Université Paris-Dauphine **2021-2022**
Cours "Intégrale de Lebesgue et Probabilités" Novembre 2020

Chapitre 5 - Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p sur un espace mesuré

Table des matières

Sont écrites en rouge les parties hors programme.

Dans ce chapitre et sauf mention explicite du contraire, on fixe un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$.

1 Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1

On a vu au chapitre 2 que l'ensemble $\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ des fonctions à valeurs réelles intégrables est un espace vectoriel. On rappelle également que pour $f \in \mathcal{L}^1$, on définit

$$\|f\|_1 := \int_E |f| \, d\mu.$$

L'application $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme au sens où

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1, \quad \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1 \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^1, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

mais seulement $f = 0$ p.p. ssi $\|f\|_1 = 0$.

Lemme 1.1. *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1$ telle que la série $\sum \|f_n\|_1 < \infty$. Alors la série $\sum f_n$ converge dans $\mathcal{L}^1$.*

Preuve du Lemme 1.1. Il s'agit d'un résultat (Théorème III.4.1) d'un chapitre précédent. □

Lemme 1.2. *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel (semi)normé. Toute suite de Cauchy de $\mathcal{E}$ est convergente si, et seulement si, toute série (semi)normalement convergente de $\mathcal{E}$ est convergente.*

Preuve du Lemme 1.2. Nous n'utiliserons pas le sens direct, sa preuve est donc omise. Supposons donc que toute série (semi)normalement convergente de $\mathcal{E}$ est convergente et montrons que $\mathcal{E}$ est complet. On note N la (semi)norme de $\mathcal{E}$. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{E}$. En utilisant le critère de Cauchy, on peut alors définir une suite extraite (f_{n_k}) qui satisfait

$$N(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \geq 1.$$

On observe alors que

$$\sum_{k=1}^{\infty} N(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq 1,$$

soit donc que la série de termes $(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})_k$ est (semi)normalement convergente. Cette série est donc convergente d'après l'hypothèse faite sur $\mathcal{E}$. Il existe ainsi $g \in \mathcal{E}$ tel que

$$f_{n_k} - f_{n_1} = \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \to g \ \text{ lorsque } \ k \to \infty$$

au sens de la (semi)norme N. En d'autres termes, en posant $f := f_{n_1} + g$, on a démontré

$$N(f_{n_k} - f) \to 0 \ \text{ lorsque } \ k \to \infty.$$

En revenant à la définition d'une suite de Cauchy, on en déduit que c'est toute la suite (f_n) qui converge vers f au sens de la (semi)norme N. $\square$

Théorème 1.3 (de Riesz-Fischer dans $\mathcal{L}^1$)**.** *L'espace $\mathcal{L}^1$ est "complet" : si (f_n) est une suite de Cauchy au sens $\mathcal{L}^1$, il existe $f \in \mathcal{L}^1$ tel que $f_n \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$.*

Preuve du Théorème 1.3. Il suffit de combiner les lemmes 1.1 et 1.2. $\square$

Définition 1.4. *On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^1$ par $f \sim g$ si $f = g$ presque partout. On définit $L^1 := \mathcal{L}^1/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence.*

Théorème 1.5 (de Riesz-Fischer dans L^1)**.** *L'espace L^1 est un espace de Banach : muni de la norme $\|\cdot\|_1$, c'est un espace vectoriel normé complet.*

2 Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p, $1 < p < \infty$

Définition 2.1. *On définit $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions f mesurables à valeurs réelles telles que $|f|^p$ est intégrable. Pour $f \in \mathcal{L}^p$, on définit*

$$\|f\|_p := \Big(\int_E |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}.$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Young)**.** *Pour $p, q \in (1, \infty)$ deux exposants conjugués (cela signifie $1/p + 1/q = 1$), on a*

$$uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q, \quad \forall\, u, v > 0.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Young implique $u^p = v^q = uv$. On notera souvent $p' := q$.

