Feuilles de travaux dirigés

Le symbole $\diamond$ indique un exercice difficile.

1 Révisions

Exercice 1. (sous-espaces vectoriels) Soit les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 2y + z \geq 0\}$,
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy - yz = 0\}$,
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y = 1\}$,
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y + z = 0\}$,
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 2y^2 + 4z = 0\}$,
6. $E_6 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$,
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0\}$.

Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et en donner la dimension et une base, dire s'il s'agit de l'espace entier ou en donner un supplémentaire.

Exercice 2. Soit les familles de vecteurs suivantes :

1. $\{(9, 2), (8, -3), (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})\}$,
2. $\{(6, 0, -5), (-1, 2, 1), (0, 1, -1)\}$,
3. $\{(5, -4, 7, 8), (-\frac{5}{2}, 3, 1, -2)\}$,
4. $\{(-1, 2, 1, 4), (0, 3, -1, 2), (-2, 1, 3, 6)\}$.

Sont-elles libres ? (on pourra dans certains cas utiliser deux méthodes différentes pour répondre) Donner dans chaque cas la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille.

Exercice 3. (espaces des matrices)

1. Montrer que $M_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.
2. Montrer que $M_2(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients complexes, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 4. Montrer que la famille $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Est-elle génératrice ?

Exercice 5. De ces parties de $\mathscr{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

— les fonctions positives,
— les fonctions 2π-périodiques,
— les fonctions périodiques,
— les fonctions dérivables,
— les fonctions qui sont dérivables en au moins un point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Lesquelles des applications de E dans F suivantes sont linéaires ?

— la dérivation,
— $f \mapsto f(x - 2)$,
— $f \mapsto f(x) - 2$,
— la fonction g étant fixée, $f \mapsto fg$, $f \mapsto f \circ g$ (composition), $f \mapsto g \circ f$.

Exercice 7. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.

1. Montrer que $\{1, X, X^2\}$ et $\{1, X - 1, X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\{1, X, X^2\}$ vers $\{1, X - 1, X^2\}$.
3. Déterminer la matrice de l'application $P \mapsto P'$ dans ces deux bases.

Exercice 8. (diagonalisation)

1. Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est
   $$\chi_A(X) = -X^3 + 5\,X^2 + X - 5.$$
   (b) Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique (on pourra trouver deux racines particulières d'écriture simple).
   (c) Diagonaliser la matrice A.
2. Soit B la matrice suivante
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de B ainsi que les racines de celui-ci.
   (b) Si B était diagonalisable, quelle serait la matrice diagonale en question ? En déduire que B n'est pas diagonalisable.

2 Normes dans les espaces vectoriels

Exercice 9. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur E.
$$\|a_2\,X^2 + a_1\,X + a_0\|_1 = \max(|a_2 + a_1|, |a_1|, |a_0|),\ \ \|P\|_2 = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x \text{ et } \|P\|_3 = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)|.$$
2. Les applications suivantes sont-elles des normes ?
$$\|a_2\,X^2 + a_1\,X + a_0\|_4 = \max(|a_2 + a_1|, {a_1}^2 + {a_0}^2) \text{ et } \|P\|_5 = |P(0)| + |P(2)| + |P'(1)|.$$

Exercice 10.

1. Montrer que les applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \end{aligned}$$
   sont des normes [1]. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_1 + \|x\|_2$ définit encore une norme. L'application $x \mapsto \|x\|_2 - \|x\|_1$ définit-elle encore une norme ? Et l'application $x \mapsto \|x\|_1 - \|x\|_2$?
2. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes (à la main !).

Exercice 11. Sur l'espace $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, on définit les applications suivantes :
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$
Montrer qu'il s'agit de normes. Exhiber une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ telles que $\|f_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout entier naturel n. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 12. (norme de Frobenius) Pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$. Montrer que l'application N est une norme vérifiant de plus la propriété, dite de sous-multiplicativité, suivante
$$N(AB) \leq N(A)N(B)$$
pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n. Cette norme est-elle associée à un produit scalaire ?

1. On admettra l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_2$, que l'on sera en mesure de démontrer plus tard.

Exercice 13. $\diamond$ **(calcul de normes matricielles subordonnées)** Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on définit les normes subordonnées suivantes :

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty,$$
$$\|A\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1,$$
$$\|A\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2.$$

Montrer que

1. $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$,
2. $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,
3. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$, où $\rho(A)$ est la valeur absolue de la plus grande valeur propre de A (encore appelée rayon spectral).

