Chapitres 6 - Intégration dans $\mathbb{R}^d$: convolution, densité, transformation de Fourier

Table des matières

Sont écrites en rouge les parties hors programme et en violet les parties traitées en TD (résultats à connaitre pour sa culture). Dans ce chapitre, on munit $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ de la mesure de Lebesgue, notée $d\lambda$ ou simplement dx ou parfois d'une mesure positive bornée.

1 Convolution dans $C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $M_+^1(\mathbb{R}^d)$

Pour deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^d$, la convolée (ou produit de convolution) $f * g$ est définie par

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

lorsque cette dernière expression a un sens. Nous donnons quelques résultats sur cette opération remarquable et la nouvelle fonction obtenue. Beaucoup de résultats peuvent être obtenus en jouant sur les espaces fonctionnels dans lesquels vivent les arguments, et pour n'en citer que quelqu'uns, on peut démontrer

(A) $C_c^k * C_c^\ell \subset C_c^{k+\ell}$;

(B) $E * \mathcal{L}^1 \subset E$ pour de nombreux espaces fonctionnels E, on retiendra en particulier
(B′) $C_b^k * \mathcal{L}^1 \subset C_b^k$; (B″) $\mathcal{L}^1 * \mathcal{L}^1 \subset L^1$; (B‴) $\mathcal{L}^p * \mathcal{L}^1 \subset L^p$;

(C) $\mathcal{L}^p * \mathcal{L}^q \subset L^r$ si $q \le p'$ avec $1/r := 1/p + 1/q - 1$, et plus précisément $\subset C_0$ si $q = p' \in]1, \infty[$, on retiendra en particulier
(C′) $\mathcal{L}^1 * \mathcal{L}^1 \subset L^1$ (c'est (B′)) ; (C″) $\mathcal{L}^1 * \mathcal{L}^p \subset L^p$ (c'est (B″)) ; (C‴) $\mathcal{L}^p * \mathcal{L}^{p'} \subset L^\infty$;

(D) $E * M_+^1 \subset E$ pour de nombreux espaces fonctionnels E, on retiendra en particulier
(D′) $C_b^k * M_+^1 \subset C_b^k$; (D″) $M_+^1 * M_+^1 \subset M_+^1$.

Nous ne démontrerons que certains de ces résultats, et plus précisément les résultats (A), (B′), (B″) et (D′). D'autres résultats seront vus en TD ou dans le cours de *Topologie et analyse fonctionnelle* du second semestre. Il est important de noter que la définition (1) n'est pertinente que lorsque les deux arguments sont des fonctions (résultats (A) à (C)). Lorsqu'au moins un des arguments est une mesure, il conviendra d'adapter la définition de la convolution à l'aide de (3) pour (D′) et (4) pour (D′′).

Les espaces de fonctions continues introduits ci-dessus sont définis de la manière suivante :

- $C_b(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues et bornées, et de la même manière, $C_b^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est l'espace des fonctions k fois dérivable telles que toutes les dérivées partielles appartiennent à $C_b(\mathbb{R}^d)$;

- $C_0(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, et de la même manière, $C_0^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'espace des fonctions k fois dérivable telles que toutes les dérivées partielles appartiennent à $C_0(\mathbb{R}^d)$;

- $C_c(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues à support compact et de la même manière, $C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est l'espace des fonctions k fois dérivable telles que toutes les dérivées partielles appartiennent à $C_c(\mathbb{R}^d)$. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue, on définit son support $\operatorname{supp} f$, comme l'ensemble

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^d,$$

en particulier $f(x) = 0$ si $x \notin \operatorname{supp} f$. Puisque par définition $\operatorname{supp} f$ est fermé, une fonction continue est à support compact si, et seulement si, il existe une boule B_R centrée en 0 et de rayon $R \geq 0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset B_R$.

Il est important d'observer que $C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que tous ces espaces sont munis de la norme uniform $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi définis les evn $C_0(\mathbb{R}^d)$ et $C_b(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Banach et $C_c(\mathbb{R}^d)$ n'est pas complet mais $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ et $C_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^d)$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\partial_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

On peut généraliser la notation de la manière suivante. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, et pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_d + \beta_d) \in \mathbb{N}^d$. Dire que $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, signifie que les dérivées partielles

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}(x)$$

sont successivement définies pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$.

On note enfin

- $M_+^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures μ positives et bornées, au sens où $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. En particulier, en notant $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \subset M_+^1(\mathbb{R}^d)$.

Commençons par un premier résultat dans un cadre simple qui néanmoins inclus la plupart des propriétés et des arguments qui vont être développés par la suite.

Théorème 1.1 ($C_c^k * C_c^\ell \subset C_c^{k+\ell}$)**.** *Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C_c^\ell(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$f * g = g * f \in C_c^{k+\ell}(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

et

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}, \quad \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

En dimension $d = 1$ pour simplifier, on a

$$\forall\, k', \ell' \in \mathbb{N},\ k' \leq k,\ \ell' \leq \ell, \quad (f * g)^{(k'+\ell')} = f^{(k')} * g^{(\ell')}.$$

En dimension $d \geq 1$, on a

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq \ell, \quad \partial^{\alpha+\beta}(f * g) = (\partial^\alpha f) * (\partial^\beta g)$$

ou plus simplement

$$\forall\, i \in \{1, \dots, d\} \quad \partial_i(f * g) = (\partial_i f) * g, \quad si \quad f \in C_c^1(\mathbb{R}^d).$$

Preuve du Théorème 1.1. • Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $F_x(y) := f(x-y)g(y)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on observe que

(i) $\forall\, y \in \mathbb{R}^d$, $|F_x(y)| \le \|f\|_{L^\infty} g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

et $y \mapsto F_x(y)$ est continue, donc mesurable. Ainsi F_x est intégrable, (1) est bien défini, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy \Big| \le \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\, dy,$$

ce qui prouve la première inégalité fonctionnelle. On observe également que

(ii) $F_{x'} \to F_x$ ponctuellement si $x' \to x$,

de sorte que $x \mapsto (f * g)(x)$ est continue d'après le Théorème de continuité sous le signe somme (Proposition III-2.3 de continuité par rapport au paramètre). A ce stade, on a ainsi démontré $C_c * C_c \subset C_b$.

En effectuant le changement de variables $z := x - y$, $dz := dy$, on obtient

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(x-z)\, dz = (g * f)(x).$$

Plus précisément, pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on définit $\phi_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $y \mapsto \phi_x(y) := x - y$, qui est évidemment un difféomorphisme puisque de classe C^∞ et d'inverse $\phi_x^{-1} = \phi_x$. On applique le théorème de changement de variables

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\phi_x(y)) g(\phi_x^{-1}(\phi_x(y))\, |J_{\phi_x}(y)|\, dy \\
&= \int_{\phi_x(\mathbb{R}^d)} f(z) g(\phi_x^{-1}(z))\, dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(x-z)\, dz,
\end{aligned}$$

puisque $\phi_x(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$, $D\phi_x = -I$ et donc $|J_{\phi_x}(y)| = |\mathrm{det} D\phi_x(y)| = 1$.

