Université Paris-Dauphine **2022-2023**
Cours "Intégrale de Lebesgue et Probabilités" Octobre 2022

Chapitre 4 - Théorèmes de Fubini et de changement de variables

Table des matières

Sont écrites en rouge les parties hors programme et en orange les parties modifiées (précisées) par rapport au cours en amphi.

Ce chapitre est principalement consacré à deux résultats importants lorsque l'on s'intéresse à des intégrales de plusieurs variables : la possibilité d'inverser l'ordre d'intégration suivants les différentes variables (il s'agit là d'un changement de variables très particulier et très simple) et celle de faire des changements de variables généraux dans les ouverts de $\mathbb{R}^d$. On introduit aussi la notion de mesure image qui est fondamentale en théorie des probabilités (cela correspondra à la loi d'une variable aléatoire) et dont le théorème de changement de variables est un cas particulier.

1 Tribu produit

Dans cette section, on se donne $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables.

Définition 1.1. *On appelle tribu produit la tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ de $E \times F$ engendrée par les rectangles élémentaires ou, de manière équivalente, par l'algèbre des ensembles élémentaires.*

Remarque 1.2. *On rappelle (Exercice 2.6 du Chapitre 1) que l'on peut définir de la même manière la tribu sur un espace produit de plus de 2 espaces mesurables. En effet, étant donnée une famille finie $(E_i, \mathscr{A}_i)$, $1 \leq i \leq n$, d'espaces mesurables, on définit la tribu produit sur l'espace produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ de la manière suivante. On appelle « pavés » les sous-ensembles $A_1 \times \ldots \times A_n$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$, avec $A_i \in \mathscr{A}_i$, $1 \leq i \leq n$. L'ensemble des réunions finies de pavés forme une algèbre sur $E_1 \times \ldots \times E_n$. On appelle alors tribu produit de $E_1 \times \ldots \times E_n$ la tribu engendrée par les pavés, on la note $\mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n$. On peut également la définir par récurrence (finie) en posant $\mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n := (\mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_{n-1}) \otimes \mathscr{A}_n$.*

Proposition 1.3. *Soit $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Les sections $C_a := \{y \in F; (a, y) \in C\}$ d'abscisse $a \in E$ appartiennent à $\mathscr{B}$ et les sections $C^b := \{x \in E; (x, b) \in C\}$ d'ordonnée $b \in F$ appartiennent à $\mathscr{A}$. En particulier, un rectangle mesurable de $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ est de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$.*

Exercice 1.4. *Soient E, F deux ensembles et soient $a \in E$, $b \in F$.*
- Montrer que si $A \subset E$, $B \subset F$, alors $(A \times B)_a = B$ si $a \in A$ et $(A \times B)_a = \emptyset$ si $a \notin A$, et de même $(A \times B)^b = A$ si $b \in B$ et $(A \times B)^b = \emptyset$ si $b \notin B$.
- Montrer que si $C, D \subset E \times F$ sont disjoints, alors $C_a \cap D_a = C^b \cap D^b = \emptyset$.
- Montrer que si (C_i) est une famille (quelconque) de $E \times F$, alors $(\bigcup C_i)_a = \bigcup C_{ia}$, $(\bigcap C_i)_a = \bigcap C_{ia}$, $(\bigcup C_n)^b = \bigcup C_i^b$ et $(\bigcap C_i)^b = \bigcap C_i^b$.
- En déduire que pour $C \subset E \times F$, $((E \times F)\backslash C)_a = F \backslash C_a$ et $((E \times F)\backslash C)^b = E \backslash C^b$ (Indication. Calculer par exemple $((E \times F)\backslash C)_a \bigcup C_a$ et $((E \times F)\backslash C)_a \bigcap C_a$).

Preuve de la Proposition 1.3. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ dont toutes les sections d'abscisse donnée appartiennent à $\mathscr{B}$. A l'aide de l'exercice précédent, on vérifie aisément que $\mathscr{C}$ est une tribu. De plus, $\mathscr{C}$ contient les rectangles élémentaires puisque $C_a := \{y \in F; (a, y) \in A \times B\} = B \in \mathscr{B}$ si $a \in A$ et $C_a = \emptyset \in \mathscr{B}$ si $a \notin A$. On conclut que $\mathscr{C} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. La preuve est identique pour les sections d'ordonnée fixée. $\square$

Lemme 1.5. *Soit $\mathscr{G}$ l'algèbre des réunions finies de rectangles mesurables de $E \times F$. Tout élément de $\mathscr{G}$ est réunion finie de rectangles mesurables deux à deux disjoints.*

Preuve du Lemme 1.5. Montrons le résultat par récurrence sur le nombre n des réunions. Pour le cas $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose cela vrai au rang n et on considère une réunion de $n + 1$ rectangles :

$$C := \bigcup_{i=0}^{n} A_i \times B_i.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} C &= \Big(\bigcup_{k=1}^{p} A'_k \times B'_k\Big) \cup (A_0 \times B_0) \\ &= \Big(\bigcup_{k=1}^{p} (A'_k \times B'_k)\backslash(A_0 \times B_0)\Big) \cup (A_0 \times B_0), \end{aligned}$$

avec $A'_k \times B'_k$ sont deux à deux disjoints. On observe que

$$(A'_k \times B'_k)\backslash(A_0 \times B_0) = [(A'_k \backslash A_0) \times B'_k] \cup [(A'_k \cap A_0) \times B'_k \backslash B_0],$$

