Université Paris Dauphine-PSL
L3 Mathématiques Appliquées
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen, 7 Janvier 2022.
Durée : 3h.

> **Tous** *les appareils électroniques et les documents sont interdits.*
> *La rédaction devra être propre et lisible. Il peut être opportun de* **souligner ou encadrer** *les résultats.*
> *Les solutions devront être rédigées de manière claire et rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués,* **ils devront clairement être énoncés.**
> *Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.*
> *Le barême est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation :* **le grappillage sera très peu récompensé**.

Exercice 1. ($\sim$ 3 points).

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone de Beppo-Levi, de Fatou et de convergence dominée.
2) Déterminer la limite des intégrales

$$A_n := \int_0^\infty \frac{\sin(nx^{2n})}{nx^{2n+1/3}}dx, \quad B_n := \int_0^\infty \frac{n\,dy}{1+n(1+y)^3}, \quad C_n := \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\,dz}{1+\sqrt{n}z^n}$$

lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).

Exercice 2. ($\sim$ 2 points). Soient X et Y deux var aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et soient

$$R := \sqrt{X^2+Y^2}, \quad \Theta := \mathrm{Arctan}\frac{Y}{X}.$$

Calculer les lois de R et de Θ.

Exercice 3. ($\sim$ 2 points). On considère $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ muni de la mesure de Lebesgue λ, et $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage $\sharp$.

1) Rappeler la définition de la mesure produit $\lambda\otimes\sharp$.
2) Soit $f : [0,1]\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ mesurable. Que vaut

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{N}} f d(\lambda\otimes\sharp)$$

d'après le théorème de Fubini ?
3) Déduire de la question 2) que

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!\,n}.$$

On rappelle que $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Problème 1. ($\sim$ 11 points). Autour de la transformation de Fourier.

Les deux parties sont largement indépendantes. Les fonctions considérées seront indistinctement à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I. On s'intéresse à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ \text{ sur } \ ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad f(0,x) = f_0(x) \ \text{ sur } \ \mathbb{R}, \tag{1}$$

portant sur une fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f = f(t,x)$.

On fixe $f_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et on se donne une fonction $f \in C([0,+\infty[\times\mathbb{R}) \cap C^2(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ solution de (1) et telle que

$$|f(t,\cdot)|,\ \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\Big|,\ \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)\Big|,\ \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\Big| \leqslant h_T \in L^1(\mathbb{R}),$$

pour tout $0 < t \leqslant T$ et des fonctions h_T (qui dépendent de T). On utilise ici les notations suivantes : pour $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$, on définit la fonction $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(t,x)$, et sa transformation de Fourier (partielle) $\hat{g}(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\xi \mapsto \hat{g}(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}} g(t,x) e^{ix\xi}\, dx,$$

lorsque cette dernière intégrale est bien définie.

1) Expliciter $\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}(t,\cdot)$ en fonction de $\hat{f}(t,\cdot)$. Démontrer que $\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}}(t,\cdot) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\cdot)$.

2) Ecrire l'équation reliant $\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}(t,\cdot)$ et $\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}}(t,\cdot)$. En déduire que

$$\hat{f}(t,\xi) = \hat{f}_0(\xi) e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2 t}, \quad \forall\, t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

3) Déduire de (2) que

$$f(t,x) = (\gamma_t *_x f_0)(x) := \int_{\mathbb{R}} f_0(y)\gamma_t(x-y)\, dy, \quad \forall\, t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

où $\gamma_t(x) := \frac{1}{\sqrt{t}}\gamma\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big)$ et γ désigne la fonction gaussienne standard (centrée et d'intégrale égale à 1).

Partie II. On définit

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}); x^k f^{(\ell)} \in L^\infty(\mathbb{R}),\ \forall\, k,\ell \geqslant 0\}.$$

On souligne que dans cette partie, les fonctions ne dépendent que de la variable $x \in \mathbb{R}$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note encore $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ la transformée de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

et on note $\check{\mathcal{F}}f$ la fonction définie par $\check{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$.

