

## Eléments de théorie des ensembles et cardinalité

### Table des matières

1	Equipotence	1
2	Subpotence	2
3	Compléments	4

En théorie de l'intégration de Lebesgue, la dénombrabilité joue un rôle fondamental. Ces notes présentent quelques éléments de la théorie des ensembles qui permettent de traiter de manière rigoureuse la notion de cardinal : ensembles finis, ensembles dénombrables, ensembles non dénombrables.

### 1 Equipotence

**Définition 1.1** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $E$  est équipotent à  $F$ , on note  $E \simeq F$ , s'il existe une application bijective  $\varphi : E \rightarrow F$ .

On vérifie immédiatement que

- $E \simeq E$ ,
- $E \simeq F$  implique  $F \simeq E$ ,
- $E \simeq F$  et  $F \simeq G$  impliquent  $E \simeq G$ ,

de sorte que  $\simeq$  est une "relation d'équivalence entre ensembles"<sup>1</sup>. On note  $E \not\simeq F$  si  $E$  et  $F$  ne sont pas équipotents.

• Si  $E \simeq \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que le cardinal de  $E$  est fini, on note  $\text{card } E = \#E < \infty$ , et plus précisément  $\text{card } E = \#E = n$ . Si  $\text{card } E, \text{card } F < \infty$ , alors  $E \simeq F$  ssi  $\text{card } E = \text{card } F$ . Par convention  $\text{card } \emptyset = 0$ .

• Si  $E$  n'est équipotent à aucun  $\{1, \dots, n\}$ , on dit que  $E$  n'est pas fini, on note  $\text{card } E = +\infty$ .

Attention, il existe "plusieurs sortes d'infinité".

•  $\mathbb{N}$  n'est pas fini. Si  $E \simeq \mathbb{N}$ , on dit que  $E$  est dénombrable, on note  $\text{card } E = \text{card } \mathbb{N}$ . On dit aussi que  $E$  est au plus dénombrable si  $\text{card } E \leq \text{card } \mathbb{N}$  (i.e. si  $E$  est fini ou dénombrable).

- Si  $I \subset \mathbb{N}$  alors  $I$  est au plus dénombrable. On peut démontrer cela de la manière suivante. On peut supposer  $I \neq \emptyset$ . On définit récursivement  $I_1 := I$ ,  $x_k := \inf I_k$ ,  $I_{k+1} := I_k \setminus \{x_k\}$ , tant que  $I_k \neq \emptyset$ . La suite  $(x_k)$  est donc strictement croissante et la suite  $(I_k)$  est strictement décroissante (pour l'inclusion). S'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I_n$  est un singleton (et donc  $I_{n+1} = \emptyset$ ), alors  $\text{card } I = n$ . Sinon, l'application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ ,  $k \mapsto x_k$  est une bijection.

---

1. cette terminologie n'est pas tout à fait correcte/usuelle, puisqu'en principe une relation d'équivalence est définie entre éléments d'un même ensemble, et que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas... : c'est le paradoxe de Russell. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe  $\mathcal{E}$  un ensemble contenant tous les ensembles. Il serait alors licite de définir  $E := \{F \in \mathcal{E}; F \notin F\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ . Mais alors on ne peut avoir ni  $E \in E$ , ni  $E \notin E$ , ce qui est absurde. Cet argument est semblable à celui utilisé dans la preuve du Théorème de Cantor présenté ci-dessous.

- On a  $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$ . On définit la bijection (faire un dessin)  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto 1$ ,  $2 \mapsto -1$ ,  $3 \mapsto 2$ ,  $4 \mapsto -2, \dots$
- On a  $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^2$ . On définit la bijection (faire un dessin)  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ ,  $0 \mapsto (0, 0)$ ,  $1 \mapsto (1, 0)$ ,  $2 \mapsto (0, 1)$ ,  $3 \mapsto (2, 0)$ ,  $4 \mapsto (1, 1)$ ,  $5 \mapsto (0, 2)$ ,  $6 \mapsto (3, 0), \dots$
- On a  $\mathbb{N}^* \not\simeq [0, 1]$ . Considérons une application  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$ , et la suite induite  $x_n := \varphi(n)$  que l'on peut écrire grâce à un développement décimal

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots a_{1k} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots a_{2k} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \dots a_{nk} \dots, \end{aligned}$$

avec  $a_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$ . On définit alors (argument diagonal de Cantor)  $y \in [0, 1[$  par

$$y := 0, b_1b_2b_3b_4 \dots b_k \dots, \quad b_i \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{a_{ii}\},$$

de sorte que  $y \neq x_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Autrement dit,  $y \notin \varphi(\mathbb{N})$  et donc  $\varphi$  n'est jamais surjective.