On se restreint maintenant à la dimension $d = 1$. On suppose $k \ge 1$ et on observe que

(iii) pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F_x(y)$ est de classe C^1 et $\partial_x F_x(y) = f'(x-y)g(y)$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\partial_x F_x(y)| \le \|f'\|_{L^\infty} g(y) \in L^1(\mathbb{R})$.

Combiné à (i), cela permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme et de conclure que $(f * g)' = f' * g$. Par récurrence, on a ainsi $(f * g)^{(k')} = f^{(k')} * g = g * f^{(k')}$. On peut alors itérer l'argument et on obtient

$$(f * g)^{(k'+\ell')} = (g * f^{(k')})^{(\ell')} = g^{(\ell')} * f^{(k')} = f^{(k')} * g^{(\ell')},$$

ce qui conclut la preuve de $f * g \in C_b^{k+\ell}(\mathbb{R})$.

• On revient au cas de la dimension $d \ge 1$ quelconque et on démontre la deuxième inégalité fonctionnelle. On applique le Théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy \Big|\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dx \Big] g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\, dz \Big] |g(y)|\, dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $x \mapsto z = x - y$ à la dernière ligne.

• On démontre afin la propriété des supports. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. La condition $x \notin A := \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g$ signifie que $x - y \notin \mathrm{supp} f$ si $y \in \mathrm{supp}\, g$ et donc

$$\mathbf{1}_{\mathrm{supp} f}(x-y) \mathbf{1}_{\mathrm{supp} g}(y) = 0, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d.$$

On en déduit que

$$|(f*g)(x)| \le \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{supp} f}(x-y)\mathbf{1}_{\mathrm{supp} g}(y)\,dy = 0,$$

pour tout $x \notin \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g$. Par passage à la contraposée, on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d,\ (f*g)(x) \neq 0\} \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g,$$

et on conclut à $\mathrm{supp}\,(f*g) \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g$ en prenant l'adhérence. □

Une adaptation de la preuve du Théorème 1.1 permet d'obtenir les deux variantes suivantes.

Proposition 1.2 ($C^k_b * \mathcal{L}^1 \subset C^k_b$)**.** *Si maintenant $f \in C^k_b(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on a $f*g = g*f \in C^k_b(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve de Proposition 1.2. Il suffit d'observer que tous les arguments développés dans le premier point du Théorème 1.1 peuvent être utilisés sans modification dans le présent cadre (en posant $\ell := 0$). □

Théorème 1.3 ($\mathcal{L}^1 * \mathcal{L}^1 \subset L^1$)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, de sorte que $(f*g)(x)$ est presque partout définie. De plus, $f*g = g*f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f*g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}. \tag{2}$$

Preuve du Théorème 1.3. On reprend et adapte le second point du Théorème 1.1. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $F(x,y) := f(x-y)g(y)$. Pour (presque) tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int |F(x,y)|\,dx = \int |f(x-y)|dx|g(y)| = \|f\|_{L^1}\,|g(y)| < \infty$$

et

$$\int\Big[\int |F(x,y)|\,dx\Big]dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Appliquant le Théorème V.3.2 de Tonelli on obtient $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Appliquant ensuite le Théorème V.3.3 de Fubini, on a

$$\int |F(x,y)|\,dy < \infty, \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^d, \quad \int F(x,y)\,dy \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

et

$$\int\Big|\int F(x,y)\,dy\Big|dx \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

ce qui est exactement la conclusion recherchée. □

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}$, on définit les fonctions gaussiennes (centrées) par

$$G_\lambda(x) := (2\pi\lambda)^{-1/2}\exp(-x^2/(2\lambda)).$$

On appelle gaussienne standard $G := G_1$. On a alors

$$G_s * G_t = G_{s+t}, \quad \forall\, s,t > 0.$$

On commence par observer que

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{2s}}e^{\frac{-y^2}{2t}} = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{s+t} + \Big(\big(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\big)^{1/2}y - \frac{1}{s}\big(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\big)^{-1/2}x\Big)^2\Big]\Big\},$$

de sorte qu'en effectuant successivement deux changements de variables

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2s}} e^{\frac{-y^2}{2t}}\,dy &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{s+t}\Big)\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(-\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{1}{t})y^2\Big)dy \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{s+t}\Big)\sqrt{2\pi}(\frac{1}{s}+\frac{1}{t})^{-1/2}.\end{aligned}$$

On conclut alors aisément.

Corollaire 1.4 ($\mathcal{L}^\infty * \mathcal{L}^1 \subset L^\infty$)**.** *Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g = g * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1$.*

Preuve du Corollaire 1.4. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $F(x,y) := f(x-y)g(y)$, $G(x,y) := f(y)g(x-y)$, et on observe que

$$\begin{aligned}\int |F(x,y)|\,dy &\le \int |g(y)|\,dy\,\|f\|_\infty = \|g\|_1\,\|f\|_\infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \\ \int |G(x,y)|\,dy &\le \int |g(x-y)|\,dy\,\|f\|_\infty = \|g\|_1\,\|f\|_\infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Ainsi $F(x,\cdot)$ et $G(x,\cdot)$ sont intégrables pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui permet de définir les produits de convolution $f * g$ et $g * f$, et les bornes uniformes proviennent des inégalités précédentes. En effectuant le changement de variables $z := x - y$, $dz := dy$, on obtient

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x).$$

Pour être plus précis, on définit $y \mapsto z = \phi_x(y) := x - y$ et on calcule $D\phi_x = -I$ puis la valeur absolue du Jacobien $|\det D\phi_x(y)| = 1$. Pour justifier le fait que $g * f$ est mesurable, et donc appartient à $\mathcal{L}^\infty$, on peut par exemple invoquer un argument d'approximation. On note $f_R := f\,\mathbf{1}_{B(0,R)} \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$. Le calcul précédent et le Théorème 1.3 impliquent que $f_R * g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ (le caractère mesurable provenant du théorème de Fubini utilisé dans la preuve du Théorème 1.3). Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on calcule

$$\begin{aligned}|(f*g)(x) - (f_R * g)(x)| &\le \|f\|_\infty \int_{|x-y|\ge R} |g(y)|\,dy \\ &\le \|f\|_\infty \int_{|y| \ge R - |x|} |g(y)|\,dy \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

lorsque $R \to \infty$, grâce au théorème de convergence dominée. Donc $f * g = \lim f_R * g$ (ponctuellement) est mesurable. $\square$

Pour une fonction f définies sur $\mathbb{R}^d$ et une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^d$, on définit $f * \mu$ par

$$(f * \mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

lorsque cette dernière expression a un sens. En observant que $g\lambda$ définit une mesure sur $\mathbb{R}^d$ si $g \ge 0$, on voit que cette deuxième définition est une généralisation de la première définition.