3 Produit scalaire et espace euclidien

Exercice 14. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, bilinéaires, symétriques, positives, non dégénérées et si elles sont des produits scalaires. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
$$f_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3.$$
2. f_2 définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par
$$f_2((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1^2 + y_3^2 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3.$$
3. f_3 définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par
$$f_3((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$
4. f_4 sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par
$$f_4(P,Q) = (a_0+a_1)b_0 + (a_0+3a_1)b_1 + 3\,a_2b_2$$
avec $P(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2$ et $Q(X) = b_0 + b_1\,X + b_2\,X^2$.

Exercice 15. Soit a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + b\,x_1y_2 + b\,x_2y_1 + a\,x_2y_2.$$

Donner, lorsqu'il y en a, les valeurs de a et b pour lesquelles f est

1. linéaire en la première variable,
2. linéaire en la deuxième variable,
3. symétrique,
4. positive,
5. non dégénérée,
6. un produit scalaire.

Exercice 16. (le cas complexe) Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, antilináires en la deuxième, sesquilinéaires, symétriques hermitiennes, positives, non dégénérées et si elles sont des produits scalaires. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. f_1 définie sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ par
$$f_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1\bar{y}_1 - 2ix_2\bar{y}_2 + (1+i)\overline{x}_2y_1 + x_3\overline{y}_2.$$
2. f_2 définie sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ par
$$f_2((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1\bar{y}_1 - 2x_2\overline{y}_2 + \overline{y}_3x_3.$$

3. f_3 définie sur $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients complexes, par
$$f_3(A, B) = \mathrm{tr}({}^t A\overline{B}).$$
4. f_4 définie sur $E \times E$, avec $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, par
$$f_4(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 17. (inégalité de Cauchy–Schwarz) Soit E un espace euclidien sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$, et deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E.

1. Montrer que si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, on a
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|,$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée à $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$.
2. On suppose que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires. En utilisant le fait que $\boldsymbol{v} + t\,\boldsymbol{u}$ est non nul pour tout réel t, montrer que
$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$, on a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right).$$
En déduire que
$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right).$$

Exercice 19. Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles. On définit pour tout f et pour tout g dans E
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. En déduire que
$$\forall (f,g) \in E^2,\ |\langle f, g\rangle| \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 20. Soit f une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite donnée par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Exercice 21. $\diamond$ On considère l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe-t-il un polynôme R tel que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, R\rangle = P(0)$?

Exercice 22. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on suppose que $\|Ax\|_2 \leq \|x\|_2$. Montrer que $\|{}^tAx\|_2 \leq \|x\|_2$.
Indication : on pourra majorer $\|{}^tAx\|_2^2$.

Exercice 23. $\diamond$ **(théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'*identité du parallélogramme* [2],
$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2,\ \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right).$$
On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. Pour cela, on définit la forme f suivante :
$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2,\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2\right).$$

2. En géométrie, la règle du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

1. Montrer que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de E^3, on a $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = 2\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
2. Montrer que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de E^2, on a $f(2\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
3. Montrer que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de E^2 et tout rationnel r, on a $f(r\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
4. Montrer que pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de E^3, $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.
5. Montrer que f est symétrique et définie positive.
6. Déduire des questions précédentes que f est bilinéaire et conclure.

4 Procédé de Gram–Schmidt

Exercice 24. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soit les vecteurs

$$u_1 = (0,0,0,1),\; u_2 = (1,0,1,0),\; u_3 = (1,-3,0,2),\; u_4 = (3,-3,-2,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthogonaliser $\mathcal{B}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 25. Appliquer le procédé de Gram–Schmidt à la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 26. $\diamond$ **(inégalité de Hadamard)** Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer que, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leq \|x_1\|_2 \ldots \|x_n\|_2$, en précisant les cas d'égalité.

5 Projections

Exercice 27. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de la structure euclidienne canonique. Soit D la droite de vecteur directeur $u = (1,2,0)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 28. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

1. Quelles sont les dimensions de F et $F^\perp$? Donner un système d'équations cartésiennes de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 29. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère les vecteurs $\boldsymbol{v_1} = (1,2,-1,1)$ et $\boldsymbol{v_2} = (0,3,1,-1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^\perp$.

Exercice 30. Prouver l'existence et l'unicité des réels a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$ soit minimum. Les calculer.

Exercice 31. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2,\; \langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$.

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. On pose

$$I(a,b) = \int_0^\pi (a \,\sin(t) + b\,\cos(t) - c)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Déterminer les réels a_0 et b_0 réalisant

$$I(a_0, b_0) = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} I(a,b)$$

et calculer $I(a_0, b_0)$.