Preuve 1 du Lemme 2.2. Comme la fonction log est concave, on a

$$\log\Big(\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \Big) \geq \frac{1}{p} \log u^p + \frac{1}{q} \log v^q = \log(uv).$$

On déduit l'inégalité de Young de la propriété de croissance de la fonction log. $\square$

Preuve 2 du Lemme 2.2. Pour $v > 0$ fixé, la fonction

$$\varphi(u) := \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q - uv$$

satisfait

$$\varphi'(u) = u^{p-1} - v, \quad \varphi''(u) = (p-1) u^{p-2} > 0.$$

Elle est donc strictement convexe et atteint son minimum en l'unique $u^* > 0$ tel que $\varphi'(u^*) = 0$. On calcule alors $u^* = v^{\frac{1}{p-1}}$ et

$$\varphi(u) \geq \varphi(u^*) = \frac{1}{p} v^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} v^q - v^{\frac{1}{p-1}} v = 0,$$

puisque les trois exposants sont égaux. $\square$

Théorème 2.3 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient f, g deux fonctions mesurables et $p, q \in (1, \infty)$ deux exposants conjugués. Alors*

$$\int |f\, g| \, d\mu \leq \Big(\int |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

En particulier, $fg \in \mathcal{L}^1$ si $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^{p'}$, et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}. \tag{2.1}$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder implique $|f|^p / \|f\|_p^p = |g|^q / \|g\|_q^q$.

Preuve du Théorème 2.3. Lorsque les deux intégrales dans le terme de droite de l'inégalité sont finies et non nulles, on pose

$$u := \frac{|f|}{\big(\int |f|^p \, d\mu \big)^{1/p}}, \quad v := \frac{|g|}{\big(\int |g|^q \, d\mu \big)^{1/q}}$$

et l'inégalité de Young implique

$$\int \frac{|f|}{\big(\int |f|^p \, d\mu \big)^{1/p}} \frac{|g|}{\big(\int |g|^q \, d\mu \big)^{1/q}} d\mu \leq \frac{1}{p} \int \frac{|f|^p}{\int |f|^p \, d\mu} d\mu + \frac{1}{q} \int \frac{|g|^q}{\int |g|^q \, d\mu} d\mu = 1,$$

d'où on conclut. Dans le cas contraire, l'inégalité est "triviale" : le terme de droite vaut $+\infty$ (resp. 0) si l'un des deux termes $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q$ vaut $+\infty$ et l'autre est différent de 0 (resp. au moins l'un des deux termes est égal à 0). Le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Young pour les fonctions u et v définies ci-dessus, et il suffit de traduire cette condition en termes de fonctions f et g. $\square$

Théorème 2.4 (Inégalité de Minkowski)**.** *Pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel et l'application $\| \cdot \|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme au sens où la condition d'inégalité triangulaire est vérifiée, mais on a seulement $f = 0$ p.p. si $\|f\|_p = 0$.

Preuve du Théorème 2.4. On écrit

$$\begin{aligned} \int |f+g|^p &\leq \int |f| \, |f+g|^{p-1} + \int |g| \, |f+g|^{p-1} \\ &\leq \Big(\int |f|^p \Big)^{1/p} \Big(\int |f+g|^{p'(p-1)} \Big)^{1/p'} + \Big(\int |g| \Big)^{1/p} \Big(\int |f+g|^{p'(p-1)} \Big)^{1/p'}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder pour établir la seconde inégalité où donc p' désigne l'exposant conjugué de p. En observant que $p'(p-1) = p$, la dernière inégalité s'écrit également

$$\|f+g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f+g\|_p^{p/p'},$$

d'où on conclut en remarquant que $p - p/p' = 1$. $\square$

Lemme 2.5. *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^p$ telle que la série $\sum \|f_n\|_p < \infty$. Alors la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathcal{L}^p$.*

Preuve du Lemme 2.5. On considère une série (f_n) qui est normalement convergente au sens de $\|\cdot\|_p$. On définit la fonction mesurable et positive

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

En utilisant successivement le théorème de Beppo Levi et l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|g\|_p = \sup_{N\ge1} \Big\| \sum_{n=0}^{N} |f_n| \Big\|_p \le \sup_{N\ge1} \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_p < \infty.$$

On en déduit $|g| < \infty$ p.p., soit donc que la série $(f_n(x))$ est absolument convergente, donc convergente, pour tout $x \in A \in \mathscr{A}$, $\mu(A^c) = 0$. On pose

$$f(x) := \lim_{N\to\infty} F_N(x),\ \ F_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x),\ \forall\, x \in A, \quad f(x) := 0,\ \forall\, x \in A^c.$$