4) Montrer que $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^\infty$, et que $f \in \mathcal{S}$ implique $xf \in \mathcal{S}$, $f' \in \mathcal{S}$ et $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

5) Montrer que pour $f, g \in \mathcal{S}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}f}\, g\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}\, \check{\mathcal{F}}g\, dx.$$

6) En déduire que pour $f \in \mathcal{S}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx.$$

7) Montrer que $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pourra

   a) commencer par définir la suite (f_n) par $f_n := T_n(f)\mathbf{1}_{|x|\leqslant n}$, où $T_n(s) = -n$ si $s \leqslant -n$, $T_n(s) = s$ si $-n \leqslant s \leqslant n$ et $T_n(s) = n$ si $s \geqslant n$, et montrer que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $n \to \infty$;

   b) puis montrer que pout tout $n \geqslant 1$, il existe une suite $(g_{n,m})$ de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g_{n,m} \to f_n$ dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque $m \to \infty$ et $\|g_{n,m}\|_{L^\infty} \leqslant n$ pour tout $m \geqslant 1$;

   c) et enfin conclure.

Désormais, on suppose seulement $f \in L^2(\mathbb{R})$.

8) A l'aide des questions 6) et 7), montrer qu'il existe une suite (f_n) de $\mathcal{S}$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $(\hat{f}_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$.

9) En déduire qu'il existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{F} \, g \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{f} \, \check{\mathcal{F}} g \, dx, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{4}$$

   Montrer que F satisfait

$$\int_{\mathbb{R}} |F|^2 \, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx$$

   et que F est l'unique fonction de $L^2(\mathbb{R})$ qui satisfait (4). On dit que F est la transformée de Fourier de f et on note encore $F = \hat{f}$.

10) Donner un exemple de fonction f telle que $\hat{f}$ ne peut être définie à l'aide de (3), mais peut être définie à l'aide du résultat de la question 9).

Problème 2. ($\sim$ 12 points). Tribu asymptotique et marche aléatoire.

Dans tout ce problème on fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Les parties I et II ne sont pas indépendantes. On pourra accepter le résultat de la question (5) pour traiter la partie II.

Partie I. Tout ou rien. On rappelle :

- qu'un ensemble de parties $\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ est un π-système s'il est stable par intersection : $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$;

- qu'un ensemble de parties $\mathcal{L} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ est un λ-système si

  (i) $\Omega \in \mathcal{L}$;

  (ii) $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire : $L^c \in \mathcal{L}$ si $L \in \mathcal{L}$;

  (iii) $\mathcal{L}$ est stable par limite croissante : $\bigcup L_n \in \mathcal{L}$ si $L_n \in \mathcal{L}$ et $L_n \subset L_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

- la variante du lemme des classes monotones qui affirme que si $\mathcal{D}$ est un π-système alors $\sigma(\mathcal{D})$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{D}$.

(1) Soient $\mathcal{D}$ un π-système et $\mathcal{L}$ un λ-système tels que $\mathcal{D} \subset \mathcal{L} \subset \sigma(\mathcal{D})$. Montrer que $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{D})$.

(2) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux π-systèmes indépendants et inclus dans $\mathscr{A}$.
Pour $D_2 \in \mathcal{D}_2$ fixé, on définit

$$\mathcal{L}_1 := \{B_1 \in \sigma(\mathcal{D}_1), \, \mathbf{P}(B_1 \cap D_2) = \mathbf{P}(B_1) \, \mathbf{P}(D_2)\}.$$

Montrer que $\mathcal{L}_1$ est un λ-système. En déduire que $\mathcal{L}_1 = \sigma(\mathcal{D}_1)$.

Pour $B_1 \in \sigma(\mathcal{D}_1)$ fixé, on définit

$$\mathcal{L}_2 := \{B_2 \in \sigma(\mathcal{D}_2),\ \mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}(B_2)\}.$$

Montrer succinctement que $\mathcal{L}_2$ est un λ-système. En déduire que $\sigma(\mathcal{D}_1)$ et $\sigma(\mathcal{D}_2)$ sont indépendants.

Dans la suite de cette partie, on se donne une suite $(\mathcal{A}_k)_{k\geqslant 1}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$ qui sont mutuellement indépendantes. Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on définit les ensembles de parties

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_m &:= \{A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_M},\ M \geqslant 1,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, M\},\ k_i \geqslant m,\ A_{k_i} \in \mathcal{A}_{k_i}\}\\ \mathcal{C}_n &:= \{A_{\ell_1} \cap \cdots \cap A_{\ell_N},\ N \geqslant 1,\ \forall\, j \in \{1, \ldots, N\},\ \ell_j \leqslant n,\ A_{\ell_j} \in \mathcal{A}_{\ell_j}\}\end{aligned}$$

et les tribus

$$\mathcal{F}_m := \sigma(\mathcal{A}_k,\ k \geqslant m), \quad \mathcal{G}_n := \sigma(\mathcal{A}_\ell,\ \ell \leqslant n).$$

(3) Rappeler ce que signifie que la suite $(\mathcal{A}_k)_{k\geqslant 1}$ est mutuellement indépendante. Montrer que pour tout $n < m$, $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{C}_n$ sont des π-systèmes indépendants, que $\sigma(\mathcal{B}_m) = \mathcal{F}_m$ et $\sigma(\mathcal{C}_n) = \mathcal{G}_n$. A l'aide de la question (2), en déduire que les tribus $\mathcal{F}_m$ et $\mathcal{G}_n$ sont indépendantes.