Exercice 32. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que le sous-ensemble F de E formé des polynômes P tels que $P(1) = 0$ est un plan vectoriel de E.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant égal à 1 sur F.

Exercice 33. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2\,x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right.$$

dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice 34. Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre n, muni du produit scalaire usuel

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

1. Soit D_0 le sous-espace vectoriel des matrices scalaires

   $$D_0 = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   Déterminer $D_0^{\perp}$ et les projections orthogonales sur D_0 et $D_0^{\perp}$.
2. Faire de même pour le sous-espace D_1 des matrices diagonales.

Exercice 35. On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels d'ordre 3, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal de $A_3(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $A_3(\mathbb{R})$.

Exercice 36. $\diamond$ Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p ($p > 2$) sur $\mathbb{R}$, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour toute famille de vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ donnée de E, on pose $G(u_1, \ldots, u_n) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1 \le i,j \le n}$ (*matrice de Gram*) et $\gamma(u_1, \ldots, u_n) = \det(G(u_1, \ldots, u_n))$ (*déterminant de Gram*).

1. Montrer que $\mathrm{rang}(G(u_1, \ldots, u_n)) = \mathrm{rang}(\{u_1, \ldots, u_n\})$.
2. Montrer que la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est liée si et seulement si $\gamma(u_1, \ldots, u_n) = 0$ et qu'elle est libre si et seulement si $\gamma(u_1, \ldots, u_n) > 0$.
3. On suppose maintenant que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre dans E (et donc que $n \le p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\})$. Pour x dans E, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$ la distance de x à F. Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, u_1, \ldots, u_n)}{\gamma(u_1, \ldots, u_n)}}$.

Exercice 37. Déterminer la matrice dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ de

— la projection orthogonale sur la droite d'équations $3\,x_1 = 6\,x_2 = 2\,x_3$,
— la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$,
— la projection orthogonale sur le plan d'équation $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$.

Exercice 38. (un modèle de régression linéaire) Un médecin imagine que la taille des enfants doit croître, grossièrement, proportionnellement à leur masse. Il doit donc exister une relation mathématique du type

$$\text{taille en cm} \simeq a + b \times \text{masse en kg}.$$

Afin de calculer a et b, le médecin mesure 10 enfants volontaires agés de 6 ans et obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille (en cm)	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
Masse (en kg)	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

Le médecin, bien que peut-être reconnu en pédiatrie, est malheureusement un piètre mathématicien. Il a donc calculé, en désespoir de cause et sans trop comprendre pourquoi les différentes moyennes suivantes :

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{10} M_i/10 = 20,3 \text{ kg}, \quad \overline{T} = \sum_{i=1}^{10} T_i/10 = 113,2 \text{ cm},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{10} \left(M_i - \overline{M}\right)^2/10 = 7,61 \text{ kg}^2, \quad R = \sum_{i=1}^{10} T_i M_i/10 = 2615,1 \text{ kg.cm}.$$

Aider le médecin en donnant (et en la justifiant) une expression de a et b en fonction des différentes moyennes $\overline{M}$, $\overline{T}$, R et σ. Calculer (de manière approchée) a et b et commenter, si possible, les résultats en utilisant les ratios (approchés) suivants :

$$\frac{R}{\sigma} = 344, \quad \frac{R\overline{M}}{\sigma} = 6976, \quad \frac{\overline{TM}}{\sigma} = 302, \quad \frac{\overline{TM}^2}{\sigma} = 6130.$$

6 Matrices orthogonales

Exercice 39. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales et décrire géométriquement les isométries de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique,

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40. Préciser la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés dans la base canonique par les matrices suivantes,

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ϕ est une rotation et déterminer son axe.

Exercice 42. Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par le vecteur $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e_1} - 2\,\boldsymbol{e_2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 43. Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera A^T la transposée de A.

1. Montrer que si X et Y sont des vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres λ et μ avec $\lambda \notin \{\mu, \overline{\mu}\}$, alors $X^T Y = 0$ et $X^T \overline{Y} = 0$.
2. Soit $\lambda = e^{\mathrm{i}\alpha}$, $0 < \alpha < \pi$, une valeur propre (complexe) de A et X un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que $X^T X = 0$.
   (b) Soit $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$ et $V = \frac{1}{2\mathrm{i}}(X - \overline{X})$. Montrer que si Z est un vecteur propre de A associé à une valeur propre réelle, alors $U^T Z = 0$ et $V^T Z = 0$.
   (c) Soit $\mu = e^{\mathrm{i}\beta}$, $0 < \beta < \pi$, $\beta \neq \alpha$, une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Calculer $(X + \overline{X})^T (Y + \overline{Y})$.