puisque

$$\begin{aligned} &[(A'_k \backslash A_0) \times B'_k] \cup [(A'_k \cap A_0) \times B'_k \backslash B_0] \\ &\quad = [(A'_k \cap A_0^c) \times B'_k] \cup [(A'_k \cap A_0) \times (B'_k \cap B_0^c)] \\ &\quad = [(A'_k \times B'_k) \cap (A_0^c \times F)] \cup [(A'_k \times B'_k) \cap (A_0 \times B_0^c)] \\ &\quad = (A'_k \times B'_k) \cap [(A_0^c \times F) \cup (A_0 \times B_0^c)] = (A'_k \times B'_k) \cap (A_0 \times B_0)^c, \end{aligned}$$

de sorte que C est la réunion de $2p + 1$ rectangles disjoints. $\square$

Définition 1.6. *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle section d'abscisse $x \in E$ l'application $f_x : F \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$ et on appelle section d'ordonnée $y \in F$ l'application $f^y : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^y(x) = f(x, y)$. Lorsque $f = \mathbf{1}_C$, on a $f_x = \mathbf{1}_{C_x}$ et $f^y = \mathbf{1}_{C^y}$. Par conséquent, si f est mesurable positive, f est limite croissante de fonctions étagées et il en est de même de f_x et f^y, qui sont donc mesurables.*

On observe par exemple que $(\mathbf{1}_C)_x(y) = \mathbf{1}_C(x,y) = \mathbf{1}_{C_x}(y)$ pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. On observe également que $(f+\lambda g)_x = f_x + \lambda g_x$ pour toutes fonctions f, g de $E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, de sorte que si $f \in \mathscr{M}_+(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$, il existe une suite (f_n) de $\mathscr{E}_+(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ telle que $f_n \nearrow f$, et donc $f_{nx} \nearrow f_x$ avec $f_{nx} \in \mathscr{E}_+(F, \mathscr{B})$.

2 Produit de deux mesures σ-finies

Dans cette section, on se donne $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

Théorème 2.1. *Il existe une mesure unique λ sur la tribu $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ telle que*

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \quad \forall\, A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B},$$

appelée mesure produit des mesures μ et ν, et notée $\lambda := \mu \otimes \nu$. De plus, pour $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on a

$$\lambda(C) = \int_E \nu(C_x)\,\mu(dx) = \int_F \mu(C^y)\,\nu(dy), \tag{1}$$

où on note toujours C_x la section d'abscisse $x \in E$ et C^y la section d'ordonnée $y \in F$.

Preuve du Théorème 2.1. Commençons par présenter la preuve que le cas de mesures finies, on généralisera ensuite facilement au cas de mesures σ-finies.

Etape 1. Le cas de mesures finies. Pour tout $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ et tout $x \in E$, l'ensemble C_x appartient à $\mathscr{B}$ et donc $\nu(C_x)$ est bien défini. Montrons que $x \mapsto \nu(C_x)$ est mesurable. Notons $\mathscr{M} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ la classe de tels ensembles. D'une part, la classe $\mathscr{G}$ des réunions finies de rectangles est une algèbre (ce qui a été démontré au chapitre 1) et satisfait $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}$, puisque si C est une réunion finie (disjointe d'après le Lemme 1.5) de rectangles $A_i \times B_i$, alors

$$\nu(C_x) = \sum_i \nu(B_i)\,\mathbf{1}_{x \in A_i} \tag{2}$$

est étagée, donc mesurable. D'autres part, la famille de parties $\mathscr{M}$ est une classe de monotone. En effet, si (C_n) est une suite croissante de $\mathscr{M}$ de limite C alors $(x \mapsto \nu(C_{nx}))$ est une suite croissante de fonctions mesurables de sorte que sa limite $x \mapsto \nu(C_x)$ est encore mesurable. Même chose pour une suite décroissante puisque ν est par hypothèse une mesure finie. D'après le "lemme des classes monotones" on a $\mathscr{M} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. On définit alors

$$\lambda(C) := \int \nu(C_x)\,d\mu(x). \tag{3}$$

Il est clair que $\lambda(\emptyset) = 0$. De plus, si (C_n) est une suite d'éléments disjoints deux à deux de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ d'union C alors $(C_n)_x$ est une suite d'éléments disjoints deux à deux de $\mathscr{B}$ pour tout $x \in E$, et

$$\begin{aligned} \lambda(C) &= \int \nu\big(\big(\bigcup_n C_n\big)_x\big)\,d\mu(x) = \int \nu\big(\bigcup_n (C_n)_x\big)\,d\mu(x) \\ &= \int \sum_n \nu((C_n)_x)\,d\mu(x) = \sum_n \int \nu((C_n)_x)\,d\mu(x) = \sum_n \lambda(C_n), \end{aligned}$$

où on a utilisé la σ-additivité de ν et le théorème III-4.1 d'inversion du signe intégrale (selon μ) et du signe somme. On a ainsi démontré que λ est une mesure.
D'après (2) et (3), on a en particulier

$$\lambda(A \times B) = \int \nu(B)\,\mathbf{1}_{x \in A}\,d\mu(x) = \mu(A)\,\nu(B).$$

On démontre de la même manière que l'application

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to [0,\infty], \quad C \mapsto \lambda'(C) := \int \mu(C^y)\, d\nu(y)$$

définit une mesure et $\lambda'(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ pour tout rectangle $A \times B \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. D'après le lemme d'unicité des mesures, la mesure λ est unique puisque identifiée sur l'algèbre des rectangles qui engendre la tribu produit, et en particulier $\lambda' = \lambda$.