On observe alors que $|F_N - f|^p \to 0$ p.p. et $|F_N - f|^p \le 2^p(|F_N|^p + |f|^p) \le 2^{p+1} g^p$, de sorte que $F_N \to f$ dans $\mathcal{L}^p$ grâce au théorème de convergence dominée. $\square$

Théorème 2.6 (de Riesz-Fischer dans $\mathcal{L}^p$)**.** *L'espace $\mathcal{L}^p$ est un espace "complet".*

Preuve du Théorème 2.6. Il suffit de combiner les lemmes 2.5 et 1.2. $\square$

Définition 2.7. *On définit $L^p := \mathcal{L}^p/\!\sim$ l'espace des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence "égalité presque partout", de sorte que l'espace L^p est un espace de Banach.*

3 Les espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞

Définition 3.1. *On définit $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles mesurables telles que $|f| \le C$ presque partout pour un certain $C \ge 0$. On définit*

$$\|f\|_\infty = \mathit{supess}|f| := \inf\{C;\ |f(x)| \le C\ \forall\, x \in A,\ \mu(A^c) = 0\}.$$

Présentons quelques propriétés élémentaires :

(1) $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, puisque (passage à la limite dans la mesure d'une suite croissante d'ensembles)

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \lim \mu(\{|f| \ge \|f\|_\infty + 1/n\}) = 0.$$

(2) $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, puisque

$$|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ \textit{p.p.}.$$

(3) *Inégalité de Holder.* Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, $g \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\int |f\,g| d\mu = \int_A |f\,g| d\mu \le \|f\|_\infty \int_A |g| d\mu,$$

où $A \in \mathscr{A}$ est tel que $|f(x)| \le \|f\|_\infty$, $\forall\, x \in A$, $\mu(A^c) = 0$, ce qui implique

$$\|f\,g\|_1 \le \|f\|_\infty \|g\|_1. \tag{3.1}$$

Théorème 3.2 (de Riesz-Fischer dans $\mathcal{L}^\infty$)**.** *L'espace $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel « complet » au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Preuve du Théorème 3.2. Pour $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$|f + \lambda g| \le \|f\|_\infty + |\lambda|\, \|g\|_\infty < \infty \quad \text{p.p.},$$

ce qui montre que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel. Si (f_n) est une suite de Cauchy au sens $\mathcal{L}^\infty$, on a par définition

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon,\ \forall\, n, m \ge N_\varepsilon, \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

et donc également

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon,\ \forall\, n, m \ge N_\varepsilon,\ \exists A_{\varepsilon,n,m} \in \mathscr{A},\ \forall\, x \in A_{\varepsilon,n,m}, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

avec $\mu(A^c_{\varepsilon,n,m}) = 0$. On définit alors

$$A := \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+} \ \bigcap_{n,m \ge N_\varepsilon} A_{\varepsilon,n,m} \in \mathscr{A},$$

de sorte que $\mu(A^c) = 0$ par σ-sous-additivité de la mesure μ et

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+,\ \exists\, N_\varepsilon,\ \forall\, n, m \ge N_\varepsilon,\ \forall\, x \in A, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Par comlétude de $\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe f mesurable définie par $f(x) = \lim f_n(x)$ si $x \in A$, $f(x) = 0$ si $x \notin A$, telle que

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+,\ \exists\, N_\varepsilon,\ \forall\, n \ge N_\varepsilon,\ \forall\, x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

soit donc également

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+,\ \exists\, N_\varepsilon,\ \forall\, n \ge N_\varepsilon, \quad \|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon.$$

Cela signifie que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, et donc également que $f \in \mathcal{L}^\infty$ (par inégalité triangulaire). □

Définition 3.3. *On définit $L^\infty := \mathcal{L}^\infty/\!\sim$ l'espace des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence "égalité presque partout", de sorte que l'espace L^∞ est un espace de Banach.*

4 Espace de Hilbert et dualité dans $\mathcal{L}^2$ et L^2

Définition 4.1. *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ou d'un produit hermitien) tel que c'est un espace de Banach pour la norme associée.*

