\mathbf{0 \leq t \leq T}}$ ***est une*** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$***-martingale.***

(9) Le processus $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds \right)_{0\le t\le T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale.*
(10) la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\boxed{\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds}$$

(11) La covariation quadratique entre 2 intégrales stochastiques est donnée par :

$$\boxed{\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds}$$

Démonstration.
(1) La linéarite de l'intégrale est immédiate.
(2) La continuité de l'intégrale stochastique se lit sur sa deuxième écriture par la continuité des trajectoires du mouvement brownien.
(3) La v.a. $\int_0^t \theta_s dB_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable comme somme de v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurables, donc l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$-adapté.
(4) Prenons $t = t_k$ quitte à rajouter un point à la suite $(t_i)_{0\le 1\le n}$. Alors, le calcul de l'espérance de $\int_0^t \theta_s dB_s$ donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left[\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left[\theta_i \mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = 0$$

Le calcul de la variance, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned}
Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left[\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\theta_i\, \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\,(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&\quad + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\theta_i\, \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\, \mathbb{E}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j}]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) + 0 = \int_0^t \theta_s^2 ds
\end{aligned}$$

On aurait pu éviter le calcul et utiliser le résultat plus général énoncé dans (6)
(5) La propriété d'isométrie est celle que l'on vient d'écrire.

(6) Quitte à rajouter 2 points à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$, on peut supposer que $s = t_j$ et $t = t_k$ et alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_u dB_u|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1}\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_j}\right] + \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\,\theta_i\,\mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}]\,|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
&= \int_0^s \theta_u dB_u + 0
\end{aligned}$$

Le deuxième calcul, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
=\;& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=j}^{k-1}\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
=\;& \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_j}\right] + 2\sum_{i<l}\mathbb{E}\left[\theta_i\,\theta_l(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\,(B_{t_{l+1}} - B_{t_l})|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
=\;& \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2\mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
&+ 2\sum_{i<l}\mathbb{E}\left[\theta_i\,\theta_l(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\,\mathbb{E}[B_{t_{l+1}} - B_{t_l}|\mathcal{F}_{t_l}]|\mathcal{F}_{t_j}\right] \\
=\;& \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}\left[\theta_i^2(t_{i+1} - t_i)|\mathcal{F}_{t_j}\right] + 0 \\
=\;& \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

(7) Pour θ et ϕ dans $\mathcal{E}$, et $u \leq t$ on a :

$$\begin{aligned}
&2\,\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right)|\mathcal{F}_s\right] \\
=\;& \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (\theta_v + \phi_v\mathbb{1}_{v\leq u})dB_v\right)^2|\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)^2|\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
=\;& \mathbb{E}\left[\int_s^t (\theta_v + \phi_v\mathbb{1}_{v\leq u})^2 dv|\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv|\mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^u \phi_v^2 dv|\mathcal{F}_s\right] \\
=\;& 2\,\mathbb{E}\left[\int_s^u \theta_v\phi_v dv|\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

(8) On a vu que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{t \leq T}$ est $\mathcal{F}$-adapté. La propriété d'isométrie nous donne que $\int_0^t \theta_s dB_s$ est dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La première partie de la propriété 6 nous donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. En fait c'est simplement une tranformée de martingale.
(9) Le processus M défini par $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathcal{F}$-adapté comme somme discrète de processus $\mathcal{F}$-adaptés. Chaque M_t est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ comme somme de 2 éléments de $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La deuxième partie de la propriété (6) nous donne la propriété de martingale de M.
(10) Si on admet que la variation quadratique est telle que $M^2 - \langle M \rangle$ soit martingale (Doob-Meyer), le résultat du dessus nous permet de conclure directement.
(11) Le résultat vient directement de la définition de la covariation quadratique par les même calculs que dans (8).

Exemple : $\int_0^t dB_s = B_t - B_0 = B_t$ pour tout $t \in [0, T]$.

Finalement, l'intégrale stochastique d'un élément de $\mathcal{E}$ est une martingale continue de carré intégrable. Nous noterons $\mathcal{M}^2([0,T])$ l'ensemble des martingales continues de carré intégrable :

$$\mathcal{M}^2([0,T]) \;\; := \;\; \left\{M \; \mathcal{F} - \text{martingales telles que } \mathbb{E}[M_t^2] < \infty \quad \forall t \in [0,T]\right\}$$

Pour le moment, l'intégrale stochastique est une fonction de $\mathcal{E} \times [0,T]$ dans $\mathcal{M}^2([0,T])$. On va maintenant, comme annoncé, étendre la définition de l'intégrale stochastique à des processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, i.e. à :

$$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) \;\; = \;\; \left\{(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}, \quad \text{processus CADLAG } \mathcal{F}\text{-adapté tq } \theta \in \mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])\right\} .$$

Lemme 5.4.1 *L'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout $\theta \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$, il existe une suite θ^n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que*

$$\|\theta^n - \theta\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 \, ds\right]^{1/2} \quad \longrightarrow \quad 0$$

Ce lemme sera admis. Il s'agit d'une généralisation de la densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions avec un contrôle global sur l'ensemble des trajectoires. Pas super comme remarque.

Théorème 5.4.1 *Il existe une unique application linéaire I de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ dans $\mathcal{M}^2([0,T])$ qui coincide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\mathbb{E}[I(\theta)_t^2] \;=\; \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2\, ds\right]$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration.

Approximation : Soit θ un processus élément de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$. D'après le lemme admis, il existe une suite θ^n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que :

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2\, ds\right]^{1/2} \;\longrightarrow\; 0$$

Convergence : La propriété d'isométrie entre 0 et $t \leq T$ sur l'intégrale stochastique du processus $(\theta^{n+p} \,-\, \theta^n)$ de $\mathcal{E}$ nous donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\theta_s^{n+p} \,-\, \theta_s^n) dB_s\right)^2\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^{n+p} \,-\, \theta_s^n)^2 ds\right] \;\leq\; \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s^{n+p} \,-\, \theta_s^n)^2 ds\right]$$

ce qui s'écrit en terme de norme :

$$\left\|\int_0^t \theta_s^{n+p} dB_s \,-\, \int_0^t \theta_s^n dB_s\right\|_2 \;\leq\; \left\|\theta^{n+p} \,-\, \theta^n\right\|_2'$$

Comme θ^n converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$, elle est de Cauchy et donc $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Or $\mathcal{L}^2(\Omega)$ muni de $\|.\|_2$ est un espace de Banach (donc complet), par conséquent la suite $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En notant $\int_0^t \theta_s dB_s$ sa limite, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s\, dB_s \,-\, \int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s \,-\, \theta_s^n)^2 ds\right] .$$

Unicité : Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, en effet, si j'avais 2 suites approximantes θ_n et ϕ_n, la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\|\int_0^t \theta_s^n\, dB_s \,-\, \int_0^t \phi_s^n dB_s\right\|_2 \;=\; \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^n \,-\, \phi_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \;\leq\; ||\theta^n \,-\, \phi^n||_2' \;\to\; 0$$

Donc les deux suites approximantes donnent la meme limite dans $L^2(\Omega)$ qui sont donc égales p.s.

Convergence dans $\mathcal{M}^2([0,T])$ **:** Le processus limite M est un élément de $\mathcal{M}^2([0,T])$ car chaque M_t s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de M_t^n avec M^n une suite de martingales $\mathcal{F}$-adaptées telles que $\mathbb{E}[|M_t^n|^2] < \infty$ pour tout t. (application de la proposition 5.1.6 avec $p = 2$).

Linéarité et Isométrie : La linéarité est immédiate, reste à prouver la propriété d'isométrie qui s'écrit en passant à la limite la propriété d'isométrie sur les éléments de $\mathcal{E}$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds\right] \Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

□

Remarque 5.4.2 On peut voir notre transformation comme un prolongement d'isométrie entre deux espaces complets : l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ muni de la norme $\|.\|_2'$ et l'espace $\mathcal{M}^2([0,T])$ muni de la norme $\|M\| = \mathbb{E}[M_T^2]$.