Théorème 1.5 ($C_b * M^1_+ \subset C_b$)**.** *Pour $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et μ une mesure positive et finie de $\mathbb{R}^d$, on a $f * \mu \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * \mu\|_\infty \le \|f\|_\infty\, \mu(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve du Théorème 1.5. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note $F_x(y) := f(x-y)$, de sorte que $F_x \in C_b(\mathbb{R}^d)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et on écrit

$$(f * \mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} F_x(y)d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Cette expression a bien un sens puisque F_x est borélienne (puisque continue) et donc $F_x \in L^1(d\mu)$ (puisque F_x est bornée). On observe également que

(i) $F_{x'} \to F_x$ ponctuellement si $x' \to x$,

(ii) $|F_x| \le \|f\|_\infty \in L^1(d\mu)$,

de sorte que $x \mapsto (f * \mu)(x)$ est continue d'après le Théorème de continuité sous le signe somme (Proposition III-2.3 de continuité par rapport au paramètre qui n'est autre que le théorème de convergence dominée). Enfin, on a

$$|(f * \mu)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |F_x(y)| d\mu(y) \le \|f\|_\infty \mu(\mathbb{R}^d),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. $\square$

Corollaire 1.6 ($C_b^1 * M_+^1 \subset C_b^1$)**.** *Si de plus $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \mu \in C_b^1$ et $\partial_i(f * \mu) = (\partial_i f) * \mu$.*

Preuve du Corollaire 1.6. On se place en dimension $d = 1$ pour simplifier. On observe que sous ces conditions supplémentaires, on a

(iii) $x \mapsto F_x(y)$ est dérivable de dérivée $\partial_x(F_x(y)) = f'(x - y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$,

de sorte que $x \mapsto (f * \mu)(x)$ est de classe C^1 d'après le Théorème de dérivabilité sous le signe somme (Proposition III-2.4 de dérivabilité par rapport au paramètre). $\square$

Exemple 2 : Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on se rappelle que la mesure de Dirac δ_a est définie par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$, $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A$. Pour $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (ou même juste f mesurable positive), on a

$$(f * \delta_a)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\, \delta_a(dy) = f(x - a), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

et en particulier

$$f * \delta_0 = f.$$

On dit que δ_0 est l'identité (ou l'élément neutre) pour le produit de convolution. Justifions la première identité. Pour $f := \mathbf{1}_A$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(f * \delta_a)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x - y)\, \delta_a(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x-A}(y)\, \delta_a(dy) = \mathbf{1}_{x-A}(a) = \mathbf{1}_A(x - a),$$

ce qui n'est rien d'autre que l'identité souhaitée dans ce cas particulier. On raisonne par approximations successives (fonctions étagées, fonctions mesurables positives, différences de deux fonctions intégrables positives) afin d'obtenir cette même identité dans le cas général. Il est à retenir de ce calcul que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\, \delta_a(dy) = \varphi(a), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, \varphi \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^d) \cup C_b(\mathbb{R}^d).$$

Nous adaptons finalement la définition du produit de convolution au cas où les deux arguments sont des mesures.

Théorème 1.7. *Soient μ et ν deux mesures positives et finies sur $\mathbb{R}^d$, et notons $s : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'application mesurable $(x, y) \mapsto x + y$. On définit la convolution $\mu * \nu$ comme étant la mesure positive et finie définie par*

$$\mu * \nu := s_\sharp(\mu \otimes \nu). \tag{4}$$

Pour toute fonction mesurable positive $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x + y) d\mu(x) d\nu(y).$$

De plus, si $\mu = f\lambda$ avec $0 \le f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et λ la mesure de Lebesgue, alors $\mu * \nu = h\lambda$, avec

$$h(x) = (f * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\nu(dy) \quad \textit{pour p.t. } x \in \mathbb{R}^d,$$

de sorte que la definition (4) *coïncide bien avec la definition* (3) *dans ce cas particulier.*

Preuve du Théorème 1.7. D'après la définition d'une mesure image au Chapitre 4, on peut écrire plus explicitement

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(A) &= \mu \otimes \nu(s^{-1}(A)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{s^{-1}(A)}(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y),\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{1}_{s^{-1}(A)}(x,y) = \mathbf{1}_{s(x,y)\in A} = \mathbf{1}_A(x+y)$. D'après la Proposition IV.4.2, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, d\mu(x) d\nu(y), \tag{5}$$

pour toute fonction borélienne positive φ. En choisissant $\varphi = 1$, on a en particulier

$$(\mu * \nu)(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d\mu(x) d\nu(y) = \mu(\mathbb{R}^d)\nu(\mathbb{R}^d) < \infty,$$

ce qui prouve que $\mu * \nu$ est une mesure finie. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(A) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) d\nu(x) d\mu(y) = (\nu * \mu)(A),\end{aligned}$$

pour tout borélien A, ce qui prouve que $\mu * \nu = \nu * \mu$.
On suppose désormais que $\mu = f\lambda$ avec $0 \le f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et λ la mesure de Lebesgue. On observe que $s = s \wedge M + (s-M)_+$ pour tout $s, M \ge 0$. Pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$, on a donc

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_B f(x)\, dx = \int_B f(x) \wedge M\, dx + \int_B (f(x)-M)_+\, dx \\ &\le M \int_B dx + \int (f(x)-M)_+\, dx = M\lambda(B) + \alpha(M),\end{aligned}$$

pour tout $M > 0$, avec

$$\alpha(M) := \int (f(x)-M)_+\, dx \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'après le théorème de convergence dominée. En définissant

$$\omega_f(s) := \inf_{M>0} \big\{ Ms + \alpha(M) \big\},$$

on a donc $\omega_f(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$ et $\mu(B) \le \omega_f(\lambda(B))$ pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$. Il s'ensuit que, toujours d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(A) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x+y) d\mu(x) \Big] d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A-y}(x) d\mu(x) \Big] d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu(A-y) d\nu(y) \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} \omega_f(\lambda(A-y)) d\nu(y) = \omega_f(\lambda(A))\, \nu(\mathbb{R}^d) \to 0,\end{aligned}$$

lorsque $\lambda(A) \to 0$, où on a utilisé l'invariance par translations de la mesure de Lebesgue dans la dernière ligne. Cela établit que $\mu*\nu$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après le Théorème de Radon-Nikodym, il existe donc une fonction borélienne positive $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mu * \nu = h\lambda$. On a en fait ici $h \in \mathcal{L}^1$, puisque

$$\int_{\mathbb{R}^d} h\, dx = (h\lambda)(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} d(\mu * \nu) = \mu(\mathbb{R}^d)\nu(\mathbb{R}^d) < \infty,$$

grâce à (5). On a ainsi établi que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi h\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d(\mu * \nu),$$

pour toute fonction caractéristique d'ensemble φ, donc par linéarité, pour fonction étagée φ, donc enfin par le théorème de convergence monotone, pour toute fonction borélienne et positive φ. Ainsi, d'après (5) et le théorème de Fubini, pour toute fonction borélienne et positive φ, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi h\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) d\mu(x)\Big] d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) f(x) dx\Big] d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) f(z-y) dz\Big] d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \Big[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) d\nu(y)\Big] dx,
\end{aligned}$$

où on a utilisé un changement de variables (toujours le même) à la troisième ligne et le théorème de Fubini à la dernière ligne. On conclut que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) d\nu(y),$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, d'après le lemme suivant. Ainsi les définitions (3) et (4) coïncident bien lorsque $\mu = f\lambda$. □

Lemme 1.8. *[C'est un exercice du chapitre 2] Soit $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$\int u\psi dx = 0$$

pour toute fonction ψ borélienne, positive et bornée. Alors $u = 0$.