Exercice 44. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f(x, y)$, $f(x, x)$ et $f(y, y)$ dans les deux cas suivants.

(a) $x = e_1 + \mathrm{i}e_2$ et $y = e_1 - e_2$.

(b) $x = e_1 + 2e_2$ et $y = \mathrm{i}e_2$.

2. Trouver une nouvelle base de E par rapport à laquelle la matrice de f est la matrice unité I_2. En déduire une matrice inversible P telle que $P^T M P = I_2$.

Exercice 45. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Exercice 46.

1. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ? Calculer $U\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.
2. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et U une matrice orthogonale $U \in O(2)$ telle que $Uv = v$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, soit $\det(U) = -1$.

Exercice 47. (matrice de Householder) Pour tout élément u non nul de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on désigne par $H(\boldsymbol{u})$ la matrice

$$H(\boldsymbol{u}) = I_n - 2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}$$

où le vecteur colonne $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ représente u dans la base canonique.

1. Soit Q une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que si $\boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{u}$ alors $H(\boldsymbol{v}) = QH(\boldsymbol{u})Q^T$.
2. Montrer que la matrice $H(\boldsymbol{u})$ est symétrique et orthogonale.
3. On désigne par $\mathcal{D}$ la droite vectorielle engendrée par u et par $\mathcal{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par $H(\boldsymbol{u})$ et que $H(\boldsymbol{u})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ pour tout vecteur colonne $\boldsymbol{w}$ représentant un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

Exercice 48. (valeurs propres réelles d'une isométrie) On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et Q une matrice orthogonale d'ordre n.

1. On suppose que Q admet une valeur propre réelle λ et on considère un vecteur propre x associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons différentes $\|Qx\|^2$, montrer que $\lambda^2\|x\|^2 = \|x\|^2$.
2. En déduire que $\{-1, 1\} \subset sp(Q)$.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale d'ordre 2 qui ne possède pas de valeur propre réelle.

Exercice 49. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$. On considère l'endomorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Exercice 50. Soit $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in O(n)$. Montrer que $|\sum_{i,j=1,\ldots,n} m_{ij}| \leq n$.

7 Formes bilinéaires

Exercice 51. Pour chacune des matrices suivantes, écrire l'expression de la forme bilinéaire associée et indiquer si la forme est symétrique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 52. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre 2. On considère l'application f de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour toutes matrices A et B, par $f(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Prouver que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Prouver que pour tout A de E, $f(A, A) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $A = 0_2$.
3. Donner la matrice représentant f dans la base canonique $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.
4. En déduire le rang de f.

Exercice 53. On définit l'application f de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f : (A, B) \mapsto \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que f est une forme bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 54. $\diamond$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire telle que

$$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E \times E, \ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Montrer que f est soit symétrique, soit antisymétrique.

Exercice 55. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall(P, Q) \in E^2, \ f(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice B représentant f dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de E.
3. Quel est le rang de f ?
4. La forme f est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Déterminer sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
5. A-t-on $f(P, P) \geq 0$ pour tout polynôme P ? À quelle condition sur P a-t-on $f(P, P) = 0$?

Répondre aux mêmes questions avec $f(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(1 - t)\,\mathrm{d}t$ et $f_k(P, Q) = \sum_{i=1}^k P(i)Q(i)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 56. Soit A une matrice.

1. Montrer que ${}^tAA$ est symétrique et positive.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}({}^tAA)$, puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$.

8 Formes quadratiques

Exercice 57. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 4\,{x_2}^2 - 3\,x_1x_2.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la forme bilinéaire symétrique f associée à q.
3. Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

Exercice 58. Effectuer une réduction de Gauss et déterminer la signature, le rang et le noyau des formes quadratiques suivantes.

1. $q(x_1, x_2, x_3) = 2\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 - {x_3}^2 - 4\,x_1x_2 - 2\,x_2x_3 - 2\,x_1x_3$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 3\,{x_3}^2 - 2\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 5\,{x_2}^2 + 3\,{x_3}^2 + 4\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$ sur $\mathbb{R}^3$.

4. $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + (1+a){x_2}^2 + (1+a+a^2){x_3}^2 + 2\,x_1x_2 - 2a\,x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$ (on discutera suivant la valeur du paramètre réel a).
5. $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - a\,{x_3}^2 + 3\,x_1x_2 - b\,x_1x_3 + x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
6. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$ sur $\mathbb{R}^4$.
7. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = {x_1}^2 + (1+2a-b)\,{x_2}^2 + (1+a)\,{x_3}^2 + (1+2a+b)\,{x_4}^2 + 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 2\,x_1x_4 + 2(1-a)x_2x_3 - 2(1+a)x_2x_4 + 2(a-1)\,x_3x_4$ sur $\mathbb{R}^4$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
8. $q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 + 2\,x_5x_4$ sur $\mathbb{R}^5$

Exercice 59. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ suivantes. Ces formes sont-elles positives ? Négatives ?