Proposition 5.4.2 *Sur $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$, l'intégrale stochastique satisfait les même propriétés que celles énoncées dans $\mathcal{E}$:*
(1) $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire
(2) $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ est continue p.s.
(3) $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté.
(4) $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
(5) propriété d'Isométrie :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]}$$

(6) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u / \mathcal{F}_s\right] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv | \mathcal{F}_s\right]$$

(7) On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dB_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dB_v\right) |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t\wedge u} \theta_v \phi_v dv | \mathcal{F}_s\right]$$

(8) $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.
(9) Le processus $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

(10) la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

(11) La covariation quadratique entre 2 intégrales stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

Démonstration. On a déjà vu (1) (3), (5) et (8).
(2) La propriété d'isométrie donne la continuité dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ mais nous allons admettre la continuité presque sûre.
(4) est un cas particulier de (6).
(6) La première est la propriété de martingale de l'intégrale stochastique et la deuxième la propriété de martingale du processus donné par la propriété (9).
(7) On l'obtient à partir de (6) comme on l'avait obtenu dans $\mathcal{E}$ en considérant θ^2, ϕ^2 et $(\theta+\phi)^2$.
(9) On l'obtient grâce à la proposition (5.1.6) avec $p = 1$.
(10) est obtenu par Doob-Meyer.
(11) est une conséquence de (10). □

Remarque 5.4.3 L'intégrale stochastique est une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et est donc définie à une modification presque sûre près.

Cas particulier ou le processus θ n'est pas aléatoire.

Proposition 5.4.3 *Si le processus θ n'est pas aléatoire mais simplement une fonction f du temps, en plus des propriétés précédentes, l'intégrale stochastique alors appelée* ***intégrale de Wiener*** *est gaussienne :*

$$\int_0^t f(s) dB_s \quad \sim \quad \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s) ds\right)$$

Démonstration. En effet, $\int_0^t f(s)dB_s$ s'écrit comme une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de v.a. de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \quad \int_0^t f(s) dB_s$$

Or $\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est gaussienne comme combinaison linéaire d'éléments du vecteur gaussien $B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}$. Donc $\int_0^t f(s)dB_s$ est gaussienne comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de v.a. gaussiennes. En effet, la convergence dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ entraîne la convergence de l'espérance, de la variance et donc de la fonction caractéristique des v.a. gaussiennes. □

De plus, toute combinaison linéaire de $\int_0^{t_i} f(s)dB_s$ est également une intégrale de Wiener qui est gaussienne. Donc l'intégrale de Wiener $\int_0^t f(s)dB_s$ est un **processus gaussien** caractérisé par

$$cov\left(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^u g(s)dB_s\right) = \int_0^{t\wedge u} f(s)g(s)ds$$

On démontre également que la v.a. $\int_s^t f(u)dB_u$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$ (cf TD).

Cas particuler où le processus θ est de la forme $f(B)$

Pour l'instant, nous avons vu que, lorsqu'une suite de processus élémentaires θ^n converge vers θ dans $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$, alors l'intégrale stochastique de θ est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des intégrales stochastiques des θ^n. Le candidat le plus naturel pour approcher l'intégrale stochastique de $f(B)$ est alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Mais, à quelles conditions, a t'on la convergence voulue ?

Proposition 5.4.4 *Si f est une fonction dérivable à dérivée bornée, on a :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{i}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{i}{n}T}) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \int_0^T f(B_s)dB_s$$

La convergence a lieu dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Démonstration. Avant toute chose, il faut justifier que l'intégrale stochastique a un sens, i.e. que $f(B) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$. Le processus $f(B)$ est bien $\mathcal{F}$-adapté et CADLAG car le mouvement brownien est $\mathcal{F}$-adapté et continu p.s. . On a, pour tout $t \leq T$:

$$|f(B_t)| \leq |f(B_0)| + \|f'\|_\infty.|B_t - B_0| = |f(0)| + \|f'\|_\infty.|B_t|$$

La constante $|f(0)|$ est bien sûr dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ et on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |B_s|^2 ds\right] = \int_0^T \mathbb{E}[|B_s|^2]\, ds = \int_0^T s\, ds = \frac{T^2}{2} < \infty$$

Donc $f(B_t) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ et $\int_0^T f(B_s)dB_s$ est bien définie.
L'intervalle $[0,T]$ est découpé en n intervalles $]t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = iT/n$ et on introduit le processus

$$B_s^n := \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s) \qquad \text{tel que} \qquad \int_0^T f(B_s^n)\, dB_s := \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{i}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{i}{n}T})$$

Alors $\int_0^T f(B_s)\, dB_s$ sera la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de $\int_0^T f(B_s^n)\, dB_s$ si $f(B)$ est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$ de $f(B^n)$. Or on a :

$$\begin{aligned}
\|f(B) - f(B^n)\|_2' &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (f(B_s) - f(B_s^n))^2\, ds\right]^{1/2} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(B_s) - f(B_{t_i}))^2\, ds\right]^{1/2} \\
&\leq \|f'\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[(B_s - B_{t_i})^2]\, ds\right)^{1/2} \\
&= \|f'\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i)\, ds\right)^{1/2} \\
&= \|f'\|_\infty \left(n \int_0^{T/n} u\, du\right)^{1/2} = \frac{T\|f'\|_\infty}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

Exemple : Que vaut $\int_0^T B_s\, dB_s$?

En reprenant le processus $B_s^n := \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$, la proposition précédente nous donne la convergence dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de $\int_0^T B_s^n\, dB_s$ vers $\int_0^T B_s\, dB_s$. Remarquons alors que :

$$\begin{aligned}
2\int_0^T B_s^n\, dB_s &= 2\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\, ds = \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\
&= B_T^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2
\end{aligned}$$

Le deuxième terme converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ vers la variation quadratique sur $[0,T]$ du mouvement brownien qui vaut T donc on obtient finalement :

$$B_T^2 = \int_0^T 2B_s\, dB_s + T$$

On retrouve donc que $B_T^2 - T$ est une martingale. Par rapport à l'intégrale classique, il y a un terme en plus, (le T) qui vient du fait que la variation quadratique du mouvement brownien est non nulle.

Heuristiquement, on peut se dire qu'une petite variation du mouvement brownien dB_t équivaut à une variation en $\sqrt{dt}$ car sa variation quadratique est en dt et que l'on considère des convergence en norme quadratique.

$$dB_t \;\sim\; \sqrt{dt} \;\;\Rightarrow\;\; (dB_t)^2 \;\sim\; dt$$

Donc, les termes en dB_t^2 ne sont pas négligeables dans les développements de Taylor et l'on garde un terme en plus. La formulation de ce résultat est la formule d'Ito. De manière moins heuristique, on peut retenir :

$$dB_t \;\sim\; \mathcal{N}(0, dt)$$

5.5 Formule d'Ito

Voici l'outil qui permet de calculer les intégrales stochastiques sans repasser par des suites approximantes.