Etape 2. Le cas de mesures σ-finies. Par hypothèse, il existe deux suites croissantes d'ensembles (E_n) de $\mathscr{A}$ et (F_n) de $\mathscr{B}$ telles que $\bigcup E_n = E$, $\mu(E_n) < \infty$, $\bigcup F_n = F$, $\nu(F_n) < \infty$. Pour $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on définit $C_n := C \cap (E_n \times F_n)$, $\mathscr{A}_n$ la trace de $\mathscr{A}$ sur E_n et $\mathscr{B}_n$ la trace de $\mathscr{B}$ sur F_n. On a $C_n \in \mathscr{A}_n \otimes \mathscr{B}_n$ d'après le lemme de classes monotones. En notant $\mu_n := \mu|_{\mathscr{A}_n}$, $\nu_n := \nu|_{\mathscr{B}_n}$, on définit $\lambda_n := \mu_n \otimes \nu_n$ sur $\mathscr{A}_n \otimes \mathscr{B}_n$ grâce à l'étape 1. On définit alors

$$\lambda : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to [0,\infty], \quad C \mapsto \lambda(C) := \lim_{n\to\infty} \lambda_n(C_n).$$

On observe que $\lambda(\emptyset) = 0$ et que pour une suite (C_j) d'ensembles disjoints de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda\Big(\bigcup_j C_j\Big) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_n\Big(\Big(\bigcup_j C_j\Big) \cap (E_n \times F_n)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_j \lambda_n\big(C_j \cap (E_n \times F_n)\big) \\ &= \sum_j \lim_{n\to\infty} \lambda_n\big(C_j \cap (E_n \times F_n)\big) = \sum_j \lambda(C_j), \end{aligned}$$

où dans la deuxième égalité on utilise que λ_n est une mesure et dans la troisième égalité on utilise d'une part que la suite $\big(\lambda_n(C_j \cap (E_n \times F_n))\big)$ est croissante (en effet pour tout $n \geq 1$, on a

$$\lambda_{n+1}\big(C_j \cap (E_{n+1} \times F_{n+1})\big) \geq \lambda_{n+1}\big(C_j \cap (E_n \times F_n)\big) = \lambda_n\big(C_j \cap (E_n \times F_n)\big),$$

l'égalité étant vraie lorsque C_j est un rectangle et donc toujours vraie par unicité de la mesure) et on utilise d'autre part la σ-additivité de la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. On a alors

$$\lambda(C_n) = \lambda_n(C_n) = \int_E \nu((C_n)_x)\, \mu(dx) = \int_F \mu((C_n)^y)\, \nu(dy),$$

pour tout $n \geq 1$. On peut passer à la limite $n \to \infty$, par le théorème de convergence monotone, et en déduire (1). $\square$

Remarque 2.2. *Le théorème peut tomber en défaut lorsque μ ou ν n'est pas σ-finie. Voici un contre exemple. On considère μ la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}([0,1])$ et ν la mesure de décompte sur $\mathscr{P}([0,1])$. Soit C la diagonale du carré $[0,1]$. C'est un élément de la tribu produit (c'est la limite d'une suite d'unions de petits carrés recouvrant la diagonale). Or*

$$\int \nu(C_x) d\mu(x) = 1 \neq \int \mu(C^y) d\nu(y) = 0.$$

Exercice 2.3. *Montrer qu'une application $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ additive, stable par limite croissante et telle que $\mu(\emptyset) = 0$ est une application σ-additive, c'est donc une mesure. (Ind. Pour une suite (B_n) d'ensembles disjoints, introduire la suite (A_N) définie par $A_N := B_1 \cup \ldots \cup B_N$). Sans utiliser la fin de la preuve du Théorème 2.1, montrer que l'application λ définie par (3) est additive, et que si (C_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ d'union C, on a $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n)$. Retrouver que λ est bien une mesure.*

3 Théorèmes de Fubini et Tonelli

Dans cette section, on se donne $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et on note $\lambda := \mu \otimes \nu$.

Théorème 3.1 (de Fubini-Tonelli)**.** *Soit $f : E \times F \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Pour tout $x \in E$ la section f_x est $\mathscr{B}$-mesurable, pour tout $y \in F$ la section f^y est $\mathscr{A}$-mesurable et les applications*

$$x \mapsto \int_F f_x(y)\, d\nu(y), \quad y \mapsto \int_E f^y(x)\, d\mu(x)$$

sont $\mathscr{A}$-mesurable et $\mathscr{B}$-mesurable. Enfin, on a

$$\int f d\lambda = \int_E \Big[\int_F f_x(y)\, d\nu(y) \Big] d\mu(x) = \int_F \Big[\int_E f^y(x)\, d\mu(x) \Big] d\nu(y). \tag{4}$$