- $E \simeq F$  implique  $\mathcal{P}(E) \simeq \mathcal{P}(F)$ . En effet, si  $\varphi : E \rightarrow F$  est une bijection, on définit  $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  par  $A \mapsto \Phi(A) := \{\varphi(x); x \in A\}$ . On montre sans difficulté que  $\Phi$  est bijective.
- Il existe en fait une infinité de type d'infini. C'est une conséquence du théorème de Cantor suivant, en prenant la suite d'ensemble  $\mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{P}(\dots(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\dots)$ ,  $\dots$ . On note parfois  $\aleph_0 := \text{card } \mathbb{N}$ ,  $\aleph_1 := \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\dots$

**Lemme 1.2 (Théorème de Cantor)** *Si  $E$  est un ensemble alors  $E$  n'est pas équipotent à  $\mathcal{P}(E)$ .*

*Preuve du Lemme 1.2.* Considérons  $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  et définissons

$$A := \{x \in E; x \notin \varphi(x)\} \in \mathcal{P}(E).$$

L'ensemble  $A$  ne peut avoir d'antécédent. En effet, si  $A = \varphi(y)$ , alors

- soit  $y \in A$ , et dans ce cas  $y \notin \varphi(y) = A$ , ce n'est donc pas possible;
- soit  $y \notin A$ , et dans ce cas  $y \in \varphi(y) = A$ , ce qui n'est pas non plus possible.

L'application  $\varphi$  n'est donc pas surjective. □

Il convient de remarquer toutefois que  $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ,  $x \mapsto \{x\}$ , est une application injective.

On a également  $\mathcal{P}(E) \simeq \{0, 1\}^E := \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ . En effet, on définit

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E, \quad A \mapsto \Phi(A) := \mathbf{1}_A,$$

avec  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  si  $x \in A$ ,  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ , et on vérifie sans difficulté que  $\Phi$  est bijective.

## 2 Subpotence

Il est parfois (souvent) fastidieux d'expliciter une bijection entre deux ensembles. On peut alors avoir recours au résultat général suivant.

**Théorème 2.3 (de Cantor-Bernstein)** *Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. S'il existe  $f : E \rightarrow F$  injective et  $g : F \rightarrow E$  injective, alors il existe  $h : E \rightarrow F$  bijective.*

Une preuve possible du Théorème de Cantor-Bernstein utilise le résultat suivant.

**Lemme 2.4 (de Knaster-Tarski)** *Toute application croissante  $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  admet un point fixe. Plus précisément, si  $A \subset B$  implique  $\Phi(A) \subset \Phi(B)$ , alors il existe  $C$  tel que  $\Phi(C) = C$ .*

*Preuve du Lemme 2.4.* Considérons l'ensemble de parties

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(E); A \subset \Phi(A)\}.$$

On a évidemment  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , de sorte que cela a du sens de définir

$$C := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{P}(E).$$

On observe d'une part que  $A \in \mathcal{A}$  implique  $A \subset C$ , et donc par croissance  $A \subset \Phi(A) \subset \Phi(C)$ . Par définition de  $C$ , on obtient  $C \subset \Phi(C)$ . Cela signifie en particulier que  $C \in \mathcal{A}$ . On observe d'autre part que  $A \in \mathcal{A}$  implique  $\Phi(A) \subset \Phi(\Phi(A))$  par croissance, et donc  $\Phi(A) \in \mathcal{A}$ . On en déduit en particulier que  $\Phi(C) \in \mathcal{A}$ , et donc  $\Phi(C) \subset C$ , par définition de  $C$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 2.3.* On définit

$$\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad A \mapsto \Phi(A) := E \setminus g(F \setminus f(A)).$$

Il est clair que  $\Phi$  est croissance (car les applications  $f$  et  $g$  induisent des applications croissantes de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  et  $\mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ , et que l'on passe deux fois au complémentaire). D'après le Lemme 2.4, il existe  $C \in \mathcal{P}(E)$  telle que  $\Phi(C) = C$ , soit donc  $E \setminus C = g(F \setminus f(C))$ . On vérifie que la fonction

$$h : E \rightarrow F, \quad h(x) := f(x) \text{ si } x \in C, \quad h(x) := g^{-1}(x) \text{ si } x \notin C,$$

convient.  $\square$

Une application élémentaire est

- $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$ . En effet, d'une part l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $n \mapsto n$ , est injective. D'autre part, l'application  $g_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $r \mapsto (p, q)$ , où  $(p, q)$  est l'unique couple tel que  $r = p/q$ ,  $|p|$  et  $q$  sont premiers entre eux, est également injective. Comme  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$ , il existe une application  $g_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injective, et par conséquent  $g := g_2 \circ g_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  est injective. Le Théorème 2.3 implique alors qu'il existe une application  $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  bijective.