Théorème 5.5.1 *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ à dérivée seconde bornée vérifie p.s. :*

$$f(B_t) \;=\; f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds \qquad ,\forall t \leq T$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$d\,f(B_s) \;=\; f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s)\,ds$$

Démonstration. Fixons $t \in [0, T]$ et considérons de nouveau la partition de $[0, t]$ en n intervalles $]t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = it/n$. Trajectoire par trajectoire, la formule de Taylor couplée à la continuité p.s. de B nous donne :

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{i=1}^{n} [f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

où les θ_i sont des variables aléatoires à valeur dans $]t_{i-1}, t_i[$. Comme f' est dérivable à dérivée bornée, la proposition 5.4.4 nous donne :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f'(B_s)\,dB_s \right\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il reste à contrôler le dernier terme :

$$U_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

Nous allons successivement remplacer θ_i par t_{i-1} puis $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ par $t_i - t_{i-1}$. Introduisons :

$$V_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \qquad \text{et} \qquad W_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})$$

On a alors, par l'inégalité de Schwartz :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|U_n - V_n|] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})| \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})|^2\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned}$$

Pour toute trajectoire, $s \mapsto f''(B_s(\omega))$ est continue sur un compact, donc uniformément continue et le sup converge donc vers 0. La convergence vers 0 de l'espérance est assurée par le théorème de Lebesgue car f'' est bornée. Le deuxième terme est la variation quadratique du mouvement brownien qui converge vers t. Donc on a $\|U_n - V_n\|_1 \to 0$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|V_n - W_n|^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))\right)^2\right] \\ &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n Var((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n 2(t_i - t_{i-1})^2 = 2\,\|f''\|_\infty^2 \frac{t^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

On a ainsi $\|V_n - W_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, par définition de l'intégrale de Lebesgue, comme f'' est bornée, on a :

$$\left\|W_n - \int_0^t f''(B_s)ds\right\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La convergence $\mathcal{L}^2$ impliquant la convergence $\mathcal{L}^1$, on a finalement la convergence dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ de

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

vers

$$\int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$$

Ceci entraîne donc l'égalité presque sûre entre les deux v.a. On intervertit ensuite le "$\forall t$" et le "p.s." grâce à la continuité de chacun des processus. □

Remarque 5.5.1 Lorsque l'on a une égalité entre processus qui est vrai presque surement pour tout t, elle n'est pas forcément vrai pour tout t presque surement. En effet, pour tout t, l'ensemble où l'égalité n'est pas vérifié est négligeable, mais l'union sur $t \in \mathbb{R}$ de ces ensembles n'est pas forcément négligeable. Par contre, lorsque les processus sont continus, l'union (dénombrable) sur $t \in \mathbb{Q}$ de ces ensembles reste négligeable et s'étend à l'union sur $t \in \mathbb{R}$ par continuité.

Donc, ce qu'il faut retenir est que lorsque que l'on dérive par rapport au mouvement brownien, comme "dB_t se comporte comme $\sqrt{dt}$", il faut garder un terme en plus dans le développement de Taylor.

Exemple : On retrouve $B_T = \int_0^T dB_t$ et $B_T^2 = 2\int_0^T B_s dB_s + T$

Généralisation au cas d'une dérivée seconde non bornée

Avoir la dérivée seconde bornée est très contraignant, car on ne peut pas souvent appliquer cette formule. On aimerait pouvoir généraliser cette formule aux cas où la fonction f est seulement dérivable deux fois. Le problème est que l'on n'est alors pas sûr que $f'(B)$ soit dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ et que donc l'intégrale stochastique soit bien définie.

En fait on peut étendée la définition d'intégrale stochastique à l'ensemble $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0,T])$ inculant $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ et défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0,T]) \quad := \quad & \Big\{(\theta_s)_{0\le s\le T} \text{ processus } \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{A}\text{-mesurable et} \\ & \qquad \mathcal{F}\text{-adapté t.q. } \int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}-p.s.\Big\}\end{aligned}$$

Lors de cette généralisation, on perd le caractère martingale de l'intégrale stochastique, elle devient ce que l'on appelle une **Martingale locale**. Il lui manque juste de bonnes conditions d'intégrabilité pour être une vraie martingale. On peut alors généraliser la formule d'Ito en obtenant les résultat suivant.

Théorème 5.5.2 *Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifie p.s. :*

$$f(B_T) \quad = \quad f(B_0) + \int_0^T f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T f''(B_s)\,ds$$

Sans vouloir plus détailler, dîtes vous simplement que, les conditions d'intégrabilité mises à part, vous pouvez appliquer la formule d'Ito lorsque la fonction est seulement C^2 mais que l'intégrale stochastique obtenue n'est pas forcément une vraie martingale.

5.6 Processus d'Ito

Introduisons une nouvelle classe de processus par rapport auxquels nous pourrons encore définir une intégrale stochastique.

Définition 5.6.1 *Un **processus d'Ito** est un processus de la forme*

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; \int_0^t \varphi_s\,ds \;+\; \int_0^t \theta_s\,dB_s \tag{5.6.1}$$

avec X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, θ et φ deux processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \quad p.s. \qquad \textit{et} \qquad \int_0^T |\varphi_s| ds < \infty \quad p.s.$$

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t \;=\; \varphi_t\,dt \;+\; \theta_t\,dB_t$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus θ et φ. Afin de pouvoir présenter ici la démontration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer les conditions d'intégrabilités **(CI)** suivantes :

$$\text{(CI)} \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_s|^2 ds\right] < \infty \qquad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_s|^2 ds\right] < \infty$$

Proposition 5.6.1 *Si M est une martingale continue qui s'écrit sous la forme $M_t := \int_0^t \varphi_s ds$ avec $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$, alors $\mathbb{P}$-p.s.*

$$M_t \;=\; 0$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Par définition $M_0 = 0$ et comme M est une martingale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s ds\right)^2\right] .\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalite de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left(\int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s ds\right)^2 \leq \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} 1^2 ds \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds = \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds$$

Soit en sommant terme à terme :

$$\mathbb{E}[M_t^2] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds\right] = \frac{t}{n}\, \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2 ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que M_t est nul p.s. pour tout t, puis on intervertit le "$\forall t$" et le "p.s." grâce à la continuité de M. □

Corollaire 5.6.1 *La décomposition en processus d'Ito vérifiant les conditions (CI) est **unique** (à une modification p.s. près).*

Démonstration. Supposons qu'un processus d'Ito se décompose de deux manières différentes :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s^1\, ds + \int_0^t \theta_s^1\, dB_s = X_0 + \int_0^t \varphi_s^2\, ds + \int_0^t \theta_s^2\, dB_s$$

alors, on a la relation :

$$\int_0^t (\varphi_s^1 - \varphi_s^2)\, ds = \int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1)\, dB_s$$

pour tout $t \in [0, T]$. Donc ce processus est une martingale continue (terme de droite) qui s'écrit sous la forme d'une intégrale de Lebesgue (terme de gauche). Grâce aux conditions d'intégrabilité imposées, la proposition 5.6.1 nous indique que ce processus est nul presque surement.

Trajectoire par trajectoire, l'application $t \mapsto \int_0^t (\varphi_s^1 - \varphi_s^2)\, ds$ étant l'application nulle, par différentiation $\varphi^1 = \varphi^2$. De plus, la propriété d'Isométrie de l'intégrale stochastique nous indique que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1)^2\, ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1)\, dB_s\right] = \mathbb{E}[0] = 0$$

Donc on a également $\theta^2 = \theta^1$. □

Corollaire 5.6.2 *Un processus d'Ito vérifiant les conditions (CI) est une martingale si et seulement si "sa partie en ds" φ est nulle.*

Démonstration. Si la "partie en ds" est nulle, le processus d'Ito est une intégrale stochastique vérifiant les conditions d'intégrabilité pour être une martingale.
Réciproquement, si un processus d'Ito X donné par (5.6.1) vérifiant (CI) est une martingale, le processus défini par $X_t - X_0 - \int_0^T \theta_s\, dB_s$ est une martingale continue qui s'écrit $\int_0^t \varphi_s\, ds$ avec $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$. Donc la proposition 5.6.1 nous indique que $\int_0^t \varphi_s\, ds$ est nul pour tout t presque surement et $\varphi = 0$. □

Ces résultats se généralise au cas ou les processus φ et θ ne vérifient pas les conditions d'intégrabilité (CI).