1. $q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j$.
2. $q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} j^2x_ix_j$.

Exercice 60. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 10\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3.$$

1. Déterminer la matrice Q de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer par le critère de Sylvester que la forme q est définie positive.
3. De la même façon, étudier la forme $q(x_1, x_2, x_3) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 9\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$.

Exercice 61. On considère deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ d'un espace euclidien E de dimension n ($n \geq 2$), dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la forme quadratique q définie par

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ q(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

1. Vérifier que la forme polaire f de q est donnée par

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2,\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \frac{1}{2}\left[\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}\rangle\right].$$

2. On suppose dans cette question que les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{u}$. Exprimer la forme q en fonction du vecteur $\boldsymbol{u}$ et du réel λ. En déduire le rang et la signature de q en fonction de la valeur de λ.
3. On suppose dans suite de l'exercice que les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires et l'on pose $\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{w} \in (\mathrm{Vect}\{\boldsymbol{u}\})^{\perp}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$. Écrire la forme polaire de q en fonction de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ et λ.
4. Soit $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ une base orthonormée de E telle que $\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ et $\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$. Exprimer la matrice de la forme polaire de q dans la base $\mathcal{B}$, en fonction de λ, $\|\boldsymbol{u}\|$ et $\|\boldsymbol{w}\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de q lorsque $\lambda = 0$? Quel est le rang de q lorsque $\lambda \neq 0$?

Exercice 62. Soit q la forme définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. La forme q est-elle positive ? Négative ?
4. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q\left(\sum_{i=1}^{2} a_iP_i\right) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

Exercice 63. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$f(P, Q) = \int_0^1 t\,P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } q(P) = f(P, P).$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.
3. Calculer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?

5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q-orthogonale.

Exercice 64. Soit q la forme sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner son noyau,
2. Montrer que la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques est définie positive.
3. Donner une base de $M_n(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice Q associée à q est diagonale. Écrire Q et donner la signature de q.

Exercice 65. Soit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a - d = 0 \right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes matrices M et N de V, on pose

$$f(M, N) = \operatorname{tr}(MJN).$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de V.
3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la signature de q, son rang et son noyau. Cette forme est-elle définie ? Positive ? Négative ?
5. Déterminer $F^{\perp}$, le q-orthogonal de l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a - d = 0 \right\}.$$

Exercice 66. Soit une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on suppose *définie*. Montrer qu'elle garde un signe constant.

Exercice 67. Soit λ et μ deux nombres réels. On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la forme q suivante

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ q(M) = \lambda \operatorname{tr}(M^2) + \mu \det(M).$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique.
2. Déterminer en fonction de λ et de μ le rang et la signature de q.
   Indication : séparer en deux cas : $\lambda = 0$, puis $\lambda \neq 0$.

Exercice 68. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la forme q définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ q(P) = \int_{-1}^{1} P(t)P(-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que tout polynôme P peut s'écrire comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.
2. Montrer que q est une forme quadratique et calculer sa signature.

Exercice 69. (produit de Schur de deux matrices) Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \ge 2$). On définit le produit de Schur de A et de B comme étant la matrice $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{1\le i,j\le n}$.

1. Si A est positive et de rang 1, montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $a_{ij} = \lambda_i\lambda_j$.
   Indication : utiliser la décomposition de Gauss de la forme quadratique associée à A.
2. Si A et B sont positives et de rang 1, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
3. De manière plus générale, si A et B sont positives, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
4. Si A est positive, montrer que la matrice $E = (e^{a_{ij}})_{1\le i,j\le n}$ est positive.

9 Diagonalisation des matrices symétriques et applications

Exercice 70. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 71. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Soit q la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale et déterminer la signature de q.

Exercice 72. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est représentée par A.

Exercice 73. $\diamond$ La matrice symétrique $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? Définie ?

Exercice 74. Soient a et b deux réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 75. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $(A + A^T)^p$ est nulle si et seulement si A est antisymétrique.

Exercice 76. Soit A une matrice symétrique d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Exercice 77. Pour $n \geq 2$, on considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de $B = A^T A$ sont strictement positives.
2. Montrer que si la famille $\{x_1, ..., x_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale et que la famille $\{Ax_1, ..., Ax_n\}$ est orthogonale, alors les vecteurs x_i, $1 \leq i \leq n$, sont des vecteurs propres de la matrice B.