Preuve du Lemme 1.8. Si $u \neq 0$ alors $A_+ = \{u > 0\}$ ou $A_- = \{u < 0\}$ est de mesure non nulle, et donc

$$\int u\mathbf{1}_{A_+} dx > 0 \quad \text{ou} \quad \int u\mathbf{1}_{A_-} dx < 0,$$

ce qui est absurde. □

2 Régularité de la mesure de Lebesgue

Théorème 2.1. *La mesure de Lebesgue λ est régulière sur la tribu borélienne $\mathscr{B}([a,b])$, $a < b \in \mathbb{R}$: pour tout borélien $B \in \mathscr{B}([a,b])$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe K compact et O ouvert tels que*

$$K \subset B \subset O, \quad \lambda(O \backslash K) < \varepsilon. \tag{6}$$

La preuve du Théorème 2.1 repose sur un argument de classe monotone. Nous donnons maintenant un deuxième résultat un peu moins précis mais de même nature dont la preuve est semblable et qui nous suffira pour la suite de ce chapitre.

Théorème 2.2. *La mesure de Lebesgue λ est régulière sur la tribu borélienne $\mathscr{B}([a,b])$, $a < b \in \mathbb{R}$: pour tout borélien $B \in \mathscr{B}([a,b])$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble A appartenant à l'algèbre $\mathcal{A}$ induite par les intervalles de $[a,b]$ tel que*

$$\|\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\|_{L^1} < \varepsilon. \tag{7}$$

Preuve 1 du Théorème 2.2. On donne une preuve qui utilise le Théorème 2.1. Soit $B \in \mathscr{B}([a,b])$. D'après le Théorème 2.1 de "régularité de la mesure de Lebesgue", pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset (a,b)$ tel que

$$B \subset \mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[, \quad \lambda(\mathcal{O}\backslash B) < \varepsilon/2.$$

On pose

$$\mathcal{O}_N := \bigcup_{n=1}^{N}]a_n, b_n[, \quad \lambda(\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}_N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon/2,$$

en choisissant $N \geq 1$ assez grand. On a alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{\mathcal{O}_N}\|_{L^1} &\leq \|\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{\mathcal{O}}\|_{L^1} + \|\mathbf{1}_{\mathcal{O}} - \mathbf{1}_{\mathcal{O}_N}\|_{L^1} \\ &= \int \mathbf{1}_{\mathcal{O}\backslash B}\, dx + \int \mathbf{1}_{\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}_N}\, dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui donne une approximation de $\mathbf{1}_B$ dans L^1 à ε près par une fonction en escalier. □

Preuve 2 du Théorème 2.2. On donne une preuve directe.

On commence par introduire quelques notations et rappeler quelques faits élémentaires. On a $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i),$$

où (a_i, b_i) désigne un intervalle (ouvert, fermé ou semi-fermé) de $[a,b]$. Pour $A, B \in \mathscr{B}([a,b])$, on note

$$A\Delta B := (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

la différence symétrique de A et B. On a alors

$$\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|_{L^1} = \|\mathbf{1}_{A\Delta B}\|_{L^1} = \lambda(A\Delta B).$$

On fixe maintenant $B \in \mathscr{B}([a,b])$ et on définit l'ensemble de parties

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathscr{B}([a,b]);\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A \in \mathcal{A},\ \lambda(C\Delta A) < \varepsilon\}.$$

Il est alors clair que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ (prendre $A = C$ si $A \in \mathcal{A}$).

On montre que $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante. Pour cela, on considère une suite croissante (C_n) de $\mathcal{C}$ et on note $C := \cup_{j\geq 1} C_j$. On a évidemment $C \in \mathscr{B}([a,b])$ puisque $C_j \in \mathscr{B}([a,b])$ pour tout $j \geq 1$ et

$$\lambda(C\backslash C_n) \to \lambda(\emptyset) = 0,$$

par la propriété de continuité des limites décroissantes pour la mesure finie λ de $\mathscr{B}([a,b])$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\lambda(C\backslash C_n) < \varepsilon/2$. Puisque $C_n \in \mathcal{C}$, il existe par définition $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(C_n\Delta A_n) < \varepsilon/2$. En écrivant

$$\begin{aligned} C\Delta A_n &= (C \cap C_n^c \cap A_n^c) \cup (C_n\backslash A_n) \cup (A_n\backslash C) \\ &\subset (C\backslash C_n) \cup (C_n\Delta A_n), \end{aligned}$$

on en déduit que $\lambda(C\Delta A_n) < \varepsilon$, et donc $C \in \mathcal{C}$. Cela prouve que $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante.

On peut montrer également que $\mathcal{C}$ est stable par limite décroissante. Pour cela, on peut soit répéter la même preuve, soit observer que $C\Delta A^c = C^c\Delta A$, de sorte que si $(C_j) \searrow C$, on a $(C_j^c) \nearrow C^c$ et on peut appliquer le résultat de stabilité pour une limite croissante.

Par le lemme de classes monotones et puisque que $\mathcal{C}$ est une classe monotone contenue dans $\mathscr{B}([a,b])$ et contenant l'algèbre $\mathcal{A}$ qui engendre $\mathscr{B}([a,b])$, on a alors bien $\mathcal{C} = \mathscr{B}([a,b])$. □

Théorème 2.3 (densité des fonctions en escalier dans $\mathcal{L}^1(a,b)$)**.** *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier telle que* $\lim \|f - f_n\|_{L^1} = 0$.

On rappelle que l'on dit que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier si elle est de la forme

$$g(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \, \mathbf{1}_{(a_j,b_j)},$$

où les intervalles (ouverts, fermés ou semi-fermés) (a_j,b_j) sont disjoints et $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

Preuve du Théorème 2.3. On sait (c'est un résultat du chapitre 3) qu'une fonction intégrable est limite dans $\mathcal{L}^1$ de fonctions étagées. On sait également (c'est une conséquence du Théorème de convergence dominée) qu'une fonction intégrable est limite dans $\mathcal{L}^1$ de fonctions nulles en dehors d'un intervalle borné. Il suffit donc de savoir traiter le cas d'une fonction f étagée et nulle en dehors d'un intervalle borné, soit donc

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{B_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ B_i \in \mathscr{B}([-R,R]),\ R > 0.$$

Par linéarité, il suffit donc enfin de savoir traiter le cas d'une fonction $\mathbf{1}_{B_i}$, $B_i \in \mathscr{B}([-R,R])$, $R > 0$, mais cela n'est rien d'autre que le Théorème 2.2. □

Exercice 2.4. *Démontrer le Théorème 2.1. Indication : on pourra introduire l'ensemble de parties*

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathscr{B}([0,1]);\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K \text{ compact, } O \text{ ouvert vérifiant } (6)\},$$

et procéder comme dans la preuve du Théorème 2.2. On pourra alors introduire l'algèbre $\mathcal{A}$ induite par les intervalles semi-fermés de $[0,1]$: $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i := [a_i, b_i[,\ I_n = \emptyset \text{ ou } I_n = \{1\},$$

avec $n \ge 1$, $a_i, b_i \in [0,1]$, $a_i < b_i < a_{i+1}$, et montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ en observant que $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, on peut prendre

$$K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \quad O := \bigcup_{i=1}^{n} O_i,$$

avec $K_i := [a_i, b_i - \varepsilon 2^{-i-2}]$, $K_n := \emptyset$, $O_i :=]a_i - \varepsilon 2^{-i-2}, b_i[$, $O_n :=]1 - \varepsilon 2^{-n-2}, 1]$.