Proposition 5.6.2 *:*
***1.** Si M est une martingale locale continue qui s'écrit sous la forme $M_t := \int_0^t \varphi_s ds$ avec φ un processus à variations bornées ($\int_0^T |\varphi_s| ds < \infty$ p.s.), alors $\mathbb{P}$-p.s.*

$$M_t \;=\; 0$$

*pour tout $t \in [0,T]$. **2.** La décomposition en processus d'Ito est **unique** (à une modification p.s. près).*
***3.** Un processus d'Ito est une martingale locale si et seulement si "sa partie en ds" φ est nulle.*

On a vu que la variation quadratique de l'intégrale stochastique $\int_0^t \theta_s dB_s$ est donnée par $\int_0^t \theta_s^2 ds$. Lorsque que l'on ajoute à un processus, un processus à variation finie (de variation quadratique nulle), on ne modifie pas sa variation quadratique. Donc, la variation quadratique d'un processus d'Ito est égale à la variation quadratique de sa partie martingale.

Proposition 5.6.3 *La variation quadratique sur $[0,t]$ d'un processus d'Ito X donné par* (5.6.1) *vaut :*

$$\langle X \rangle_t \;=\; \left\langle \int_0^t \theta_s\, dB_s \right\rangle \;=\; \int_0^t \theta_s^2\, ds$$

Proposition 5.6.4 *La covariation quadratique entre 2 processus d'Ito X_1 et X_2 donnés par :*

$$dX_t^i \;=\; \varphi_t^i\, dt \;+\; \theta_t^i\, dB_t$$

vaut :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t \;=\; \int_0^t \theta_s^1\, \theta_s^2\, ds$$

Démonstration. Par définition, la covariation quadratique est donnée par :

$$\begin{aligned}
\langle X^1, X^2 \rangle &:= \frac{1}{2}\left(\langle X^1 + X^2\rangle - \langle X^1\rangle - \langle X^2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t (\theta_s^1 + \theta_s^2)^2\, ds - \int_0^t (\theta_s^1)^2\, ds - \int_0^t (\theta_s^2)^2\, ds\right) \\
&= \int_0^t \theta_s^1\, \theta_s^2\, ds
\end{aligned}$$

□

Définition 5.6.2 *La notion d'intégrale stochastique par rapport à un processus d'Ito se définit de la manière naturelle suivante. Pour ϕ élément de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$, satisfaisant de bonnes conditions d'intégrabilité, on définit :*

$$\boxed{\int_0^t \phi_s\, dX_s := \int_0^t \phi_s\, \theta_s\, dB_s + \int_0^t \phi_s\, \varphi_s\, ds}$$

La formule d'Ito se généralise aux processus d'Ito.

Théorème 5.6.1 *Soit f une fonction C^2, on a alors :*

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s \\
&= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s\, ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \theta_s^2 ds
\end{aligned}$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X\rangle_t$$

Démonstration. La démonstration revient comme dans le cas du mouvement brownien à faire un développement de Taylor :

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(X_{\theta_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

Le premier terme va converger vers l'intégrale stochastique $\int_0^t f'(X_s)\, dX_s$ et le deuxième vers le terme $\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$ par définition de la variation quadratique.

Notons que grâce à l'extension de l'intégrale stochastique à $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0,T])$, l'intégrale stochatique $\int_0^t f'(X_s)\theta_s dB_s$ est bien définie puisque par continuité de X et de f', le processus $f'(X)\theta$ est bien dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F},loc}(\Omega, [0,T])$. □

Une des conséquence de la formule d'Ito est la formule d'intégration par parties stochastique.

Proposition 5.6.5 ***Formule d'intégration par partie*** *Soient X et Y deux processus d'Ito, on a :*

$$X_tY_t \;=\; X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y\rangle_s$$

Soit en notation infinitésimale :

$$d(XY)_t \;=\; X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$$

Démonstration. En apppliquant la formule d'Ito à X_t^2 et à Y_t^2, on obtient :

$$dX_t^2 \;=\; 2X_t dX_t + \frac{2}{2} d\langle X\rangle_t \qquad \text{et} \qquad dY_t^2 \;=\; 2Y_t dY_t + \frac{2}{2} d\langle Y\rangle_t$$

Et en l'appliquant à $(X+Y)^2$, on obtient :

$$d(X+Y)_t^2 \;=\; 2(X_t+Y_t)d(X_t+Y_t) + \frac{2}{2} d\langle X+Y\rangle_t$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2}\left(d(X+Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2\right) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}\left(d\langle X+Y\rangle_t - d\langle X\rangle_t - d\langle Y\rangle_t\right) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t \end{aligned}$$

□

La formule d'Ito sous toutes ses formes

1. Pour le mouvement brownien avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(W_t) \;=\; f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$$

2. Pour un processus d'Ito avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(X_t) \;=\; f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

3. Pour un processus d'Ito avec $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ fonction du temps et de l'espace :

$$f(t,X_t) \;=\; f(0,X_0) \;+\; \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds \;+\; \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\,d\langle X\rangle_s$$

4. Pour un processus d'Ito multidimensionnel avec $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$:

$$f(X_t) \;=\; f(X_0) \;+\; \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\,dX_i(s) \;+\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\,d\langle X_i,X_j\rangle_s$$

Pour démontrer ces formules de plus en plus générales, la méthode est toujours la même : faire un développement de Taylor et ne pas négliger les termes provenant de la dérivée seconde par rapport au Brownien ou au processus d'Ito dans le développement de Taylor car dB_t se comporte comme $\sqrt{dt}$ et dX_t se comporte comme $\theta_t\sqrt{dt}$.

5.7 Equation Différentielle Stochastique

Tout comme on définit dans un cadre déterministe la notion d'équation différentielle, on va définir ici la notion d'équation différentielle stochastique. Typiquement, une équation différentielle stochastique (EDS) est donnée par :

$$X_0 = x \qquad\qquad dX_t \;=\; b(t,X_t)dt \;+\; a(t,X_t)dW_t \tag{5.7.1}$$

avec b et a des applications boréliennes de $\mathbb{R} \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.7.1 *Un processus X est solution de cette EDS si c'est un **processus $\mathcal{F}$-adapté** (ou $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du MB W) satisfaisant*

$$\int_0^t |b(s,X_s)|ds \;+\; \int_0^t a^2(s,X_s)ds \;<\; \infty \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}-p.s$$

et qui vérifie

$$X_t \;=\; x \;+\; \int_0^t b(s,X_s)ds \;+\; \int_0^t a(s,X_s)dW_s \qquad\qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}-p.s$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, on a besoin de 2 types de conditions.

Une première qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lipschitz) des fonctions b et a.

Condition 1 : Il existe une constante$L > 0$ telle que

$$|b(t,x) - b(t,y)| \; + \; |a(t,x) - a(t,y)| \quad \leq \quad L\,|x-y|$$

pour tout $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$.

Une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien définit sur tout $\mathbb{R}^+$.

Condition 2 : Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|b(t,x)|^2 \; + \; |a(t,x)|^2 \quad \leq \quad C\,(1 + |x|^2)$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Théorème 5.7.1 *Supposons que les fonctions b et a satisfont les conditions 1 et 2. Alors l'EDS* (5.7.1) *admet une unique solution.*

La démonstration de ce théorème utilise, comme toujours pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles, le théorème du point fixe.

Remarque 5.7.1 Dans le cas particulier où b et a sont seulement des fonctions de x et non de t (EDS autonome), la condition 2 est une conséquence de la condition 1.

Chapitre 6

Modèle de Black & Scholes

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proppposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle porte le nom de modèle de Black et Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. Ils ont obtenu le prix Nobel d'économie en 1997 pour ces travaux ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

6.1 Hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici les hypothèses faîtes au debut du cours :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
3. On peut emprunter et vendre à découvert ;
4. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant r.