Preuve du Théorème 3.1. Le résultat est vrai pour des fonctions caractéristiques d'après le Théorème 2.1. Par linéarité, il est donc également vrai pour les fonctions étagées. On a par exemple pour une fonction étagée f (et avec des notations habituelles)

$$\int_F f_x(y)\, d\nu(y) = \sum_{i=1}^{I} a_i \nu(C_{ix}) \quad \text{et} \quad \int_E \Big[\int_F f_x(y)\, d\nu(y) \Big] d\mu(x) = \sum_{i=1}^{I} a_i \lambda(C_i),$$

où la première fonction est $\mathscr{A}$-mesurable. Pour une fonction positive f, on introduit une suite croissante (f_n) de fonctions étagées de limite f, de sorte que $(f_n)_x \nearrow f_x$, $(f_n)^y \nearrow f^y$, et d'après le Théorème de Beppo Levi, on a

$$\int_F f_x(y)\, d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_F (f_n)_x(y)\, d\nu(y), \quad \int_E f^y(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E (f^y)_n(x)\, d\mu(x),$$

qui sont donc des fonctions mesurables (au sens de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ respectivement) comme limites de fonctions mesurables. D'après le Théorème 2.1, on a (4) pour les fonctions f_n et on en déduit (4) pour la fonction f en utilisant encore trois fois le Théorème de Beppo Levi afin de passer à la limite dans chacune des trois intégrales. □

Théorème 3.2 (de Tonelli)**.** *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. On a $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ si et seulement si l'une des deux (et donc les deux) conditions ci-dessous est réalisée*

$$I := \int_E \Big[\int_F |f(x,y)|\, d\nu(y) \Big] d\mu(x) < \infty$$

ou

$$J := \int_F \Big[\int_E |f(x,y)|\, d\mu(x) \Big] d\nu(y) < \infty.$$

On a alors

$$\int |f| d\lambda = I = J.$$

Preuve du Théorème 3.2. On applique le Théorème 3.1 de Fubini-Tonelli à la fonction mesurable et positive $|f|$. □

Théorème 3.3 (de Fubini)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \lambda)$. Alors :*
(1) $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ pour μ presque tout $x \in E$ et $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour ν presque tout $y \in F$.
(2) $I \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $J \in \mathcal{L}^1(\nu)$ en définissant

$$I(x) := \int f_x d\nu \ \textit{si}\ f_x \in \mathcal{L}^1(\nu),\ I(x) := 0 \ \textit{sinon};$$

$$J(y) := \int f^y d\mu \ \textit{si}\ f^y \in \mathcal{L}^1(\mu),\ I(x) := 0 \ \textit{sinon}.$$

(3) Finalement

$$\int f d\lambda = \int_E \Big[\int_F f(x,y)\, d\nu(y)\Big] d\mu(x) = \int_F \Big[\int_E f(x,y)\, d\mu(x)\Big] d\nu(y).$$

Preuve du Théorème 3.3. On applique le Théorème 3.1 de Fubini-Tonelli aux fonctions mesurables et positives $f_\pm$. $\square$

Exemple 3.4. *Lorsque $(E, \mathscr{A}, \mu) = (F, \mathscr{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$, où λ_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$. Par récurrence, sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ pour $d \geq 2$, on a*

$$\lambda_d = \lambda_{d-1} \otimes \lambda_1 = \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_1.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\lambda_d = \lambda$ et même $d\lambda_d(x) = dx = dx_1 \ldots dx_d$.

4 Mesure image

Définition 4.1. *Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur E et $\varphi : E \to F$ une application mesurable. On appelle image de μ par φ la mesure $\nu = \varphi_\sharp \mu$ définie sur la tribu $\mathscr{B}$ par*

$$\nu(B) := \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad \forall\, B \in \mathscr{B}.$$

En particulier, on a $\psi_\sharp(\varphi_\sharp \mu) = (\psi \circ \varphi)_\sharp \mu$ et $\mu_1 \leq \mu_2$ implique $\varphi_\sharp \mu_1 \leq \varphi_\sharp \mu_2$.

Proposition 4.2. *On se place dans le cadre de la Définition 4.1 et on considère une fonction mesurable f. Si f est positive, on a*

$$\int_F f\, d\nu = \int_E f \circ \varphi\, d\mu. \tag{5}$$

Si f est réelle, on a $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ si, et seulement si, $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, et dans ce cas l'identité (5) a lieu.

Preuve de la Proposition 4.2. Si $f = \mathbf{1}_B$ avec $B \in \mathscr{B}$, observe que

$$f \circ \varphi = \mathbf{1}_B \circ \varphi = \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(B)},$$

de sorte que

$$\int_E f \circ \varphi\, d\mu = \int_E \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(B)}\, d\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \nu(B) = \int_B d\nu = \int_F f\, d\nu.$$

Par additivité de la mesure et le théorème de convergence monotone de Beppo Levi, on déduit (5) pour f mesurable et positive. Le cas d'une fonction à valeurs réelles s'en déduit aisément. $\square$

Définition 4.3. *Soient $(G, \mathscr{C})$ un espace mesurable, λ une mesure sur G et $\alpha : G \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Le produit $\alpha\lambda$ est la mesure définie par*

$$\alpha\lambda : \mathscr{C} \to [0, \infty], \quad C \mapsto (\alpha\lambda)(C) := \int_C \alpha d\lambda.$$

On laisse en exercice au lecteur le soin de vérifier que $\alpha\lambda$ est effectivement une mesure (il s'agit essentiellement d'utiliser le Théorème de Beppo Levi ou son corollaire de σ-additivité).