3 Densité dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $C(K)$

Définition 3.1 (Approximation de l'identité)**.** *On appelle approximation de l'identité une suite (ρ_n) bornée de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (de borne C, i.e. $\forall\, n \ge 1$, $\|\rho_n\|_{L^1} \le C$) telle que*

$$\int \rho_n \, dx = 1, \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \int_{B_\varepsilon^c} |\rho_n| \, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, est une approximation de l'identité toute suite (ρ_n) construite à partir d'une fonction $\rho \in \mathcal{L}^1$ d'intégrale égale à un en posant $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$.

Une approximation de l'identité typique dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est donc (ρ_n) définie par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$, avec par exemple $\rho := \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}$ ou $\rho(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-|x|^2/2}$. L'expression *approximation de l'identité* provient du fait que l'on a (comme nous allons le démontrer ci-dessous)

$$\rho_n * \varphi \longrightarrow \varphi = \varphi * \delta_0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{L}^1_{loc},$$

puisque δ_0 est l'élément neutre pour le produit de convolution.

Lemme 3.2. *Soit (ρ_n) est une approximation de l'identité. Si $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ alors $f * \rho_n \to f$ ponctuellement. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f * \rho_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve du Lemme 3.2. Etape 1. On suppose $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on écrit

$$\begin{aligned} f * \rho_n(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,dy \\ &= \int_{B_\varepsilon} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,dy + \int_{B_\varepsilon^c} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On a d'une part

$$|I_1| \le \int |\rho_n(y)|\,dy \sup_{|z-x|\le\varepsilon} |f(z) - f(x)| \le C\,\omega_x(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

où ω_x désigne le module de continuité de f au point x. On a d'autre part

$$|I_2| \le 2\|f\|_\infty \int_{B_\varepsilon^c} |\rho_n(y)|\,dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Etape 2. On suppose f intégrable et en escalier et donc bornée et nulle en dehors d'une boule, et $d = 1$ pour simplifier. L'étape précédente montre que $f * \rho_n(x) \to f(x)$ en tout point de continuité x de la fonction f, donc presque partout. On observe également que

$$|(f * \rho_n)(x)| \le \int |f(x-y)||\rho_n(y)|\,dy \le \|f\|_\infty\, C,$$

et donc $(f * \rho_n)$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}^\infty$. Ensemble, cela monter que $f * \rho_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1([-R,R])$ pour tout $R > 0$. D'autre part, en notant $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin [-A,A]$, pour $R > A$, on calcule

$$\begin{aligned} \int_{|x|\ge R} |f * \rho_n - f|\,dx &= \int_{|x|\ge R} |f * \rho_n|\,dx \\ &\le \int_{|x|\ge R}\int_{|y|\le A} |\rho_n(x-y)|\,|f(y)|\,dydx \\ &\le \|f\|_\infty \int_{|x|\ge R}\int_{|y|\le A} |\rho_n(x-y)|\,\mathbf{1}_{|x-y|\ge R-A}dydx \\ &= \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d}\int_{|y|\le A} |\rho_n(z)|\,\mathbf{1}_{|z|\ge R-A}dydz \\ &\le \|f\|_\infty \lambda(B(0,A)) \int_{|z|\ge R-A} |\rho_n(z)|\,dz \to 0, \end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. Cela termine la preuve de $\lim \|f * \rho_n - f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Etape 3. On suppose $f \in \mathcal{L}^1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_ε en escalier telle que $\|f - g_\varepsilon\|_{L^1} \le \varepsilon$. On écrit alors

$$f - f * \rho_n = (f - g) + (g - g * \rho_n) + (g - f) * \rho_n,$$

de sorte que

$$\|f - f * \rho_n\|_{L^1} \leq \|f - g\|_{L^1} + \|g - g * \rho_n\|_{L^1} + \|f - g\|_{L^1}\|\rho_n\|_{L^1}$$

et $\limsup \|f - f * \rho_n\|_{L^1} \leq \varepsilon(1 + C)$ d'après l'étape 2. Il suffit alors de faire tendre $\varepsilon \to 0$ pour conclure. $\square$

Définition 3.3 (noyau régularisant)**.** *On appelle suite régularisante toute suite (ρ_n) de fonctions telle que*

$$0 \leq \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \mathrm{supp}\rho_n \subset B(0, C/n), \quad \int \rho_n \, dx = 1.$$

En pratique, on prendra $\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$ avec $0 \leq \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 3. Il existe bien des suites régularisantes. En effet, on commence par définir

$$\alpha(y) := e^{-1/y}, \ \forall \, y > 0, \quad \alpha(y) := 0, \ \forall \, y \leq 0,$$

et l'on vérifie que $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \alpha \leq 1$. On pose alors $\beta(x) := \alpha(1 - \|x\|^2)$, puis $\rho := C\beta$, avec $C := \left(\int \beta\right)^{-1}$.

Théorème 3.4 (Densité $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C_c(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit (ρ_n) une suite régularisante. Pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, la suite $(f * \rho_n)$ satisfait $f * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f * \rho_n \to f$ uniformément.*

Preuve du Théorème 3.4. D'après le Théorème 1.1 et un argument de récurrence, on a clairement $f * \rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. En reprenant la preuve du Lemme 3.2 et en observant qu'il existe un module de continuité uniforme ω tel que $\forall \, x \in \mathbb{R}^d$, $\omega_x(\delta) \leq \omega(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$ (en d'autres termes f est uniformément continue, ce qui se démontre classiquement par un argument de compacité) on obtient que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$. $\square$

Exemple 4. Il existe des fonctions $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{1}_{[-1,1]} \leq \chi \leq \mathbf{1}_{[-2,2]}$. En effet, il suffit de définir $\chi := \mathbf{1}_{[-3/2,3/2]} * \rho_n$ pour n assez grand de sorte que $\mathrm{supp}\rho_n \subset [-1/2, 1/2]$, où (ρ_n) est un noyau régularisant.

Définition du support d'une fonction mesurable. Soit f une fonction mesurable. On appelle support de f, on note $\mathrm{supp} f$, le plus petit fermé de $\mathbb{R}^d$ tel que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \notin F$. On retrouve ainsi $\mathrm{supp}\, f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) \neq 0\}}$ lorsque f est une fonction continue. On dit qu'une fonction est à support compact si $\mathrm{supp} f \subset B(0, R)$ pour un certain $R > 0$ (donc $\mathrm{supp} f$ est un compact).