6.2 Modélisation probabiliste du marché

Pour modéliser l'incertitude sur le marché, nous considérons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard W. Nous supposons que notre marché est constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

• **Actif sans risque.** Dans le modèle discret à n périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles de longeur T/n, que l'on considère un taux sans risque r_n de la forme rT/n, la valeur de l'actif sans risque à l'instant pT/n a la forme suivante : $(1 + rT/n)^p$. Donc, lorsque n tend vers l'infini, S_t^0 se comporte comme e^{rt}. La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actif sans risque en temps continu est donc naturellement :

$$dS_t^0 \;=\; rS_t^0 dt \quad \text{et} \quad S_0^0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad S_t^0 \;=\; e^{rt} \quad t \in [0, T] \; .$$

• **Actif risqué.** Il suit la dynamique donnée par l'EDS de Black & Scholes

$$S_t \;=\; S_0 + \int_0^t S_u \left(\mu \, du \,+\, \sigma \, dW_u\right) \, , \quad t \in [0, T] \, , \tag{6.2.1}$$

où S_0, μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$ et $S_0 > 0$. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué en temps continu tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements de l'actif sont normaux. les coefficients μ et σ sont respectivement appelés tendance et volatilité de l'actif S.

Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_t \;:=\; \sigma(S_r, r \leq t)$$

La mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est alors appelée **probabilité historique**.

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black & Scholes.

Théorème 6.2.1 *L'EDS* (6.2.1) *admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t \;=\; S_0 \, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à $f(t, W_t)$ avec

$$f \ : \ (t,x) \ \mapsto \ S_0 \, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t,W_t) &= f_x(t,W_t)\, dW_t \ + \ f_t(t,W_t)\, dt \ + \ \frac{1}{2} f_{xx}(t,W_t)\, d\langle W\rangle_t \\ &= \sigma\, f(t,W_t) dW_t \ + \ (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, f(t,W_t)\, dt \ + \ \frac{\sigma^2}{2}\ f(t,W_t)dt \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc :

$$dS_t \ = \ S_t\,(\mu\, dt \ + \ \sigma\, dW_t)$$

Donc S, processus $\mathcal{F}$-adapté est bien solution de l'EDS 6.2.1. Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit Y un processus solution de l'EDS 6.2.1. Remarquons que S_t ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de $\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}\, dS_t \ + \ \frac{1}{2}\,\frac{2}{S_t^3}\, d\langle S\rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t}\,(\mu\, dt \ + \ \sigma dW_t) \ + \ \frac{1}{S_t}\,\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de Y_t/S_t :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t\, d\left(\frac{1}{S_t}\right) \ + \ \frac{1}{S_t}\, dY_t \ + \ d\langle\frac{1}{S}, Y\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t}\,((\sigma^2 - \mu)\, dt \ - \ \sigma dW_t) \ + \ \frac{Y_t}{S_t}\,(\mu\, dt \ + \ \sigma dW_t) \ - \ \sigma Y_t\, \frac{\sigma}{S_t}\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le resultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y,s) \mapsto y/s$. On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} \ = \ \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0\, dW_s \ = \ 1$$

Donc les processus Y et S sont égaux presque surement et l'EDS admet une unique solution.

□

Remarque 6.2.1 On obtient comme dynamique pour le sous-jacent la forme qui avait été obtenue en TD lorsque l'on faisait tendre le nombre de périodes de l'arbre binomial a n périodes vers l'infini.

Remarque 6.2.2 Comme nous avons supposé $\sigma > 0$, La fonction g telle que $S_t = g(W_t)$ est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement brownien W :

$$\boxed{\mathcal{F}_t := \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)}$$

Définition 6.2.1 *Un* ***produit dérivé (ou actif contingent)*** *est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en t à un produit dérivé connu en T et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé. La méthode va être similaire à celle utilisée dans le cas discret :

- On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base actualisé martingale.
- On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille simple autofinançante.
- On va vérifier que toute stratégie de portefeuille simple autofinançante actualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre.
- On en déduira l'absence d'opportunités d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en t s'écrit à un facteur d'actualisation près comme l'espérance sous cette proba risque neutre du flux final.
- Le portefeuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option.

6.3 Probabilité risque neutre

Ecart sur les changements de probabilité

On cherche à construire une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à $\mathbb{P}$. Si $\widehat{\mathbb{P}}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable Z_T telle que $d\widehat{\mathbb{P}} = Z_T \, d\mathbb{P}$, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{F}_T \qquad \widehat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T \, d\mathbb{P}$$

Dire que $\widehat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. $Z_T > 0$. Alors, la densité de Radon Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\widehat{\mathbb{P}}$ est $1/Z_T$.
Pour que $(\Omega, \mathcal{F}_T, \widehat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probabilisé, il faut de plus

$$\widehat{\mathbb{P}}(\Omega) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] \;=\; 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X_T, $\mathcal{F}_T$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_T]$$

On associe naturellement à la v.a. Z_T, le processus martingale $(Z_t)_{0\le t\le T}$ défini par :

$$Z_t \;:=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T|\mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout t et toute variable aléatoire X_t $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_t] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_t] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_t|\mathcal{F}_t]] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t\, X_t]$$

En fait, Z_t est la densité de Radon Nikodym (définie à une modification p.s. près) de $\widehat{\mathbb{P}}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t \;=\; \left.\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$$

Si l'on considère un processus X $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T|\mathcal{F}_t] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t}\, X_T|\mathcal{F}_t\right] \;=\; \frac{1}{Z_t}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z_T\, X_T|\mathcal{F}_t\right]$$

En effet, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée Y_t , on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T\, Y_t] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_T\, Y_t] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_T|\mathcal{F}_t]\, Y_t] \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z_t}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T\, X_T|\mathcal{F}_t]\, Y_t\right]$$

□

Probabilité rendant martingale les valeurs actualisée

Dans toute la suite, tout comme dans le cas discret, on notera $\tilde{Y}$, la valeur actualisée d'un processus Y définie donc par

$$\widetilde{Y}_t \;:=\; \frac{Y_t}{S^0_t} \;=\; e^{-rt}\, Y_t$$

Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque actualisés sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. L'actif sans risque actualisé $\widetilde{S_t^0}$ est constant égal à 1 donc

$$d\widetilde{S_t^0} \;=\; 0$$

Pour l'actif risqué actualisé, il faut appliquer la formule d'Ito :

$$d\widetilde{S_t} \;=\; \frac{1}{S_t^0} dS_t \,+\, S_t\, d\left(\frac{1}{S_t^0}\right) \,+\, d\left\langle S, \frac{1}{S^0}\right\rangle_t \;=\; \widetilde{S_t}[(\mu - r)\, dt \,+\, \sigma\, dW_t]$$

Définition 6.3.1 *Dans le modèle de Black Scholes,* $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$ *est ce que l'on appelle la* ***prime de risque****.*

Introduisons le processus $\widehat{W}$ défini par

$$\widehat{W_t} \;:=\; W_t + \lambda t\,,$$

pout $t \in [0, T]$. La dynamique de $\widetilde{S}$ est alors donnée par

$$d\widetilde{S_t} \;=\; \sigma\, \widetilde{S_t}\, d\widehat{W_t}$$

Si on arrive a construire une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$, équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $\widehat{W_t} = W_t + \lambda t$ est un Mouvement Brownien, cette probabilité rendra l'actif risqué actualisé martingale et sera un très bon candidat pour notre probabilité risque neutre. L'outil qui va nous permettre de démontrer l'existence de cette probabilité est le théorème de Girsanov :

Théorème 6.3.1 ***Théorème de Girsanov***
Il existe une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ *équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ *par :*

$$\left.\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} \;:=\; Z_T \;:=\; e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T}$$

sous laquelle le processus $\widehat{W}$ *défini par*

$$\widehat{W_t} \;:=\; W_t + \lambda t$$

pour tout $t \in [0, T]$*, est un mouvement brownien.*

Démonstration. $\widehat{W}$ est continu p.s. et $\widehat{W}_0 = 0$, c est donc un mouvement brownien sur $[0,T]$ si et seulement si pour tout n, pour tout $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$, les v.a $\widehat{W}_{t_i} - \widehat{W}_{t_{i-1}}$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$. Ceci revient à montrer que pout tout $u_1, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$, on a l'égalité entre fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[e^{i\sum_{j=1}^n u_j(\widehat{W}_{t_j} - \widehat{W}_{t_{j-1}})}\right] = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_i^2}{2}(t_j - t_{j-1})}$$

Ceci se démontre de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[e^{i\sum_{j=1}^n u_j(\widehat{W}_{t_j} - \widehat{W}_{t_{j-1}})}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\prod_{j=1}^n e^{iu_j[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \lambda(t_j - t_{j-1}))]} e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}T}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\prod_{j=1}^n e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + (i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} e^{\frac{(iu_j - \lambda)^2}{2}(t_j - t_{j-1})} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})}
\end{aligned}$$

□

Maintenant que nous avons un candidat pour notre probabilité risque neutre, regardons si elle rend les portefeuilles autofinançants actualisés martingales.