Proposition 4.4. *Soient $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur E, p une fonction mesurable positive sur E et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme d'espace mesurable (i.e. φ est bijective et mesurable et φ^{-1} est mesurable). Alors, $\varphi_\sharp(p\mu) = (p \circ \varphi^{-1})\,(\varphi_\sharp \mu)$. En particulier $\varphi_\sharp(\alpha\mu) = \alpha\,(\varphi_\sharp \mu)$, si $\alpha \geq 0$ est une constante.*

Preuve de la Proposition 4.4. On pose $\nu = \varphi_\sharp \mu$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_\sharp(p\mu)(B) &= (p\mu)(\varphi^{-1}(B)) = \int_E \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(B)}(x) p(x) d\mu(x) = \int_E [\mathbf{1}_B \, p \circ \varphi^{-1}] \circ \varphi \, d\mu \\ &= \int_F \mathbf{1}_B(y) \, p \circ \varphi^{-1}(y) \, d\nu(y) = (p \circ \varphi^{-1} \, \nu)(B),\end{aligned}$$

pour tout $B \in \mathscr{B}$. □

5 Le théorème de changement de variables

Théorème 5.1 (de changement de variables)**.** *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts difféomorphes de $\mathbb{R}^n$ et φ un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$. Soit $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.*
(1) Si $f \geq 0$ alors

$$\int_\mathcal{V} f(y) \, dy = \int_\mathcal{U} f \circ \varphi(x) \, |J_\varphi(x)| \, dx \tag{6}$$

(que les deux membres soient finis ou infinis) où J_φ désigne le Jacobien $J_\varphi(x) := \det D\varphi(x)$.
(2) $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{V})$ si, et seulement si, $f \circ \varphi \, |J_\varphi| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{U})$, et alors l'identité (6) a lieu.

On peut évidement voir le Théorème 5.1 comme un cas très particulier (mais très pratique) de la Proposition 4.2 qui correspond au cas $(E, \mu) = (\mathcal{U}, |J_\varphi|\lambda)$ et $(F, \nu) = (\mathcal{V}, \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue (restreinte à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$). En effet, les identités (5) et (6) s'écrivent

$$\begin{aligned}\int_F f d(\varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda)) &= \int_E f \circ \varphi \, d(|J_\varphi|\lambda) \\ &= \int_\mathcal{U} f \circ \varphi(x) \, |J_\varphi(x)| \, dx = \int_\mathcal{V} f(y) \, dy = \int_F f d\lambda,\end{aligned}$$

de sorte que $\varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda) = \lambda$. Toujours dans le cas d'un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, des formes équivalentes du Théorème 5.1 sont
(i) $|J_\varphi| \circ \varphi^{-1} \varphi_\sharp \lambda = \varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda) = \lambda$, soit donc $(|J_\varphi|\lambda)(\varphi^{-1}(B)) = \lambda(B)$, $\forall \, B \in \mathscr{B}(\mathcal{V})$;
(ii) $\varphi_\sharp \lambda = |J_{\varphi^{-1}}|\lambda$, soit donc $\lambda(\varphi^{-1}(B)) = (|J_{\varphi^{-1}}|\lambda)(B)$, $\forall \, B \in \mathscr{B}(\mathcal{V})$;
(iii) $(\varphi^{-1})_\sharp(|J_{\varphi^{-1}}|\lambda) = \lambda$, soit donc $(|J_{\varphi^{-1}}|\lambda)(\varphi(A)) = \lambda(A)$, $\forall \, A \in \mathscr{B}(\mathcal{U})$;
(iv) $(\varphi^{-1})_\sharp \lambda = |J_\varphi|\lambda$, soit donc $\lambda(\varphi(A)) = (|J_\varphi|\lambda)(A)$, $\forall \, A \in \mathscr{B}(\mathcal{U})$.
On prouve par exemple le point (ii) en combinant la Proposition 4.4 et le Théorème 5.1, de sorte que l'on a en effet

$$\varphi_\sharp \lambda = \varphi_\sharp(\frac{1}{|J_\varphi|}|J_\varphi|\lambda) = \frac{1}{|J_\varphi \circ \varphi^{-1}|}\varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda) = \frac{1}{|J_\varphi \circ \varphi^{-1}|}\lambda = |J_{\varphi^{-1}}|\lambda.$$

La preuve du Théorème 5.1 est assez technique et nous n'en présentons que les grandes lignes.

Lemme 5.2. *Si μ est une mesure σ-finie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ invariante par translation alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\mu = C \, \lambda$.*

Preuve du Lemme 5.2. Pour simplifier on ne présente la démonstration que dans le cas $d = 1$. Par hypothèse d'invariance par translation, on a

$$C =: \mu([0,1[) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(k/n + [0, 1/n[) = n\mu([0, 1/n[).$$

Pour tout $a > 0$, on écrit alors

$$\mu\big([0, \frac{[na]}{n}[\big) \leq \mu([0, a[) \leq \mu\big([0, \frac{[na]+1}{n}[\big).$$

Pour le terme de gauche et toujours par hypothèse d'invariance par translation, on a

$$\mu\big([0, \frac{[na]}{n}[\big) = [na]\mu\big([0, \frac{1}{n}[\big) = \frac{[na]}{n} C \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aC = C\lambda([0,a[).$$

On obtient également que le terme de droite tend vers la même limite. Il s'ensuit que $\mu([0,a[) = C\lambda([0,a[)$. On en déduit $\mu([a,b[) = C\lambda([a,b[)$ encore une fois par invariance par translation, puis que $\mu = C\lambda$ puisque les segments engendrent la tribu borélienne. □