Exemple 4.2. *L'espace $L^2 = L^2(E, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{L^2} := \int f\,g\,d\mu, \quad \forall\, f, g \in L^2, \tag{4.1}$$

est un espace de Hilbert. L'espace $L^2 = L^2(E, \mathscr{A}, \mu; \mathbb{C})$ muni du produit hermitiien

$$(f, g)_{L^2} := \int \bar{f}\,g\,d\mu, \quad \forall\, f, g \in L^2,$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 4.3 (de projection)**.** *Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il existe une application $p_M : \mathcal{H} \to M$, appelée projection orthogonale sur M, telle que*

$$\forall\, f \in \mathcal{H}, \quad \|f - p_M f\|_{\mathcal{H}} = \inf_{g \in M} \|f - g\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.2}$$

Cette application est caractérisée par

$$(f - p_M f, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, g \in M. \tag{4.3}$$

Enfin, p_M est une application linéaire et 1*-Lipschitzienne.*

On a un résultat assez semblable lorsque M est remplacé par un ensemble convexe fermé non vide.

Preuve du Théorème 4.3. On rappelle l'identité du parallélogramme

$$\frac{1}{2}\|a-b\|^2 + \frac{1}{2}\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{H}.$$

• Considérons une suite (g_n) de M telle que

$$\|f - g_n\|_{\mathcal{H}} \to I := \inf_{g \in C} \|f - g\|_{\mathcal{H}}.$$

Par identité du parallélogramme, on a

$$\frac{1}{2}\|2f - g_n - g_m\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|g_n - g_m\|^2_{\mathcal{H}} = \|f - g_n\|^2_{\mathcal{H}} + \|f - g_m\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Par convexité de M, on en déduit

$$\|g_n - g_m\|^2_{\mathcal{H}} \le 2\|f - g_n\|^2_{\mathcal{H}} + 2\|f - g_m\|^2_{\mathcal{H}} - 4I^2 \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n, m \to \infty.$$

La suite (g_n) étant de Cauchy, elle converge vers une limite notée $p_M f \in M$, qui vérifie donc (4.2).

• Par définition et convexité de M, on a

$$\|f - p_M f\|^2_{\mathcal{H}} \le \|f - (1-t)p_M f - th\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, h \in M,\ \forall\, t \in (0,1).$$

On fixe $h \in M$. En développant le terme de droite et après simplification, on a

$$0 \le t(f - p_M f, p_M f - h)_{\mathcal{H}} + t^2\|p_M f - h\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \in (0,1).$$

En divisant par t et en passant à la limite $t \to 0$, on en déduit

$$0 \le (f - p_M f, p_M f - h)_{\mathcal{H}}.$$

On conclut que $p_M f$ satisfait (4.3) en choisissant $g := \pm(p_M f - h)$.

• Réciproquement, si $u \in M$ vérifie

$$(f - u, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, g \in M,$$

alors pour tout $h \in M$, on a

$$\|f - h\|^2_{\mathcal{H}} - \|f - u\|^2_{\mathcal{H}} = \|(f-u) + (u-h)\|^2_{\mathcal{H}} - \|f - u\|^2_{\mathcal{H}} = \|u - h\|^2_{\mathcal{H}} \ge 0.$$

Cela prouve bien que u est solution du problème de minimisation (4.2).

• Si u_1 et $u_2 \in M$ satisfont

$$(f - u_1, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (f - u_2, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, g \in M,$$

alors en particulier en prenant $g = u_2 - u_1$ dans la première inégalité et $g = u_1 - u_2$ dans la seconde inégalité, il vient

$$\|u_2 - u_1\|_{\mathcal{H}}^2 = (f - u_1, u_2 - u_1)_{\mathcal{H}} + (u_2 - f, u_2 - u_1)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Cela prouve $u_1 = u_2$ et l'unicité de la projection sur M.

• Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(f_1 - p_M f_1, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (f_2 - p_M f_2, g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, g \in M,$$

soit donc

$$(f_1 + \lambda f_2 - (p_M f_1 + \lambda p_M f_2), g)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, g \in M.$$

Cela étant une caractérisation de $p_M(f_1 + \lambda f_2)$, on a démontré la linéarité de p_M.