Théorème 3.5 (Densité $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$)**.** *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite (f_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \to f$ en norme $\mathcal{L}^1$.*

Preuve du Théorème 3.5.
Preuve 1. On considère (ρ_n) une suite régularisante, (χ_n) une suite de troncatures régulières définie par $\chi_n(x) := \chi(x/n)$ avec $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{1}_{[-1,1]} \leq \chi \leq \mathbf{1}_{[-2,2]}$. On pose alors $f_n := (f * \rho_n)\, \chi_n$. On écrit enfin

$$f_n - f = (f * \rho_n - f)\, \chi_n + f\, (\chi_n - 1),$$

et on observe que les deux termes tendent vers 0 dans $\mathcal{L}^1$ (on notera en particulier que $\chi_n \to 1$ p.p. et $0 \leq \chi_n \leq 1$). $\square$

Preuve 2. On considère (ρ_n) une suite régularisante et on pose $\chi_n := \mathbf{1}_{B(0,n)}$, puis $f_n := (f\, \chi_n) * \rho_n$. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 3.4, on a $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On écrit enfin

$$f_n - f = (f\, (\chi_n - 1)) * \rho_n + (f * \rho_n - f),$$

et on observe que les deux termes tendent vers 0 dans $\mathcal{L}^1$ (en utilisant notamment (2) pour borner le premier terme). Il faut utiliser ici la propriété $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp} g$ vraie pour des fonctions mesurables (et pas seulement pour des fonctions continues comme cela a été démontré dans le Théorème 1.1). $\square$

Théorème 3.6 (Stokes en dimension $d = 1$)**.** *Pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, dx = 0.$$

En particulier, si $u, v \in C^1$ avec (par exemple) $u, u' \in \mathcal{L}^1$ et $v, v' \in \mathcal{L}^\infty$, on en déduit la formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} u\, v'\, dx = -\int_{\mathbb{R}} u'\, v\, dx. \tag{8}$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 3.6 de Stokes à $f = uv$.

Preuve du Théorème 3.6. On fixe $\chi \in C^1_c(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{1}_{[-1,1]} \le \chi \le \mathbf{1}_{[-2,2]}$ et on note $\chi_R(x) := \chi(x/R)$. Comme $f\chi_R \in C^1_c(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (f\chi_R)' dx = [f\chi_R]_{-2R}^{2R} = 0.$$

En développant, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f'\chi_R dx + \int_{\mathbb{R}} f(\chi_R)' dx = 0.$$

La deuxième intégrale tend vers 0 lorsque $R \to \infty$ puisque $|(\chi_R)'| \le R^{-1}\|\chi'\|_\infty$. On conclut en faisant tendre $R \to \infty$ et en passant à la limite dans la première intégrale grâce au Théorème de convergence dominée (on notera que $\chi_R \to 1$ p.p., $0 \le \chi_R \le 1$). □

Théorème 3.7 (de Weierstrass de densité des polynômes dans $C(K)$)**.** *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, l'ensemble des polynômes est dense dans $C(K)$ au sens de la convergence uniforme, où $C(K)$ désigne l'espace des fonctions continues (bornées) de K dans $\mathbb{R}$.*

Preuve du Théorème 3.7. On ne présente la preuve qu'en dimension $d = 1$ et pour le compact $K = [-1/4, 1/4]$, le cas général s'en déduit assez simplement (la preuve complète est donc laissée en exercice). On définit la suite (η_n) par

$$\eta_n(x) := (1 - x^2)^n \text{ si } x \in [-1, 1], \quad \eta_n(x) := 0 \text{ si } x \notin [-1, 1].$$

On considère alors la suite (ρ_n) définie par

$$\rho_n(x) = a_n^{-1}\eta_n(x), \quad a_n := \int_{\mathbb{R}} \eta_n(x)\, dx.$$

En observant en particulier que $a_n \ge 2/(n+1)$ et donc $\rho_n(x) \le (n+1)(1-\varepsilon^2)^n/2 \to 0$ uniformément sur $B(0, \varepsilon)^c$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on vérifie sans difficulté que (ρ_n) est une approximation de l'identité. A une fonction $g \in C([-1/4, 1/4])$, on associe la fonction $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = g(x), \ \forall\, x \in [-1/4, 1/4], \\ \tilde{g}(x) = 0, \ \forall\, x \notin [-1/2, 1/2]^c, \\ \tilde{g} \text{ affine sur } [-1/2, -1/4] \cup [1/4, 1/2], \end{cases}$$

de sorte que $\tilde{g} \in C_c(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} g \subset [-1/2, 1/2]$. On définit $g_n := \tilde{g} * \rho_n$. La suite (g_n) converge uniformément vers la fonction $\tilde{g}$ d'après le Lemme 3.2 (et l'argument d'uniforme continuité déjà utilisé dans la preuve du Théorème 3.4). On observe enfin

$$\begin{aligned} \tilde{g} * \rho_n(x) &= \frac{1}{a_n}\int_{-1/2}^{1/2} [1 - (x - y)^2]^n \mathbf{1}_{|x-y|\le 1}\, \tilde{g}(y)\, dy \\ &= \frac{1}{a_n}\int_{-1/2}^{1/2} [1 - (x - y)^2]^n \tilde{g}(y)\, dy =: p_n(x), \quad \forall\, x \in [-1/4, 1/4]. \end{aligned}$$

Or p_n est clairement un polynôme, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.8 (Moments)**.** *Soit $f \in L^1([a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$. On a*

$$M_k(f) := \int_{\mathbb{R}} x^k\, f(x)\, dx = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \textit{implique} \quad f = 0.$$

De la même manière, si $\mu,\nu \in M^1_+([a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$, et $M_k(\mu) = M_k(\nu)$ pour tout $k \geq 0$, alors $\mu = \nu$.

Preuve du Corollaire 3.8. On fixe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, de sorte que $\varphi \in C([a,b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après le Théorème 3.7, il existe un polynôme p tel que $\|\varphi - p\|_{L^\infty(a,b)} \leq \varepsilon/(b-a)$. On en déduit

$$\Big| \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx \Big| \leq \varepsilon + \Big| \int_a^b f(x)p(x)\, dx \Big| = \varepsilon.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on en conclut

$$\int_{\mathbb{R}} \bar f(x)\varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_c(\mathbb{R}),$$

où $\bar f \in L^1(\mathbb{R})$ est l'extension de f par 0 en dehors de $[a,b]$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\bar f(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \bar f(x)((\mathrm{sign} \bar f) * \rho_n) = 0,$$

ce qui prouve bien $f = 0$. □

4 Transformation de Fourier dans $M^1_+(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^d)$

Pour f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on définit sa transformée de Fourier

$$\hat f(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

On adopte ici la convention la plus habituelle dans la définition de la transformée de Fourier (ou fonction caractéristique) en théorie des probabilités. Plus généralement, pour μ une mesure positive et bornée sur $\mathbb{R}^d$, on définit sa transformée de Fourier

$$\hat \mu(\xi) = (\mathcal{F} \mu)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mu(dx).$$

Proposition 4.1. *On a $\hat\mu \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $\|\hat\mu\|_\infty \leq \mu(\mathbb{R}^d)$ si $\mu \in M^1_+(\mathbb{R}^d)$. On a également $\hat f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $\|\hat f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.*

On n'a pas nécessairement $\hat\mu \in C_0(\mathbb{R}^d)$ si $\mu \in M^1_+(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, $\mathcal{F}\delta_0 = 1 \notin C_0(\mathbb{R})$.