Lemme 5.3. *Si u est un automorphisme (application linéaire bijective) de $\mathbb{R}^d$, l'image de la mesure de Lebesgue λ par u est $u_\sharp\lambda = \lambda/|\det u|$. Cela s'écrit donc aussi $\lambda(u(A)) = |\det u|\,\lambda(A)$, pour tout borélien A.*

Ebauche de la preuve du Lemme 5.3. • On commence par observer que $u_\sharp\lambda$ est une mesure invariante par translation. En effet, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$u_\sharp\lambda(a+A) = \lambda(u^{-1}(a+A)) = \lambda(u^{-1}(a) + u^{-1}(A)) = \lambda(u^{-1}(A)) = u_\sharp\lambda(A),$$

où on a utilisé la définition de la mesure image et l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Grâce au Lemme 5.2, on en déduit qu'il existe une constante $C_u \geq 0$ telle que $u_\sharp\lambda = C_u\,\lambda$.

• On considère le cas où $u = Q \in O(d)$ est une matrice orthogonale. On a alors $Q(B) = B$ pour la boule unité B de $\mathbb{R}^d$ puisque $|x| \leq 1$ si, et seulement si, $|Q(x)| \leq 1$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. On en déduit

$$C_Q\lambda(B) = (Q_\sharp\lambda)(B) = \lambda(Q^{-1}(B)) = \lambda(B) > 0,$$

de sorte que $C_Q = 1 = |\det Q|^{-1}$.

• On considère le cas où $u = D = (\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$ est une matrice diagonale définie positive. On a alors

$$C_D\lambda([0,1]^d) = (D_\sharp\lambda)([0,1]^d) = \lambda(D^{-1}([0,1]^d) = \lambda\big(\prod_{i=1}^d [0, 1/\lambda_i]\big) = \big(\prod_{i=1}^d 1/\lambda_i\big)\lambda([0,1]^d) > 0,$$

de sorte que $C_D = \prod_{i=1}^d 1/\lambda_i = 1/\mathrm{det} D$.

• Pour traiter le cas général, on remarque que toute matrice inversible M s'écrit sous la forme $M = QS$ où Q est une matrice orthogonale et S est une matrice définie positive (prendre $S := \sqrt{{}^tMM}$ qui est symétrique et $Q := MS^{-1}$, de sorte que ${}^tQQ = S^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = I$). On rappelle également qu'une matrice définie positive S s'écrit sous la forme $S = R^{-1}DR$ où D est une matrice diagonale définie positive et R est une matrice orthogonale. D'après les trois étapes précédentes, on a alors

$$C_M\lambda = (QR^{-1}DR)_\sharp\lambda = R_\sharp(D_\sharp(R^{-1}_\sharp(Q_\sharp\lambda))) = |\mathrm{det}Q\,\mathrm{det}R^{-1}\mathrm{det}D\,\mathrm{det}R|^{-1}\,\lambda,$$

de sorte que $C_M = 1/\mathrm{det}D = 1/|\mathrm{det}M|$. □

Ebauche de la preuve du Théorème 5.1. L'idée de la preuve, est de considérer un cube A de côtés parallèles aux axes, de le découper en N^d cubes Q_i de côtés parallèles aux axes, d'introduire les fonctions affines φ_i définies par $\varphi_i(x) := x_i + D\varphi(x_i)(x - x_i)$ pour $x_i \in Q_i$ et d'écrire

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi(A)) &= \sum_i \lambda(\varphi(Q_i)) \\
&\sim \sum_i \lambda(\varphi_i(Q_i)) = \sum_i J_\varphi(x_i)\lambda(Q_i) = \int \sum_i J_\varphi(x_i)\,\mathbf{1}_{Q_i}(x)\,d\lambda(x) \\
&\to \int_A J_\varphi(x)\,d\lambda(x),
\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de convergence dominée à la dernière ligne.

Etape 1. Il suffit de montrer

$$(\varphi_\sharp^{-1}\lambda)(A) = \lambda(\varphi(A)) \le (|J_\varphi|\lambda)(A) \text{ pour tout } A \text{ cube de } \mathcal{V} \text{ de côtés parallèles aux axes.} \qquad (7)$$

En effet, puisque les cubes engendrent la tribu borélienne, on aura alors la même inégalité pour tout borélien A de $\mathcal{V}$ et donc $\varphi_\sharp^{-1}\lambda \le |J_\varphi|\lambda$, ou de manière équivalente $\lambda \le \varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda)$. Cette inégalité sera alors aussi vraie pour la fonction φ^{-1}, et s'écrira $\lambda \le (\varphi^{-1})_\sharp(|J_{\varphi^{-1}}|\lambda)$. D'après la Proposition 4.4, on a donc

$$\lambda \le (\varphi^{-1})_\sharp(|J_{\varphi^{-1}}|\lambda) = |J_{\varphi^{-1}}| \circ \varphi\, (\varphi^{-1})_\sharp\lambda,$$

puis

$$\begin{aligned}
\lambda &\le \varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda) = |J_\varphi| \circ \varphi^{-1}\, \varphi_\sharp\lambda \\
&\le |J_\varphi| \circ \varphi^{-1}\, \varphi_\sharp[(|J_{\varphi^{-1}}| \circ \varphi)\, (\varphi^{-1})_\sharp\lambda] \\
&= [|J_\varphi| \circ \varphi^{-1}]\, |J_{\varphi^{-1}}| \varphi_\sharp[(\varphi^{-1})_\sharp\lambda] = |J_\varphi \circ \varphi^{-1}\, J_{\varphi^{-1}}|\, \lambda.
\end{aligned}$$

On observe enfin que

$$J_\varphi \circ \varphi^{-1}\, J_{\varphi^{-1}} = \det[(D\varphi) \circ \varphi^{-1}\, D\varphi^{-1}]] = \det I = 1,$$

ce qui termine la preuve de l'égalité $\lambda = \varphi_\sharp(|J_\varphi|\lambda)$. On déduit alors (6), et donc le point (1), grâce à la Proposition 4.2. Le point (2) s'en déduit immédiatement.