Exercice 78. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = {}^tRR$.
2. On suppose que A est une matrice inversible. Montrer qu'il existe un couple (Q, R) avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, tel que $A = QR$.

Exercice 79. Soient M et N deux matrices symétriques de taille $n \times n$, telles que la matrice M soit définie positive. Montrer qu'il existe une matrice inversible C telle que

$${}^tCMC = I_n \quad \text{et} \quad {}^tCNC = D,$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Exercice 80. (racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit M une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique positive telle que $M = R^2$. Que dire de l'unicité d'une telle matrice ?

Exercice 81. (décomposition polaire) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H), U étant orthogonale et H symétrique positive, tel que $A = UH$.
Indication : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 82. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 4\,x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4\,x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 4\,x_3(t) \end{array} \right. .$$

3. Déterminer la solution de ce système vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 2 \\ x_3(0) = -1 \end{array} \right. .$$

Exercice 83. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice A.
5. Expliciter $\exp(A)$.
6. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, résoudre le système d'équations différentielles

$$x'(t) = Ax(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0.$$

Feuille de travaux dirigés

Exercices d'annales

Contrôle continu du 7 octobre 2016

Exercice 84. (barème indicatif : 3 points)

1. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 := \{(x,y,z); x-y+z=1\}, \quad E_2 := \{(x,y,z); x-y+z^2=0\},$$
$$E_3 := \{(x,y,z); x-y+z=0\}, \quad E_4 := \{(x,y,z); x-y+z\geq 0\}.$$

2. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes, quelles sont celles qui sont libres ?

$$\mathcal{A} := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, \quad \mathcal{B} := \{(1,1,1),(2,2,2)\},$$
$$\mathcal{C} := \{(4,5,6),(0,0,0)\}, \quad \mathcal{D} := \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(0,1,2)\}.$$

3. Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes, quelles sont celles qui sont génératrices ?

$$\mathcal{E} := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}, \quad \mathcal{F} := \{(1,1,1),(1,1,0)\}.$$

Exercice 85. (barème indicatif : 3 points)

1. Montrer que l'application $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\alpha((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y)(x'+y') + (y+z)(y'+z') + (z+x)(z'+x')$$

définit un produit scalaire.

2. Que dire de l'application

$$\beta((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y)(x'+y') + (y+z)(y'+z') + (z-x)(z'-x')?$$

Exercice 86. (barème indicatif : 8 points) On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n\times n$. Pour $A=(A_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\|A\|_1 := \sum_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|, \quad \|A\|_2 := \Big(\sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}^2\Big)^{1/2}, \quad \|A\|_\infty := \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{ij}|.$$

1. Pour tout $A\in M_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_p,\ p=1,2, \qquad \|A\|_2 \leq n\|A\|_\infty,$$
$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1^{1/2}\|A\|_\infty^{1/2}, \quad \text{puis} \quad \|A\|_2 \leq \|A\|_1.$$

2. Dans un espace euclidien E, énoncer puis **démontrer** l'inégalité de Cauchy-Schwarz et discuter les cas d'égalité.
3. En déduire que

$$\|A\|_1 \leq n\,\|A\|_2, \quad \forall\, A\in M_n(\mathbb{R}).$$

4. Montrer que toutes ces inégalités ne peuvent être améliorées en général.

Exercice 87. (barème indicatif : 6 points) Munissons $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs

$$u_1=(2,3,4,0),\ u_2=(1,0,0,1),\ u_3=(2,0,0,0),\ u_4=(0,3,0,0).$$

1. Montrer que $B := (u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$?
2. Orthogonaliser B selon le procédé de Gram–Schmidt.

Partiel du 26 octobre 2016

Exercice 88. (barème indicatif : 3 points) Soient $u = (1,1,1,1)$ et $v := (1-x, x-y, y-z, z)$ deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $\langle u, v\rangle = 1$.
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du cas d'égalité dans celle-ci, résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation

$$(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 89. (barème indicatif : 2 points) Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application. Sous quelles conditions sur f la fonction

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x,y) := \langle f(x), f(y)\rangle$$

définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 90. (barème indicatif : 4 points) Soit E un espace euclidien et p un endomorphisme tel que

$$p \circ p = p \quad \text{et} \quad \forall\, x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Le but de l'exercice est de montrer que p est un projecteur orthogonal de E.