Le Théorème 2.3 de Cantor-Bernstein nous permet d'introduire la "relation de (pré)ordre" suivante.

**Définition 2.5** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On note  $E \preceq F$  et également  $\text{card } E \leq \text{card } F$ , s'il existe une application injective  $\varphi : E \rightarrow F$ .

On vérifie immédiatement que

- $E \preceq E$ ,
  - $E \preceq F$  et  $F \preceq G$  impliquent  $E \preceq G$ ,
- et le Théorème 2.3 de Cantor-Bernstein nous permet d'affirmer que
- $E \preceq F$  et  $F \preceq E$  impliquent  $E \simeq F$ .

Ainsi la relation  $\preceq$  est une relation de (pré)ordre entre ensembles.

On a évidemment

- $A \subset B$  implique  $A \preceq B$ , puisqu'il suffit de considérer l'injection canonique  $\iota : A \rightarrow B$ ,  $a \mapsto a$ .
- $A$  est au plus dénombrable ssi  $A \preceq \mathbb{N}$ .
- $E \preceq \mathcal{P}(E)$ .  $A \preceq B$  implique  $\mathcal{P}(A) \preceq \mathcal{P}(B)$ .

Voici une première application générale.

- Si  $(A_n)$  est une suite de parties au plus dénombrables d'un même ensemble  $E$ . Alors  $\bigcup A_n$  est au plus dénombrable. Commençons par supposer que les  $A_n$  sont disjoints et notons  $\varphi_n : A_n \rightarrow \mathbb{N}$  une application injective de sorte que  $A_n \simeq \varphi_n(A_n) \subset \mathbb{N}$ . On définit

$$\Phi : \bigcup A_n \rightarrow \mathbb{N}^2, \quad \Phi(a) = (n, \varphi_n(a)), \quad n \text{ étant l'unique entier tel que } a \in A_n.$$

Il est clair que  $\Phi$  est injective et  $\cup A_n \simeq \Phi(\cup A_n) \subset \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$ , et donc  $\cup A_n \preceq \mathbb{N}$ . Si les  $A_n$  ne sont pas disjoints, on s'y ramène en posant  $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ , en observant que  $\cup A_n = \cup B_n$  et en appliquant le résultat précédent à la suite  $(B_n)$ .

Revenons à des exemples.

• On a  $\mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

- On définit  $\mathcal{D} := \cup_n \mathcal{D}_n$ ,  $\mathcal{D}_n := \{(x_k) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}; x_k = 0 \forall k \geq n\} \simeq \{0, 1\}^n$ , de sorte que  $\mathcal{D} \simeq \mathbb{N}$  (d'après le résultat que nous venons d'établir ci-dessus). On définit  $\mathcal{F} := \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{D}$  et

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow ]0, 1[, \quad (x_k) \mapsto x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}.$$

Cette application est bijective de sorte que  $]0, 1[ \simeq \mathcal{F} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

- Par transformation affine, on vérifie aisément que  $]a, b[ \simeq ]a', b'[$  pour tout  $a < b, a' < b' \in \mathbb{R}$ . On vérifie également que  $] - \pi/2, \pi/2[ \simeq \mathbb{R}$  (il suffit d'utiliser la fonction tangente).

- L'application

$$\Psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1], \quad (x_k) \mapsto x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$$

est injective, de sorte que  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq [0, 1]$ .

- En conclusion, en combinant toutes ces relations d'ordre et d'équipotence, on a

$$[0, 1] \simeq ]0, 1[ \simeq \mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

• On a  $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ . La preuve de Cantor consiste à observer que

$$[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], \quad (0, a_1 a_2 a_3 \dots, 0, b_1 b_2 b_3 \dots) \mapsto (0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots)$$

est une injection et que  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2, x \mapsto (0, x)$  également. Il s'ensuit que  $[0, 1] \simeq [0, 1]^2$ . Une autre façon de montrer l'existence d'une injection dans le sens non trivial consiste à observer que

$$\mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}.$$

### 3 Compléments

Dans le même ordre d'idée, on peut établir (parfois avec l'aide de l'axiome du choix) que

- Pour tout  $E, F$ , on a soit  $E \preceq F$ , soit  $F \preceq E$ .

-  $\exists f : E \rightarrow F$  injective ssi  $\exists g : F \rightarrow E$  surjective.

- S'il existe  $f : E \rightarrow F$  injective et  $g : E \rightarrow F$  surjective, alors il existe  $h : E \rightarrow F$  bijective.