Etape 2. Montrons que pour $\theta \in C^1(\mathcal{V})$ et Q un cube de $\mathcal{V}$ de côtés parallèles aux axes, on a

$$\lambda(\theta(Q)) \le \|D\theta\|_{L^\infty(Q)}^d \lambda(Q),$$

où pour une matrice $M = (a_{ij}) \in M_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\|M\| := \sup_{1\le i\le d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|.$$

En effet, pour $x, y \in Q$, on a

$$|\theta_i(y) - \theta_i(x)| = \Big|\int_0^1 \sum_{j=1}^d \partial_j\theta_i((1-t)x + ty)\,(y_j - x_j)\,dt\Big| \le \sup_{z\in Q} \sum_{j=1}^d |\partial_j\theta_i(z)|\,\delta(Q),$$

où $\delta(Q)$ désigne la longueur des arrêtes de Q. Il s'ensuit que $\theta(x)$ et $\theta(y)$ appartiennent à un même cube dont les arrêtes sont de longueurs inférieures ou égales à $\|D\theta\|_{L^\infty(Q)}\delta(Q)$.

Etape 3. Nous montrons maintenant (7) pour un cube A de $\mathcal{V}$. Décomposons A en N^d cubes Q_i égaux. Pour $y_i \in Q_i$, d'après l'étape 2 appliquée à la fonction $x \mapsto (D\varphi(y_i))^{-1}\varphi(x)$, on a

$$\lambda((D\varphi(y_i))^{-1}\varphi(Q_i)) \le \|(D\varphi(y_i))^{-1}D\varphi\|_{L^\infty(Q_i)}^d \lambda(Q_i).$$

D'après la Définition 4.1 et le Lemme 5.3, on a

$$\lambda((D\varphi(y_i))^{-1}\varphi(Q_i)) = (D\varphi(y_i)_\sharp\lambda)(\varphi(Q_i)) = |J_\varphi(y_i)|^{-1}\lambda(\varphi(Q_i)).$$

Ensemble, on en déduit donc

$$\lambda(\varphi(Q_i)) \le \|(D\varphi(y_i))^{-1}D\varphi\|_{L^\infty(Q_i)}^d |J_\varphi(y_i)|\lambda(Q_i).$$

On observe que

$$(D\varphi(y_i))^{-1}D\varphi(x) - I = (D\varphi(y_i))^{-1}(D\varphi(x) - D\varphi(y_i)) = \mathcal{O}(\omega(\delta(Q_i)),$$

où ω désigne le module de continuité de la fonction $D\varphi$ et $\delta(Q_i) = \delta(A)/N$. De plus, grâce à la continuité de J_φ, on peut choisir $y_i \in Q_i$ de sorte que

$$|J_\varphi(y_i)|\lambda(Q_i) = \int_{Q_i} |J_\varphi(x)| d\lambda(x).$$

Des trois dernières (in)équations, on tire

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi(A)) &= \sum_i \lambda(\varphi(Q_i)) \\ &\leq \sum_i \|I + \mathcal{O}(\omega(\delta(A)/N))\|^d_{L^\infty(Q_i)} \int_{Q_i} |J_\varphi(x)| d\lambda(x) \\ &\leq (1 + C\omega(\delta(A)/N))^d \int_A |J_\varphi(x)| d\lambda(x). \end{aligned}$$

On obtient

$$\lambda(\varphi(A)) \leq \int_A |J_\varphi(x)| d\lambda(x),$$

en laissant tendre $N \to \infty$, et cette dernière inégalité est précisément (7). $\square$

6 Applications

6.1 Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ “localement intégrables" (intégrables sur les ensembles $[-n, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt := \int_{[0,x]} f(t) dt \;\text{ si }\; x > 0, \; := -\int_{[x,0]} f(t) dt \;\text{ si }\; x < 0,$$

et on définit de la même manière

$$G(x) := \int_0^x g(t)\, dt.$$

Pour tout $x < y$, on a

$$F(y)G(y) = F(x)G(x) + \int_x^y f(t)G(t)\, dt + \int_x^y F(t)g(t)\, dt, \tag{8}$$

ce qui correspond à la formule habituelle d'intégration par parties

$$\Big[FG\Big]_x^y = \int_x^y F'(t)G(t)\, dt + \int_x^y F(t)G'(t)\, dt,$$

lorsque $F, G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Il est clair que la formule (8) est équivalente à

$$\begin{aligned} \int_x^y f(t)(G(t) - G(x))\, dt &= \int_x^y f(t)G(t)\, dt - (F(y) - F(x))G(x) \\ &= F(y)G(y) - \int_x^y F(t)g(t)\, dt - F(y)G(x) \\ &= \int_x^y (F(y) - F(t))g(t)\, dt, \end{aligned}$$

la formule (8) ayant été utilisé à la deuxième ligne. Pour établir cette dernière égalité, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_x^y f(t)(G(t)-G(x))\,dt &= \int_x^y f(t)\Big(\int_x^t g(s)\,ds\Big)dt \\
&= \int_x^y \Big(\int_x^y f(t)\mathbf{1}_{s\le t} g(s)\,ds\Big)dt \\
&= \int_x^y \Big(\int_x^y f(t)\mathbf{1}_{s\le t} g(s)\,dt\Big)ds \\
&= \int_x^y g(s)\Big(\int_s^y f(t)\,dt\Big)ds \\
&= \int_x^y g(s)(F(y)-F(s))\,ds.
\end{aligned}$$