• Pour $f \in \mathcal{H}$ et en choisissant $g := p_M f$ dans (4.3), il vient

$$\|p_M f\|_{\mathcal{H}}^2 - (f, p_M f)_{\mathcal{H}} = (p_M f - f, p_M f)_{\mathcal{H}} = 0,$$

et donc

$$\|p_M f\|_{\mathcal{H}}^2 = (f, p_M f)_{\mathcal{H}} \le \|f\|_{\mathcal{H}} \|p_M f\|_{\mathcal{H}}.$$

On en déduit immédiatement que p_M est 1-Lipschitzienne. $\square$

Définition 4.4. *Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual de X, on note X', l'espace vectoriel normé des formes linéaires continues sur X. Ainsi, $\varphi \in X'$, si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est linéaire et*

$$\exists\, C \ge 0, \quad \forall\, f \in X, \quad |\varphi(f)| \le C\, \|f\|_X. \tag{4.4}$$

La norme sur X' est la norme d'opérateur définie par

$$\|\varphi\|_{X'} := \inf\{C \ge 0 \text{ satisfaisant } (4.4)\} = \sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{\varphi(f)}{\|f\|_X}.$$

Exemples 4.5. *Pour $p \in [1, \infty]$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}$, l'application*

$$L^p \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \varphi_g(f) := \int f\, g\, d\mu$$

est une forme linéaire continue sur L^p. En effet, les inégalités de Hölder (2.1) et (3.1) nous disent

$$\int |f\, g|\, d\mu \le \|f\|_p\, \|g\|_{p'},$$

de sorte que $\varphi_g(f)$ est bien définie. L'application φ_g est alors évidemment linéaire et on voit qu'elle est continue en utilisant encore une fois les inégalités de Hölder (2.1) et (3.1).

Remarque 4.6. *(1) Il convient de ne pas trop se formaliser sur le choix des espaces $\mathcal{L}^p$ ou L^p, puisque si $U \in L^1$, $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^1$ avec $u_i \in U$ et donc $u_1 = u_2$ p.p., on a*

$$\int U d\mu := \int u_1 d\mu := \int u_2\, d\mu.$$

En écrivant $u \in \mathcal{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, on insiste sur le fait que u est une fonction définie en tout point de E, en écrivant $u \in L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$, on insiste sur le fait que u est un vecteur d'un espace vectoriel normé.

(2) On note $\Phi : L^{p'} \to (L^p)'$, l'application $g \mapsto \Phi(g) := \varphi_g$ définie dans l'exemple 4.5. On observe que Φ est linéaire, puisque

$$\varphi_{g_1+\lambda g_2}(f) = \int f\,(g_1 + \lambda g_2)\,d\mu = \int f\,g_1 d\mu + \lambda \int f\,g_2\,d\mu = \varphi_{g_1}(f) + \lambda \varphi_{g_2}(f)$$

et qu'elle est injective puisque $\Phi(g) = 0$ implique en particulier que $0 = \varphi_g(f) = \|g\|_{p'}^{p'}$ et donc $g = 0$, en choisissant $f := g|g|^{p'-2} \in L^p$ lorsque $p' < \infty$. Pour traiter la cas $p' = \infty$, il faut supposer de plus μ σ-finie. En introduisant une suite (E_n) croissante de $\mathscr{A}$ telle que $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \nearrow E$ et la suite de fonctions $f_n := g\,\mathbf{1}_{E_n}$, on a

$$\int_{E_n} |g|^2 d\mu = \varphi_g(f_n) = 0,$$

et donc encore $g = 0$ sur $E = \cup E_n$. On peut enfin démontrer que $\|\varphi_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}}$ (le cas $p' < \infty$ se déduit du cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, le cas $p' = \infty$ est un peu plus fastidieux ...), de sorte que $\Phi : L^{p'} \to (L^p)'$ est une application linéaire isométrique, soit donc $L^{p'}$ et $\Phi(L^{p'})$ sont isomorphes et $\Phi(L^{p'})$ est un sev fermé de $(L^p)'$. En « identifiant » $L^{p'}$ et $\Phi(L^{p'})$, on notera donc parfois $L^{p'} \subset (L^p)'$.