6.4 Portefeuilles autofinançants

Une stratégie de portefeuille consiste en l'investissement à tout instant $t \in [0,T]$ dans une quantité dénotée φ_t d'actif risqué S et d'une quantité φ_t^0 d'actif sans risque S^0. La **valeur du portefeuille** est donc donnée par

$$X_t^{x,\varphi} = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t , \quad t \in [0,T] .$$

Dans le cas discret, nous avons vu que la condition d'autofinancement, qui signifie qu'à chaque date on ré-alloue les richesse entre les différents actifs sans ajout ni retrait d'argent, s'écrivait :

$$X_{t_{i+1}}^{x,\phi} - X_{t_i}^{x,\phi} = \varphi_i^0\left(S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0\right) + \varphi_i\left(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}\right) .$$

Le prolongement continu de **la condition d'autofinancement** est donc naturellement :

$$\boxed{dX_t^{x,\varphi} \;=\; \varphi_t^0 dS_t^0 \;+\; \varphi_t dS_t}$$

Définition 6.4.1 *Une* ***stratégie de portefeuille simple autofinancante*** $X^{x,\varphi}$ *est la donnée d'un capital de départ* x *et d'une stratégie continue d'investissement dans l'actif risqué, soit un processus* $\mathcal{F}$*-adapté* $(\varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ *qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T |\varphi_s \widetilde{S}_t|^2 dt\right] \;<\; \infty$$

A chaque instant t, la quantité φ_t^0 est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille. Cette condition se lit simplement **"La variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus"**. De manière naturelle cette condition doit être stable par changenement de numéraire : quel que soit le numéraire dans lequel sont écrits les actifs (autre monnaie, normalis par S^0, par S) et tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant t par l'information $\mathcal{F}_t$ dont l'on dispose sur le marché en t, la condition d'autofinancement doit être vérifiée. Cette propriété nous est garentie par le résultat suivant.

Proposition 6.4.1 *Pour tout processus d'Ito* Y $\mathcal{F}$*-adapté (appelé numéraire) "qui ne s'annulle pas", la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\varphi}}{Y}\right)_t \;=\; \varphi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t \;+\; \varphi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Démonstration. Appliquons la formule d'intégration par partie aux processus $X^{x,\varphi}$ et $U := \frac{1}{Y}$:

$$\begin{aligned}
d\left(U\,X^{x,\varphi}\right)_t &= U_t dX_t^{x,\varphi} \;+\; X_t^{x,\varphi}\,dU_t \;+\; d\left\langle X^{x,\varphi}, U\right\rangle_t \\
&= U_t(\varphi_t^0 dS_t^0 \;+\; \varphi_t dS_t) \;+\; (\varphi_t^0 S_t^0 \;+\; \varphi_t S_t)\,dU_t \;+\; d\left\langle \varphi^0 S^0 \;+\; \varphi S, U\right\rangle_t \\
&= \varphi_t^0\left(U_t dS_t^0 \;+\; S_t^0 dU_t \;+\; d\left\langle S^0, U\right\rangle_t\right) \;+\; \varphi_t\left(U_t\,dS_t \;+\; S_t dU_t \;+\; d\left\langle S, U\right\rangle_t\right) \\
&= \varphi_t^0 d\left(U\,S^0\right)_t \;+\; \varphi_t d\left(U\,S\right)_t
\end{aligned}$$

La difficulté vient du passage de la deuxième à la troisième ligne, qui nécessite la relation :

$$d\left\langle \varphi^0 S^0 \;+\; \varphi S, U\right\rangle_t \;=\; \varphi_t^0 d\left\langle S^0, U\right\rangle_t \;+\; \varphi_t d\left\langle S, U\right\rangle_t$$

Cette relation vient du fait que la covariation entre 2 processus d'Ito fait uniquement intervenir linéairement leurs parties Browniennes. Or grâce à la condition d'autofinancement, on a :

$$d(\varphi^0 S^0 + \varphi S)_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Donc la partie Brownienne de $\varphi^0 S^0 + \varphi S$ est la somme de celles de S^0 (qui est nulle) et de S ce qui donne le résultat. $\square$

En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire cash S^0 donne :

$$\boxed{d\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\widetilde{S}_t \quad \Rightarrow \quad \widetilde{X}_t^{x,\varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\widetilde{S}_r}$$

et donc la dynamique de la valeur actualisée du portefeuille $\widetilde{X}_t^{x,\varphi}$ sous la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ est

$$d\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\widetilde{S}_t = \sigma\varphi_t \widetilde{S}_t \, d\widehat{W}_t$$

ce qui justifie la forme que l'on a donné a notre condition d'intégrabilité pour rendre $\widetilde{X}$ martingale.

Remarque 6.4.1 Le résultat indiquant que la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire est très utile. Dans notre cas, nous resterons dans le numéraire cash, mais selon le problème auquel on est confronté, il peut être judicieux de changer de numéraire. Nous allons prouver l'existence d'une probabilité risque neutre qui rend martingales les actifs écrits dans le numéraire cash mais on pourrait également choisir de rendre martingales les actifs écrits dans un numéraire différent. En particulier, lorsque les taux ne sont plus supposés constants, le numéraire cash n'est pas toujours le plus adapté, il est plus pratique d'écrire les actifs dans le numéraire Zéro-coupon, on parle alors de Probabilité forward neutre. L'article introduisant le concept de changement de numéraire est du à El Karoui, Geman et Rochet (1995).

Le résultat est donc comme dans le cas discret : "Si l'actif risqué actualisé est un processus d'Ito martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, toute stratégie de portefeuille autofinancée actualisée l'est également"

Proposition 6.4.2 *La probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ construite précédement est une probabilité risque neutre. La valeur en t de toute stratégie autofinançante (x, φ) de flux final $X_T^{x,\varphi} = h_T$ $\hat{\mathbb{P}}$-intégrable est*

$$\boxed{X_t^{x,\varphi} = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h_T | \mathcal{F}_t]}$$

Démonstration. Les dynamiques de $\widetilde{S}$ et de $\widetilde{X}^{x,\varphi}$ sous $\widehat{\mathbb{P}}$ sont données par

$$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t d\widehat{W}_t \Rightarrow d\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\widetilde{S}_t = \sigma\varphi_t\widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Donc grâce aux conditions d'intégrabilité de φ, $\widetilde{X}^{x,\varphi}$ est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$ et donc :

$$X_t^{x,\varphi} = e^{rt}\widetilde{X}_t^{x,\varphi} = e^{rt}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[\tilde{X}_T^{x,\varphi}|\mathcal{F}_t] = e^{rt}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}X_T^{x,\varphi}|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h_T|\mathcal{F}_t]$$

□

Proposition 6.4.3 *L'existence d'une probabilité risque neutre $\widehat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA' entre stratégies de portefeuille simple autofinançantes.*

Démonstration. Si $X_T^{0,\varphi} \geq 0$, comme $\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T^{0,\varphi}] = e^{rT}\, 0$, $X_T^{0,\varphi} = 0$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\widehat{\mathbb{P}}$ qui est également un ensemble de mesure nulle pour $\mathbb{P}$. □

Nous venons donc de voir que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage entre portefeuilles simples est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

La valeur en t de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre $\widehat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous $\widehat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé.

Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif sans risque actualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique	Probabilité risque neutre
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$	$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, d\widehat{W}_t$
Actif risqué actualisé	$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$	$d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t\, d\widehat{W}_t$

6.5 Duplication d'un produit dérivé

Tout d'abord, remarquons le caractère Markovien du processus S :

Proposition 6.5.1 *Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$ avec h fonction mesurable telle que $h(S_T)$ est $\hat{\mathbb{P}}$-intégrable. Alors il existe une fonction $v : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que*

$$v(t, S_t) \quad = \quad e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Dans le modèle de Black Scholes, la valeur du sous-jacent en t est :

$$S_t \quad = \quad S_0 \, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \widehat{W}_t}$$

On en déduit que :

$$S_T \quad = \quad S_t \, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)}$$

L'espérance conditionnelle se réécrit donc

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] \quad = \quad e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_t \, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)} \right) |\mathcal{F}_t \right]$$

Or la variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. On en déduit grâce aux propriétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] \quad = \quad v(t, S_t)$$

avec la fonction v définie par :

$$v \ : \ (t,x) \quad \mapsto \quad e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(x \, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)} \right) \right]$$

□

Proposition 6.5.2 *Si l'on suppose que $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^+)$, alors il existe une stratégie autofinancante (x, φ) qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que $X_t^{x,\varphi} \ = \ v(t, S_t)$ pour tout $t \in [0,T]$, et les quantités x et φ sont données par :*

$$x \ := \ e^{-rT} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \qquad \varphi_t \ := \ \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) \ , \qquad t \in [0,T] \ .$$

En AOA, le prix en t du produit de flux final $h(S_T)$ est donc $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$.
De plus le prix de l'option $v(t,S_t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, v_{xx}(t,x) + rx\, v_x(t,x) + \, v_t(t,x) - r\, v(t,x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad v(T,x) \;=\; h(x) \quad (6.5.1)$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*$.

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution v^* (dont la dérivée partielle $\partial_x v^*(t,x)$ est bornée), alors $v^*(t,S_t)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$.

Démonstration.
1. Duplication du produit dérivé
Supposons que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur $[0,T]$ par :

$$U_t \;:=\; e^{-rt}v(t,S_t) \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}\, h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$, en effet

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[U_t|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}\, h(S_T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}\, h(S_T)|\mathcal{F}_s] \;=\; U_s$$

pour tout $s \le t$. Remarquons que l'on peut écrire

$$U_t \;=\; u(t,\tilde{S}_t) \qquad \text{avec} \quad u : (t,x) \;\mapsto\; e^{-rt}\, v(t, e^{rt}x)$$

Alors $u \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$ et la formule d'Ito nous donne

$$\begin{aligned} dU_t \;&=\; u_x(t,\widetilde{S}_t)d\widetilde{S}_t \,+\, u_t(t,\widetilde{S}_t)dt \,+\, \frac{1}{2}u_{xx}(t,\widetilde{S}_t)d\langle\widetilde{S}\rangle_t \\ &=\; \sigma\widetilde{S}_t u_x(t,\widetilde{S}_t)d\widehat{W}_t \,+\, \left(u_t(t,\widetilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{S}_t^2\, u_{xx}(t,\widetilde{S}_t)\right)dt \end{aligned}$$

Le processus U est un processus d'Ito martingale donc sa partie en dt est nulle et l'on obtient finalement :

$$U_t \;=\; U_0 \,+\, \int_0^t u_x(r,\widetilde{S}_r)d\widetilde{S}_r\;, \quad t\in[0,T]\;.$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x \;:=\; U_0 \;=\; e^{-rT}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \text{et} \quad \varphi_t \;:=\; u_x(t,\widetilde{S}_t) \;=\; v_x(t,S_t)\;, \quad t\in[0,T]\;.$$

Par construction, U est une vraie martingale donc (x, ϕ) est une stratégie de portefeuille et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est donnée par

$$\widetilde{X}_t^{x,\varphi} \;=\; x + \int_0^t \varphi_r \, d\widetilde{S}_r \;=\; U_0 \;+\; \int_0^t u_x(r, \widetilde{S}_r) d\widetilde{S}_r \;=\; U_t$$

pour tout $t \in [0, T]$. Le portefeuille $X^{x,\varphi}$, qui vérifie de bonnes conditions d'intégrabilité car U est une martingale, est donc bien un portefeuille de duplication car il vérifie :

$$X_T^{x,\varphi} \;=\; e^{rT} U_T \;=\; v(T, S_T) \;=\; e^{-r(T-T)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_T] \;=\; h(S_T) \; .$$

2. EDP d'évaluation

Le processus U est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$ donc la partie en dt de sa décomposition en processus d'Ito est nulle ce qui s'écrit :

$$u_t(t, \widetilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}_t^2 \, u_{xx}(t, \widetilde{S}_t) \;=\; 0$$

Or par définition de u, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &\;=\; -r\, e^{-rt} \, v(t, e^{rt}x) \;+\; e^{-rt} \, v_t(t, e^{rt}x) \;+\; rx \, v_x(t, e^{rt}x) \\ \text{et} \quad u_{xx}(t, x) &\;=\; (e^{rt})^2 \, v_{xx}(t, e^{rt}x) \end{aligned}$$

Donc l'EDP en u se réécrit comme une EDP en v de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \, v_{xx}(t, S_t) + rS_t \, v_x(t, S_t) + \, v_t(t, S_t) - r\, v(t, S_t) \;=\; 0$$

avec la condition terminale $v(T, S_T) = h(S_T)$. L'idée pour obtenir l'EDP en tout x est que le mouvement brownien W_t diffuse sur tout $\mathbb{R}$, donc S_t diffuse sur tout $\mathbb{R}_*^+$ (car $\sigma > 0$) et par conséquent v est solution sur $\mathbb{R}^+$ de :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \, v_{xx}(t, x) + rx \, v_x(t, x) + \, v_t(t, x) - r\, v(t, x) \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad v(T, x) \;=\; h(x)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$

3. Réciproque

Si v^* est solution de l'EDP précédente. Introduisons le processus $U_t^* := e^{-rt} v^*(t, S_t)$ et u^* la fonction associée. Alors la dynamique de U^* est donnée par

$$dU_t^* \;=\; \sigma \widetilde{S}_t u_x^*(t, \widetilde{S}_t) d\widehat{W}_t \;+\; \left(u_t^*(t, \widetilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}_t^2 \, u_{xx}^*(t, \widetilde{S}_t) \right) dt$$

Comme v^* est solution de l'EDP, le terme en dt est nul et l'on obtient que :

$$U_t^* \;=\; U_0 \;+\; \int_0^t u_x^*(r,\widetilde{S}_r)d\widetilde{S}_r$$

Donc, la dérivé v_x^* bornée assurant les conditions d'intégrabilité suffisantes car l'actif riqué actualisé a des moments à tout ordre (cf TD 4), U^* est une martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}$. On en déduit que, pour tout $t \in [0,T]$:

$$v^*(t,S_t) \;=\; e^{rt}\,U_t^* \;=\; e^{rt}\,\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[U_T^*|\mathcal{F}_t] \;=\; e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Donc $v^*(t,S_t)$ est bien le prix en t du produit dérivé $h(S_T)$. $\square$

Remarque 6.5.1 Supposer que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$ n'est pas restrictif. On pourrait penser qu'il est nécessaire que la fonction payoff h soit régulière mais en fait, grâce à des intégrations par partie, on peut renvoyer l'opérateur de dérivation sur la densité du sous-jacent qui est suffisamment régulière.