Preuve de la Proposition 4.1. On définit $e_\xi(x) := e^{ix\,\xi}$. La fonction $e_\xi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $\xi \mapsto e_\xi(x)$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\xi \mapsto (\mathcal{F}\mu)(\xi)$ est continue d'après le Théorème de continuité sous le signe somme. De plus

$$|\hat\mu(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ix\,\xi}| \mu(dx) \leq \mu(\mathbb{R}^d)$$

et de la même manière on trouve

$$\|\hat f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}. \tag{9}$$

En dimension $d=1$, pour $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, on calcule

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\xi}\frac{d}{dx}(e^{ix\xi})\, f(x)\, dx \;=\; \frac{i}{\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, f'(x)\, dx,$$

ce qui implique $|\hat{f}(\xi)| \le |\xi|^{-1}\|f'\|_{L^1} \to 0$ lorsque $|\xi| \to \infty$. Ainsi, pour toute fonction $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Par densité $C_c^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et (9), on obtient $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque. Une alternative plus directe (qui n'utilise pas les résultats démontrés au début de cette section) est de calculer

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\mathbf{1}_{[a,b]})(\xi) \;&=\; \int_a^b e^{ix\xi}\, dx \;=\; \frac{e^{ib\xi}-e^{ia\xi}}{-i\xi} \\ &=\; e^{i\frac{a+b}{2}\xi}\, \frac{e^{i\frac{b-a}{2}\xi}-e^{-i\frac{b-a}{2}\xi}}{i\xi} \;=\; 2\, e^{i\frac{a+b}{2}\xi}\, \frac{\sin(\xi(b-a)/2)}{\xi} \in C_0(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction en escalier f on a également $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Par densité des fonctions en escalier et (9), on obtient $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. $\square$

La transformation de Fourier jouit d'un certain nombre de propriétés simples et remarquables dont nous donnons une liste maintenant.

Propriétés algébriques de la transformation de Fourier :

- **(F1)** $\mathcal{F}$ est linéaire au sense où $\mathcal{F}(f+\lambda g) = \mathcal{F}(f) + \lambda\mathcal{F}(g)$.
- **(F2)** $\mathcal{F}(f')(\xi) = -i\xi\hat{f}(\xi)$ pour $f \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, puisque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\,\xi} f'(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} [\frac{d}{dx} e^{ix\,\xi}] f(x)\, dx = -i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{ix\,\xi} f(x)\, dx,$$

où on a effectué une intégration par parties grâce au Théorème 3.6 (de Stokes).

- **(F3)** $\mathcal{F}(xf)(\xi) = -i(\hat{f}(\xi))'$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tel que $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, puisque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\,\xi} x\, f(x)\, dx = -i\int_{\mathbb{R}} [\frac{d}{d\xi} e^{ix\,\xi}] f(x)\, dx = -i\frac{d}{d\xi}\Big[\int_{\mathbb{R}} e^{ix\,\xi} f(x)\, dx\Big].$$

- **(F4)** $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$ pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, puisque

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy\Big] e^{ix\xi}\, dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, e^{i(x-y+y)\xi}\, dxdy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)g(y)\, e^{iz\xi} e^{iy\xi}\, dzdy.\end{aligned}$$

- **(F5)** Pour $\mathcal{F}(f_\lambda) = \lambda^d(\mathcal{F}f)_{\lambda^{-1}}$, où on définit $g_s(x) := g(x/s)$.
- **(F6)** Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on note $\tau_a f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction translatée définie par $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$. On observe que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$(\mathcal{F}\tau_a f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\,\xi} f(x-a)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i(y+a)\,\xi} f(y)\, dy = e^{ia\xi}\hat{f}(x).$$

- **(F7)** $\mathcal{F}(e_a f) = \tau_a \hat{f}$, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, où ici $e_a(x) := e^{iax}$.
- **(F8)** En notant $\check{g}(x) := g(-x)$, on a $(\check{\mathcal{F}}f)(\xi) := (\mathcal{F}f)(-\xi) = (\mathcal{F}\check{f})(\xi)$. En particulier, si f est une fonction paire alors $\mathcal{F}f$ est également une fonction paire.

Théorème 4.2 (Gaussienne)**.** *Pour G la gaussienne standard, on a*

$$\hat{G}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} = (2\pi)^{d/2} G(\xi).$$

Preuve du Théorème 4.2. On considère seulement le cas $d = 1$. Par définition, on a

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-x^2/2}\, dx = \varphi(\xi) e^{-\xi^2/2},$$

avec

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2} dx.$$

On observe que $\varphi(0) = 1$ ou de manière équivalente

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}. \tag{10}$$

En effet, d'après le Théorème de Fubini-Tonelli et le Théorème de changement de variables en coordonnées radiales, on a

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|z|^2/2}\, dz = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2/2}\, r dr.$$

En effectuant le changement de variables $u = r^2/2$, on a

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx\Big)^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-u}\, du = 2\pi,$$

d'où la conclusion (10). On calcule maintenant

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}\Big[e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\Big]\, dx \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\Big[e^{-\frac{1}{2}(x-i\xi)^2}\Big]\, dx = 0, \end{aligned}$$

grâce au Théorème 3.6 (de Stokes). On en déduit $\varphi(\xi) = 1$, et la conclusion. □

Théorème 4.3 (Inversion)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ avec*

$$\mathcal{F}^{-1}g(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} g(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \check{\mathcal{F}} g(\xi).$$

En d'autres termes, on a $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$, pour toute fonction f "convenable".

Preuve du Théorème 4.3. On définit $G_\lambda(x) := G(x/\lambda)$ et on observe que $\hat{G}_\lambda = (2\pi)^{d/2}\lambda^d G_{\lambda^{-1}}$ d'après la propriété **(F5)** et le Théorème 4.2. En utilisant le Théorème de Fubini (comme dans la formule **(F4)**) et la parité de G_λ, on calcule

$$\begin{aligned} (\hat{G}_\lambda * f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}_\lambda(y-\xi) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} G_\lambda(x) e^{i(y-\xi)\cdot x} f(y)\, dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G_\lambda(x) e^{-i\xi\cdot x} \hat{f}(x) dx, \end{aligned}$$

soit donc

$$(\lambda^d G_{\lambda^{-1}} * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} G(\xi/\lambda) e^{-i\xi\cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

La suite $(\lambda^d G_{\lambda^{-1}})_\lambda$ est une approximation de l'identité et $G_\lambda(x) \nearrow (2\pi)^{-d/2}$ lorsque $\lambda \to \infty$. On obtient l'identité souhaitée en passant à la limite $\lambda \to \infty$ dans cette dernière équation. □

Théorème 4.4 (Unicité)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} = 0$. Alors $f = 0$.*

Preuve du Théorème 4.3. On applique le théorème Théorème 4.3. $\square$

Remarque. On a également $\mu = 0$ si $\mu \in M^1_+(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{\mu} = 0$. Ce résultat sera démontré en TD.