Théorème 4.7 (de représentation de Riesz - version abstraite)**.** *Etant donné un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on peut identifier le dual de $\mathcal{H}$ avec $\mathcal{H}$, soit donc $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$. Plus précisément, si $\varphi \in \mathcal{H}'$, il existe un unique vecteur $u \in \mathcal{H}$ tel que*

$$\varphi(g) = (u, g)_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, g \in \mathcal{H}.$$

Preuve du Théorème 4.7. Posons $M := \varphi^{-1}(0)$ qui est un sev fermé de $\mathcal{H}$. Si $M = \mathcal{H}$ alors $\varphi = 0$ et on peut prendre $u = 0$. Dans le cas contraire, il existe $f_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi(f_0) \neq 0$. En posant $f := (p_M f_0 - f_0)/\|p_M f_0 - f_0\|_{\mathcal{H}}$, on a donc

$$f \notin M, \quad \|f\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad (f, w) = 0, \ \forall\, w \in M.$$

Tout $g \in \mathcal{H}$ admet une décomposition $g = \lambda f + w$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in M$, en posant

$$\lambda := \frac{\varphi(g)}{\varphi(f)}, \quad w := g - \lambda f,$$

de sorte que

$$\varphi(w) = \varphi(g) - \lambda \varphi(f) = 0, \quad \text{donc } w \in M.$$

En posant $u := \varphi(f) f$, on en déduit

$$(u, g)_{\mathcal{H}} = \varphi(f)(f, \lambda f + w) = \varphi(f)\lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \varphi(g),$$

pour tout $g \in \mathcal{H}$. C'était la relation souhaitée. L'unicité de u est immédiate. □

Théorème 4.8 (de représentation de Riesz - version L^2)**.** *L'espace L^2 est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire (4.1). Le dual de l'espace L^2 s'identifie donc avec l'espace L^2 lui-même. Soyons plus précis et considérons une forme linéaire et continue φ sur L^2 au sens où $\varphi : L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ est linéaire et*

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+, \quad \forall\, g \in L^2, \quad |\varphi(g)| \le C\,\|g\|_2.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{L}^2$, unique (à une modification sur un ensemble négligeable près), telle que

$$\forall\, g \in L^2, \quad \varphi(g) = \int f g\,d\mu.$$

Preuve du Théorème 4.8. Il suffit de remarquer que le Théorème 4.7 s'applique. □

5 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 5.1. *Soit p une fonction positive mesurable. La fonction d'ensembles $\nu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, notée $\nu = p\,\mu$ et définie par*

$$\nu(A) = \int_A p(x)\, d\mu(x), \quad \forall\, A \in \mathscr{A},$$

est une mesure (utiliser le Théorème de convergence monotone de Beppo Levi), appelée mesure de densité (ou de poids) p par rapport à la mesure μ. On dit alors que ν est de base μ.

Définition 5.2. *Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et deux mesures μ, ν. On dit que ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, on note $\nu << \mu$, si tout ensemble négligeable pour μ est négligeable pour ν, ou en d'autres termes*

$$(A \in \mathscr{A},\ \mu(A) = 0) \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Théorème 5.3 (de Radon-Nikodym)**.** *Soient μ et ν deux mesures positives σ-finies sur un même espace mesurable $(E, \mathscr{A})$ (pour une même suite croissante (E_n) de E). La mesure ν est de base μ si, et seulement si, elle est absolument continue par rapport à la mesure μ.*

Preuve du Théorème 5.3. L'implication (ν est de base μ) entraine (ν est absolument continue par rapport à la mesure μ) est claire. Nous montrons l'implication réciproque, et cela uniquement dans le cas $\mu(E) < \infty$ et $\nu(E) < \infty$, l'extension au cas de mesures σ-finies est laissée au soin du lecteur. On pose $\sigma = \mu + \nu$, de sorte $L^2(\sigma) = L^2(\mu) \cap L^2(\nu)$. L'application

$$L^2(\sigma) \to \mathbb{R};\ f \mapsto \int_E f\, d\nu$$

est linéaire et continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $g \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tel que

$$\int_E f\, d\nu = \int_E f\, g\, d\sigma, \quad \forall\, f \in L^2(\sigma). \tag{5.1}$$