1. Rappeler pourquoi $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires. Rappeler pourquoi, pour établir que p est un projecteur orthogonal, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.
2. On suppose par l'absurde que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ ne sont pas orthogonaux. Soient $u \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(p)$ tels que $\langle u, v\rangle \neq 0$.
   (a) Calculer $\|u+tv\|^2$ et $\|p(u+tv)\|^2$ pour t réel.
   (b) Montrer qu'il existe une valeur de t pour laquelle $\|p(u+tv)\| > \|u+tv\|$ et conclure.

Exercice 91. (barème indicatif : 6 points) $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne usuelle. Soient D et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$D = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\Big\}$$

et

$$F = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\Big\}.$$

1. Quelle est la dimension m de D et la dimension n de F ? Trouver m vecteurs orthonormés $u_1, ..., u_m$ et n vecteurs orthonormés $v_1, ..., v_n$ tels que

$$D = \mathrm{Vect}\{u_1, ..., u_m\}, \quad F = \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_n\}.$$

2. Quelles sont les dimensions de $D^\perp$ et $F^\perp$?
3. Donner un système d'équations cartésiennes de $D^\perp$.
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 92. (barème indicatif : 5 points) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on considère des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ et les transformations du plan associées.

1. Trouver une matrice $U \in O(2)$ telle que $\det U = \mathrm{tr}\, U = 1$.
2. En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, représenter les vecteurs e_1, e_2, Ue_1 et Ue_2 sur un dessin. Quelle est la transformation du plan associée à la matrice U ?
3. Quelle est la matrice R_α de la rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ dans le plan ? Calculer $R_\alpha R_\beta$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. À quelle transformation du plan correspond cette matrice ? Que dire de $R_\alpha R_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$? À quel sous-ensemble remarquable de matrices appartient R_α ?
4. Expliciter (simplement) U^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Contrôle continu du 28 novembre 2016

Exercice 93. (barème indicatif : 3 points) Déterminer la matrice dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x = y = z\}$.

Exercice 94. (barème indicatif : 7 points) Soient a un nombre réel, q la forme quadratique

$$q(X, Y, Z) = X^2 + 4Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 2XZ - aYZ$$

et f la forme bilinéaire symétrique associée.

1. Quelle est la matrice Q de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2. Effectuer la réduction de Gauss de q.
3. Donner la signature de q suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
4. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, f est-elle positive, définie, un produit scalaire ?

Exercice 95. (barème indicatif : 2 points)
Question de cours : énoncer proprement et entièrement le « théorème de diagonalisation d'une matrice carrée symétrique réelle ».

Exercice 96. (barème indicatif : 2 points) On note

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice M.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 97. (barème indicatif : 6 points) Soit A une matrice carrée réelle de $M_n(\mathbb{R})$ et $B := {}^tAA$.

1. Montrer que B est symétrique et positive.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}A$, puis que $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A$.
3. Montrer que B est définie positive si, et seulement si A est inversible.

(Note : on rappelle qu'une matrice est positive (resp. définie) si la forme quadratique associée est positive (resp. définie)).
Réciproquement, on considère B une matrice réelle symétrique et positive de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il existe une matrice réelle symétrique et positive A telle que $B = {}^tAA$.

Examen du 12 janvier 2017

Exercice 98. (barème indicatif : 3 points) Soit α un nombre réel. Sur $\mathbb{R}^4$, on définit la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + \alpha z^2 + 3xy - 2xz + yz,$$

et on note f la forme bilinéaire symétrique associée.

1. Expliciter la matrice M associée et donner l'expression de f en fonction de M.
2. Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. Donner la signature de q suivant les valeurs de α.
4. Pour quelles valeurs de α f définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 99. (barème indicatif : 7 points) On définit

$$A := \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer pourquoi A est diagonalisable. On énoncera un théorème complet.
2. Calculer les valeurs propres de A.
3. Exhiber une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ orthonormée de vecteurs propres. On rangera les vecteurs ε_i par ordre décroissant de la valeur propre associée (la valeur propre λ_1 associée à ε_1 correspond donc à la plus grande des valeurs propres).

4. Donner l'expression des projections orthogonales sur les différents espaces propres et expliciter les matrices associées.
5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\exp(tA)$ comme le produit de trois matrices explicites dont une, et une seule, diagonale.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

6. Exprimer $y(t)$ en fonction de $\exp(tA)$ et y_0.
7. Montrer que $y(t) := \varepsilon_1$ est une solution constante de (1).
8. On note π_1 la projection sur l'espace $\mathbb{R}\varepsilon_1$ engendré par ε_1 et $\pi_2 := I - \pi_1$. Montrer que
$$y(t) = e^{\mu_2 t}\pi_2 y_0 + \pi_1 y_0,$$
pour une constante μ_2 que l'on déterminera.
9. Que dire de $y(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 100. (barème indicatif : 5 points) On définit

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^3$, on définit les normes induites $\|\!|\cdot|\!\|_1$ et $\|\!|\cdot|\!\|_2$ sur l'espace vectoriel des matrices $M_3(\mathbb{R})$.