On dit qu'une suite de mesures de probabilités (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ, on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x), \quad \forall\, \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d).$$

On observe en particulier que :
- $\delta_{a_n} \rightharpoonup \delta_a$ faiblement si $a_n \to a$ dans $\mathbb{R}^d$, puisque alors $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ pour tout $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$;
- $f_n \rightharpoonup f$ faiblement si $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$, puisque alors

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi f_n dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi f dx \Big| \le \|f_n - f\|_{L^1} \|\varphi\|_\infty \to 0,$$

pour tout $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$;

Lemme 4.5. *Dans les conditions de la définition précédente, on a $\mu_n \rightharpoonup \mu$ si, et seulement, si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu(x), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{X}, \tag{11}$$

pour $\mathcal{X} := C_b(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{X} := C_c(\mathbb{R}^d)$, ou même $\mathcal{X} := C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$.

Preuve du Lemme 4.5. Il suffit de montrer que si la convergence a lieu pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ alors elle a aussi lieu pour tout pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, puisque les autres implications sont triviales grâce aux inclusions $C^\infty_c(\mathbb{R}^d) \subset C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d)$. On suppose pour commencer la convergence vraie pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Fixons une fonction $\chi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{1}_{B(0,1)} \le \chi \le \mathbf{1}_{B(0,2)}$, et posons $\chi_R(x) := \chi(x/R)$, de sorte que $\chi_R \le 1$ pour tout $R > 0$ et $\chi_R \to 1$ lorsque $R \to \infty$. Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\langle \mu, \chi_R \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R(x) d\mu(x) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc fixer R tel que $\langle \mu, \chi_R \rangle \ge 1 - \varepsilon/2$. Par hypothèse, il existe N tel que pour tout $n \ge N$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_R(x) d\mu_n(x) \ge \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R d\mu(x) - \varepsilon/2 \ge 1 - \varepsilon.$$

En particulier, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 - \chi_R(x)) d\mu(x) \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \chi_R(x)) d\mu_n(x) \le \varepsilon, \ \forall\, n \ge N.$$

On considère maintenant $\varphi \in C_b$, $\|\varphi\|_\infty \le 1$, et on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi (1 - \chi_R) d\mu_n + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \chi_R d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \chi_R d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi (1 - \chi_R) d\mu.$$

Comme $\varphi \chi_R \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on peut fixer $N' \ge N$ de sorte que

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \chi_R d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \chi_R d\mu \Big| \le \varepsilon, \quad \forall\, n \ge N'.$$

On conclut
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu_n-\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu\Big|\leq 3\varepsilon,\quad \forall\, n\geq N',$$
en combinant les différentes informations précédentes. Cela finit la démonstration de (11) pour $\mathcal{X}=C_b(\mathbb{R}^d)$.

On suppose maintenant la convergence vraie pour toute fonction test dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on va démontrer que la convergence est encore vraie pour une fonction test quelconque de $C_c(\mathbb{R}^d)$ en utilisant un argument de densité $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subset C_c(\mathbb{R}^d)$. On fixe $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$, on se donne un noyau régularisant (ρ_m) et on définit $\varphi_m:=\varphi*\rho_m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On écrit
$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu_n-\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu=\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi-\varphi_m)d\mu_n+\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_m d\mu_n-\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_m d\mu+\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi-\varphi_m)d\mu.$$
Le premier terme est petit pour m grand et cela uniformément en n puisque
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi-\varphi_m)d\mu_n\Big|\leq\|\varphi-\varphi_m\|_\infty\to 0,\quad m\to\infty,$$
d'après le Théorème 3.4, et le dernier terme est également petit pour m grand par le même argument. Pour $\varepsilon>0$, on peut donc fixer m de sorte que
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi-\varphi_m)d\mu_n\Big|+\Big|\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi-\varphi_m)d\mu\Big|\leq\varepsilon.$$
On fait tendre $n\to\infty$ en utilisant l'hypothèse de convergence pour la fonction $\varphi_m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Théorème 4.6 (de Lévy - version faible)**.** *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité et μ une mesure de probabilité. On a $\mu_n\rightharpoonup\mu$ faiblement si, et seulement si, $\hat\mu_n$ converge (ponctuellement) vers $\hat\mu$.*

Preuve du Théorème 4.6. Le sens direct est clair puisque $x\mapsto e^{ix\cdot\xi}\in C_b(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$. On suppose inversement que $\hat\mu_n\to\hat\mu$ ponctuellement. Fixons $\varphi\in C_c^{d+1}(\mathbb{R}^d)$ de sorte que $D^{d+1}\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc $(1+|\xi|)^{d+1}\hat\varphi\in C_b$ en utilisant la propriété **(F2)** pour les fonctions φ et $D^{d+1}\varphi$. On en déduit que $\hat\varphi\in L^1$ puisque $(1+|\xi|)^{-d-1}\in L^1$. D'après le Théorème d'inversion de la transformation de Fourier, on a $\mathcal{F}\tilde\varphi=\varphi$, en notant $\tilde\varphi:=\mathcal{F}^{-1}\varphi$. Par Fubini, on en déduit que
$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\mu_n=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}\tilde\varphi(\xi)d\xi d\mu_n(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\hat\mu_n\tilde\varphi\,d\xi.$$
En utilisant le théorème de convergence dominée dans le dernier terme, on obtient
$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\mu_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}^d}\hat\mu\tilde\varphi d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\mu.$$
On conclut en utilisant le Lemme 4.5. $\square$

5 Autres transformations

On rappelle le résultat suivant.

Lemme 5.1. *Soient μ,ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On a $\mu=\nu$ si, et seulement*
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \mu(]-\infty,x])=\nu(]-\infty,x]).$$
Cela permet de motiver la notion de fonction de répartition qui suit.

Définition 5.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de μ, la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

Plus généralement, on peut associer à une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ une fonction de répartition $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad F(x) = \mu(]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d]).$$

De la même manière qu'en dimension $d = 1$, la fonction de répartition F caractérise la mesure μ.

Théorème 5.3 (Admis)**.** *Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ si, et seulement si, F est continue à droite, croissante, $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$. De plus, F est absolument continue, au sens où il existe un module de continuité ω_F tel que pour toute suite $[a_i, b_i]$ d'intervalles d'intérieurs disjoints*

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \quad \textit{implique} \quad \sum_i (F(b_i) - F(a_i)) \leq \omega_F(\delta),$$

si, et seulement si, μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.4. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On appelle transformation de Laplace de μ, la fonction $M : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ définie par*

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad M(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \mu(dx).$$

On appelle domaine de M l'ensemble $\mathrm{dom}(M) := \{s \in \mathbb{R},\, M(s) < \infty\}$.

Lemme 5.5 (Admis)**.** $\mathrm{dom}(M)$ *est un intervalle contenant* 0. *La transformation de Laplace caractérise la mesure de probabilité.*

Définition 5.6. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice la série entière*

$$\forall\, s,\, |s| \leq 1, \quad G(s) := \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mu(\{k\}).$$

Lemme 5.7 (Admis)**.** *La fonction génératrice caractérise la mesure de probabilité.*