Remarque 6.5.2 Le résultat indiquant que le prix Black Scholes de payoff $h(S_T)$, donné par

$$v(t,x) \;:=\; e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)/S_t = x]\,, \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\,,$$

est solution de l'EDP (6.5.1) est une résultat très important connu sous le nom plus général de formule de Feynman-Kac. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste.

Remarque 6.5.3 En fait tout produit dérivé de carré intégrable est duplicable. Ceci est du au fait que la dimension du Brownien est égale à celle de l'actif sans risque. Il y a autant d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir.

Proposition 6.5.3 *La probabilité risque neutre est unique.*

Démonstration. Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinançant actualisé martingale. Supposons que l'on ait deux probabilités risques neutres $\widehat{\mathbb{P}}_1$ et $\widehat{\mathbb{P}}_2$. Pour tout $\mathcal{B}$ élément de $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est une v.a. $\mathcal{F}_T$ mesurable et de carré intégrable donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille (x,φ) qui est martingale sous $\widehat{\mathbb{P}}_1$ et $\widehat{\mathbb{P}}_2$ et l'on a :

$$\widehat{\mathbb{P}}_1(\mathcal{B}) \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] \;=\; e^{rT}\,x \;=\; \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] \;=\; \widehat{\mathbb{P}}_2(\mathcal{B})$$

$\square$

6.6 Formule de Black Scholes

Le prix en t d'une option Européennee de payoff $h(S_T)$ est de la forme $v(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S_t) \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

et de plus la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, v_{xx}(t,x) + rx\, v_x(t,x) + \, v_t(t,x) - r\, v(t,x) \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad v(T,x) \;=\; h(x)$$

Dans le cadre du modèle de Black Scholes, pour certains pay-offs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call et du Put.

Proposition 6.6.1 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t \;=\; S_t\mathcal{N}(d_1) \;-\; K\, e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)\;, \quad t \in [0,T]$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 \;:=\; \frac{ln(\frac{S_t}{K}) \;+\; (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \textit{et} \quad d_2 \;:=\; d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de Parité Call Put s'écrit :

$$C_t - P_t \;=\; S_t \;-\; Ke^{-r(T-t)}\;, \quad t \in [0,T]$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t \;=\; K\, e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) \;-\; S_t\mathcal{N}(-d_1)\;, \quad t \in [0,T]$$

Démonstration.
Prix du Call : Le prix du call en t est donné par :

$$C_t \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t] \;=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\left(S_t\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)} - K\right)^+ |\mathcal{F}_t\right]$$

Donc, comme nous l'avons déja vu $C_t = v(t, S_t)$ avec

$$\begin{aligned} v(t,x) \;&=\; e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\left(x\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)} - K\right)^+\right] \\ &=\; x\,\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[e^{\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)\,-\,\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\right] \;-\; K\, e^{-r(T-t)}\,\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}$ le région d'exercice donnée par :

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{x\, e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)} \;>\; K\right\} \;=\; \left\{\frac{\widehat{W}_t-\widehat{W}_T}{\sqrt{T-t}} \;<\; \frac{ln(\frac{x}{K}) \,+\, (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}$$

Introduisons, la probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ définie par :

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\widehat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_T} \;=\; Z_T \;:=\; e^{\sigma\widehat{W}_T-\frac{\sigma^2}{2}T}$$

Alors, comme $\mathcal{E}$ est un évènement indépendant de $\mathcal{F}_t$, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\frac{Z_T}{Z_t}\right] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\frac{1}{Z_t}\right] \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\right]\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{Z_t}\right] \;=\; \mathbb{P}^*(\mathcal{E})$$

Par conséquent, $v(t,x)$ se réécrit :

$$v(t,x) \;=\; x\,\mathbb{P}^*(\mathcal{E}) \,-\, K\,e^{-r(T-t)}\,\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$$

D'après le théorème de Girsanov, le processus W^* défini par $W_t^* := \widehat{W}_t - \sigma t$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$. Or $\mathcal{E}$ se réécrit :

$$\mathcal{E} = \left\{\frac{\widehat{W}_t-\widehat{W}_T}{\sqrt{T-t}} < \frac{ln(\frac{x}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} = \left\{\frac{W_t^*-W_T^*}{\sqrt{T-t}} < \frac{ln(\frac{x}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} .$$

Donc, comme $\frac{\widehat{W}_t-\widehat{W}_T}{\sqrt{T-t}}$ et $\frac{W_t^*-W_T^*}{\sqrt{T-t}}$ suivent respectivement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\widehat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}^*$, le prix du call se réécrit :

$$C_t \;=\; v(t,S_t) \;=\; S_t\mathcal{N}(d_1) \,-\, K\,e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \;.$$

Prix du Put : Appliquez la formule de parité Call Put et remarquez que par symétrie $\mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(-x)=1$. □

Remarque 6.6.1 Le prix d'un call en t est de la forme $C(T-t,\sigma,S_t,r,K)$. et vérifie la relation d'homogénéité :

$$C(T-t,\sigma,\lambda\,S_t,r,\lambda\,K) \;=\; \lambda\,C(T-t,\sigma,S_t,r,K) \;.$$

6.7 Sensibilités

Les sensiblités du prix d'une option par rapport à ses différents paramêtres sont appelés les Grecques :

- le Delta Δ est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent ;
- le Theta θ est la sensibilité du prix par rapport au temps écoulé t ;
- Le Vega est la sensibilité du prix par rapport à la volatilité ;
- Le Rho ρ est la sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt r ;
- le Gamma Γ est la sensibilité du delta par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent.

L'EDP vérifiée par le prix d'une option vanille se réécrit alors :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma + r\, x\, \Delta - r\, P + \theta \;=\; 0$$

Dans le cas d'un Call, les valeur en $t = 0$ des Grecques sont :

$$\Delta = \mathcal{N}(d_1) > 0 \qquad \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_1) > 0 \qquad \rho = TKe^{-rT}\mathcal{N}(d_2) > 0$$
$$\theta = -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_1) - K\, r\, e^{-rT}\mathcal{N}(d_2) < 0 \qquad Vega = x\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_1) > 0$$

Dans le cas d'un Put, les valeur en $t = 0$ des Grecques sont :

$$\Delta = -\mathcal{N}(-d_1) > 0 \qquad \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_1) > 0 \qquad \rho = TKe^{-rT}(\mathcal{N}(d_2) - 1) < 0$$
$$\theta = \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\mathcal{N}'(d_1) + K\, r\, e^{-rT}\,(\mathcal{N}(d_2) - 1) \qquad Vega = x\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_1) > 0$$

Le Delta s'interprète comme la quantité d'actif du portefeuille de duplication de l'option. On parle de couverture en Delta neutre.

Pour une couverture en temps discret, il suffit de réajuster le Delta à chaque date discrete. Par contre, pour une couverture en temps continu, c'est le Gamma qui nous indique la fréquence à laquelle la position de couverture doit être modifiée. Si le Gamma est faible, le delta varie peu et la couverture en Delta n'a pas besoin d'être modifiée. Par contre si le Gamma est élevé, il faut souvent et significativement reconsidérer le nombre d'actions en portefeuille.

Le Vega est important car il donne la dépendance du prix en la volatilité du sous-jacent qui est le paramètre difficile et primordial à calculer. Plus le Vega est grand, plus le risque d'erreur de calibration est grand.

Le Theta mesure la diminution du prix de l'option au cours du temps.

La dépendance des prix d'un Call et d'un Put sans dividendes en leurs paramètres sont les suivantes

	Δ	Θ	$Vega$	ρ	Γ
$Call$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
Put	$-$	$?$	$+$	$-$	$+$