A la troisième ligne on a utilisé le théorème de Fubini appliqué à la fonction $(s,t)\mapsto f(t)\mathbf{1}_{s\le t}g(s)$ en observant que

$$\int_x^y\int_x^y |f(t)\mathbf{1}_{s\le t}g(s)|\,dsdt \le \int_x^y\int_x^y |f(t)g(s)|\,dsdt = \int_x^y |f(t)|dt\int_x^y |g(s)|\,ds < \infty,$$

de sorte que $(s,t)\mapsto f(t)\mathbf{1}_{s\le t}g(s)\in\mathcal{L}^1([x,y]\times[x,y])$.

6.2 Coordonnées polaires dans le plan

La fonction de $\varphi:\mathcal{U}:=]0,\infty[\times]0,2\pi[\to\mathcal{V}:=\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\})$, $(r,\theta)\mapsto\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, est clairement de classe C^∞, bijective et

$$\det D\varphi(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r>0,$$

de sorte que φ est un difféomorphisme d'après le théorème d'inversion locale. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ mesurable, on déduit du fait que $\mathbb{R}_+\times\{0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$ et du Théorème 5.1 de changement de variables que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx=\int_{\mathcal{V}} f(x)\,dx=\int_{\mathcal{U}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta.$$

En particulier, si $f(x)=F(|x|)$ est une fonction radiale, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(|x|)\,dx=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}F(r)r\,drd\theta=2\pi\int_0^\infty F(r)r\,dr.$$

On obtient en particulier que la surface du disque unité D est

$$\lambda_2(D)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{|x|\le1}\,dx=2\pi\int_0^\infty\mathbf{1}_{r\le1}r\,dr=\pi.$$

6.3 Calcul du volume de la boule unité

On note B_d la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$, λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $\gamma_d:=\lambda_d(B_d)$ la mesure de la boule unité. On observe que, d'après le Lemme 5.3, l'image de la mesure de Lebesgue λ_d par l'homothétie $x\mapsto H_{a^{-1}}(x):=a^{-1}x$ est $H_{a^{-1}\sharp}\lambda_d=a^d\lambda_d$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\lambda_d(B_d(0,a)) &= \lambda_d(H_a(B_d(0,1)))=((H_a^{-1})_\sharp\lambda_d)(B_d(0,1))\\
&= (H_{a^{-1}\sharp}\lambda_d)(B_d(0,1))=a^d\lambda_d(B_d(0,1)).
\end{aligned}$$

On calcule maintenant

$$
\begin{aligned}
\gamma_d = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B_d}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x_1^2+\ldots+x_d^2\leq 1}\, dx_1 \ldots dx_d \\
&= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbf{1}_{x_1^2+\ldots+x_{d-1}^2 \leq 1-x_d^2}\, dx_1 \ldots dx_{d-1} \Big) dx_d \\
&= \int_{-1}^{1} \lambda_{d-1}\Big(B_{d-1}\big(0, \sqrt{1-x_d^2}\big)\Big) dx_d \\
&= \lambda_{d-1}(B_{d-1}) \int_{-1}^{1} (1-x_d^2)^{\frac{d-1}{2}}\, dx_d \\
&= \gamma_{d-1} I_{d-1},
\end{aligned}
$$

où on a utilisé le Théorème de Fubini-Tonelli à la deuxième ligne, le calcul précédent sur la mesure image d'une homothétie à la quatrième ligne et on a posé

$$
I_n := \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{n}{2}}\, dy.
$$

Il suffit de calculer I_n, ce que nous faisons maintenant. D'une part, on calcule

$$
I_0 = 2, \quad I_1 = \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{1}{2}}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}.
$$

Pour $n \geq 2$, on calcule I_n grâce à une intégration par parties à la deuxième ligne

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-2}{2}}\, dy + \int_{-1}^{1} y \frac{d}{dy}\Big[\frac{1}{n}(1-y^2)^{\frac{n}{2}}\Big] dy \\
&= I_{n-2} - \frac{1}{n} I_n,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}.
$$

En introduisant $J_n := I_n I_{n-1}$ et en observant que $J_1 = \pi$, on obtient par récurrence immédiate

$$
J_n = \frac{n}{n+1} J_{n-1} = \ldots = \frac{2}{n+1} J_1 = \frac{2\pi}{n+1}.
$$

Pour $d \geq 3$, on en déduit

$$
\gamma_d = J_{d-1}\, \gamma_{d-2} = \frac{2\pi}{d}\, \gamma_{d-2}.
$$

A partir des cas particuliers $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = \gamma_1 I_1 = \pi$, on en déduit pour tout $k \geq 1$:

$$
\gamma_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \gamma_{2k+1} = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}}.
$$