1. Pour une matrice carrée symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$ et en désignant par $\rho(S)$ le maximum des valeurs propres de S, montrer que
$$(Sx, x) \leq \rho(S)\,\|x\|_2^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3,$$
et que cette inégalité est une égalité pour un certain vecteur $x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ que l'on caractérisera. En déduire que
$$\|\!|B|\!\|_2 = \sqrt{\rho(B^2)}$$
et calculer cette valeur.
(Indication : en notant P le polynôme caracteristique de B^2, on pourra écrire $P(X/16) = 16^{-3}Q(X)$ et calculer $Q(1)$).
2. Pour une matrice carrée $M = (m_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ et un vecteur $x = (x_i) \in \mathbb{R}^3$ tels que $m_{ij} \geq 0$ et $x_i \geq 0$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, montrer que
$$\|Mx\|_1 = \sum_{j=1}^{3} x_j \Big(\sum_{i=1}^{3} m_{ij}\Big).$$
En déduire la valeur de $\|\!|B|\!\|_1$.
3. Pour une matrice carrée T et un entier $n \geq 1$, on définit la matrice $R_n := 1 + T + ... + T^n$. Montrer que
$$R_n(I - T) = (I - T)R_n = I - T^{n+1}.$$
4. En déduire que la matrice
$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
est inversible. On ne cherchera pas à calculer C, mais on expliquera bien comment cela découle des questions 1 et 3 précédentes en observant en particulier que $\rho(B^2) < 1$. Peut-on déduire le même résultat par une application immédiate des questions 2 et 3 ?

Exercice 101. (barème indicatif : 5 points) Soit E un espace euclidien de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $\|\!|\cdot|\!\|$ la norme d'opérateur associée.

1. Donner la définition d'une projection orthogonale. Ennoncer les propriétés vues en cours d'une telle application.
2. Soit P un projecteur. Montrer l'équivalence entre
$$\text{(i)}\;\; P \text{ est une projection orthogonale}, \qquad \text{(ii)}\;\; {}^tP = P, \qquad \text{(iii)}\;\; \|\!|P|\!\| \leq 1.$$
(Indication : on pourra montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour la dernière implication, on pourra montrer que $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}(I - P)$ en commençant par démontrer que (iii) implique
$$(x, ty) + \|ty\|^2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{Im}P,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(I - P),\ \forall\, t \in \mathbb{R}).$$
3. Soient Q et R deux projections orthogonales. Montrer l'équivalence entre
$$\text{(iv)}\;\; RQ = QR, \qquad \text{(v)}\;\; RQ \text{ est un projecteur.}$$

Examen d'appel de juin 2017

Exercice 102. (barème indicatif : 5 points)

1. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
2. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et U une matrice orthogonale $U \in O(2)$ telle que $Uv = v$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\det(U) = -1$.

Exercice 103. (barème indicatif : 5 points) On définit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les racines de ce polynôme caractéristique.
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Soit q, la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale et déterminer la signature de q.

Exercice 104. (barème indicatif : 5 points) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme,

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On définit pour cela sur E^2 une application f par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2\,f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $f(2\,x,y) = 2\,f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel q, on a $f(q\,x,y) = q\,f(x,y)$. En déduire que ce résultat reste vrai pour tout q réel.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est bilinéaire.
6. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

Exercice 105. (barème indicatif : 5 points) Soit E un espace euclidien de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de norme euclidienne $\|\cdot\|$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'opérateur associée.

1. Donner la définition d'une projection orthogonale. Énoncer les propriétés vues en cours d'une telle application.
2. Soit P un projecteur. Montrer l'équivalence entre

   (i) P est une projection orthogonale, (ii) ${}^tP = P$, (iii) $|||P||| \leq 1$.

   (Indication : on pourra montrer (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour la dernière implication, on pourra montrer que $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}(I-P)$ en commençant par démontrer que (iii) implique

   $$(x, ty) + \|ty\|^2 \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{Im}P,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(I-P),\ \forall\, t \in \mathbb{R}).$$
3. Soient Q et R deux projections orthogonales. Montrer l'équivalence entre

   (iv) $RQ = QR$, (v) RQ est un projecteur.