On a $g \in [0, 1]$ μ-p.p. puisque dans le cas contraire, on aurait $\sigma(A) \geq \mu(A) > 0$ pour $A := \{g \leq -\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ assez petit, et donc

$$\int_A d\nu = \int_A g\, d\sigma \leq -\varepsilon\sigma(A) < 0,$$

ce qui est absurde, ou $\mu(B) > 0$ pour $B := \{g \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ assez petit, et donc

$$\int_B d\nu = \int_B g\, d\sigma \geq (1 + \varepsilon)\Big(\int_B d\nu + \int_B d\mu\Big) > 0,$$

ce qui est également absurde. Quitte à modifier g sur un ensemble μ-négligeable, on peut supposer $g(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in E$, ce que l'on fait désormais. On en déduit que $\nu = g\,\sigma = g\,(\mu + \nu)$. Puisque $L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$ (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse $\mu(E) < \infty$), on a donc

$$\int f\, d\nu = \int f\, g\, d\mu + \int f\, g\, d\nu,$$

puis

$$\int f\,(1 - g) d\nu = \int f\, g\, d\mu, \tag{5.2}$$

pour toute fonction $f \in L^\infty(\mu)$. L'identité (5.2) est donc également vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$, grâce à un argument d'approximation et en utilisant le théorème de convergence monotone dans les deux intégrales. En particularisant (5.2) aux fonctions f caractéristiques d'ensemble, on obtient $(1 - g)\nu = g\mu$. Une adaptation d'un argument précédent montre que $g < 1$ ν-p.p., puisque dans le cas contraire on aurait $\nu(C) > 0$ pour $C := \{g \geq 1\}$, donc également $\mu(C) > 0$ (c'est uniquement ici que l'on utilise l'hypothèse $\nu << \mu$), et enfin

$$\int_C d\nu = \int_C g\, d\sigma \geq \int_C d\nu + \int_C d\mu > \int_C d\nu,$$

ce qui est absurde. En appliquant (5.2) à la fonction $f := h/(1-g) \in \mathcal{M}_+$ avec $h \in \mathcal{M}_+$, on a

$$\int h d\nu = \int \frac{h}{1-g}\,(1-g) d\nu = \int \frac{h}{1-g}\, g\, d\mu,$$

ce qui prouve

$$\nu = \frac{g}{1-g}\mu,$$

et donc que ν est de base μ. □

Définition 5.4. *Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et deux mesures μ, ν. On dit que μ et ν sont étrangères, on note $\nu \perp \mu$, si*

$$\exists\, F \in \mathscr{A}, \quad \mu(F) = 0, \quad \nu(F^c) = 0.$$

Théorème 5.5 (de Radon-Nikodym (suite))**.** *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un même espace mesurable $(E, \mathscr{A})$. Il existe un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures sur $\mathscr{A}$ tel que*

(i) $\nu = \nu_a + \nu_s$;

(ii) $\nu_a << \mu$, $\nu_s \perp \mu$.

Preuve du Théorème 5.5. On ne traite que le cas de mesures finies. On reprend la démonstration du Théorème 5.3 et les notations introduites dans la preuve de celui-ci. Le début de la preuve du Théorème 5.3 montre qu'il existe $g \in \mathcal{L}^2(\sigma)$ tel que $\nu = g\,(\mu + \nu)$ et $0 \leq g \leq 1$ (après modification éventuelle sur un ensemble négligeable pour la mesure $\mu + \nu$) et que

$$\int f\,(1-g) d\nu = \int f\, g\, d\mu, \quad \forall\, f \in \mathcal{M}_+. \tag{5.3}$$

On définit $F := \{x \in E; g(x) = 1\}$, $\nu^s := \nu\, \mathbf{1}_F$ et $\nu^a := \nu\, \mathbf{1}_{F^c}$, de sorte que (i) est vérifié et $\nu^s(F^c) = 0$. En choisissant $f := \mathbf{1}_F$ dans (5.3), on a donc

$$\mu(F) = \int \mathbf{1}_F\, g\, d\mu = \int \mathbf{1}_F\,(1-g) d\nu = 0,$$

de sorte que $\nu_s \perp \mu$. En choisissant $f := (1-g)^{-1}\, \mathbf{1}_{F^c}\, \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{A}$, dans (5.3), il vient

$$\nu^a(A) = \int (1-g)^{-1}\, \mathbf{1}_{F^c}\, \mathbf{1}_A\,(1-g) d\nu = \int_A \frac{g}{1-g}\, \mathbf{1}_{F^c}\, d\mu,$$

de sorte que clairement $\nu^a << \mu$. □