On définit la tribu asymptotique

$$\mathcal{F}_\infty = \lim \mathcal{F}_m := \bigcap_{m\geqslant 1} \mathcal{F}_m.$$

4) Montrer que que $\mathcal{F}_\infty$ est indépendante de $\mathcal{G}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ est un π-système, puis que $\mathcal{F}_\infty$ et $\sigma(\mathcal{G}_n,\ n \geqslant 1)$ sont indépendantes et que $\sigma(\mathcal{G}_n,\ n \geqslant 1) \supset \mathcal{F}_\infty$.

(5) Déduire de ce qui précède la loi du tout ou rien (ou 0-1 de Kolmogorov) : pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, on a $\mathbf{P}(B) = 0$ ou $\mathbf{P}(B) = 1$.

Partie II. Dans cette partie, on se donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles $\mathcal{L}^2$ centrées indépendantes et de même loi, de sorte que $\mathbf{E}(X_n) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n.$$

(6) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in (0, 1)$, on définit la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ par

$$\varphi(x) := 0 \text{ si } x \leqslant p, \quad \varphi(x) := \varepsilon^{-1}(x - p) \text{ si } x \in [p, p + \varepsilon], \quad \varphi(x) := 1 \text{ si } x \geqslant p + \varepsilon.$$

Calculer $\lim \mathbf{E}(\varphi(S_n/\sqrt{n}))$. En déduire que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant p\Big) \geqslant \int_{p/\sigma}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} =: \theta(p) > 0.$$

(7) Pour (a_n) une suite de réels et (A_n) une suite d'événements, on rappelle que

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

Démontrer que

$$\limsup \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(\limsup A_n).$$

En déduire que

$$\mathbf{P}\big(\limsup\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant p\}\big) \geqslant \theta(p).$$

(8) Etant donnée une suite $Y_\ell : \Omega \to \mathbb{R}$ de variables aléatoires et $r \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\{\sup_\ell Y_\ell > r\} = \bigcup_\ell \{Y_\ell > r\}, \quad \bigcup_\ell \{Y_\ell \geqslant r\} \subset \{\sup_\ell Y_\ell \geqslant r\},$$
$$\{\inf_\ell Y_\ell \geqslant r\} = \bigcap_\ell \{Y_\ell \geqslant r\}, \quad \{\inf_\ell Y_\ell > r\} \subset \bigcap_\ell \{Y_\ell > r\}.$$

En déduire

$$\{\limsup Y_\ell > r\} \subset \limsup\{Y_\ell > r\} \quad \text{et} \quad \limsup\{Y_\ell \geqslant r\} \subset \{\limsup Y_\ell \geqslant r\}.$$

On définit $\mathcal{F}_m := \sigma(X_\ell,\, \ell \geqslant m\}$, puis la tribu asymptotique $\mathcal{F}_\infty := \lim \mathcal{F}_m$. Montrer à l'aide de ce qui précède que pour $m, q, q', q'' \in \mathbb{N}^*$, $q > q' > q''$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > q\big\} \subset \limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n - S_m}{\sqrt{n}} > q'\big\} \subset \limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > q''\big\}.$$

Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n - S_m}{\sqrt{n}} > q\big\} \in \mathcal{F}_{m+1}.$$

Montrer que si (B_m) est une suite telle que $B_m \in \mathcal{F}_m$ pour tout $m \geqslant 1$, alors $\limsup B_m \in \mathcal{F}_\infty$. En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{F}_\infty$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > q\big\} \subset B \subset \limsup_{n\to\infty} \big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > q''\big\}.$$

(9) En utilisant le résultat de la première partie et des deux questions précédentes, montrer que

$$\mathbf{P}\big(\limsup\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant p\}\big) = 1.$$

(10) Montrer que

$$\mathbf{P}\big(\{\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant p\}\big) \geqslant \mathbf{P}\big(\limsup\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant p\}\big).$$

Conclure que la marche aléatoire (S_n) satisfait

$$\text{p.s.} \qquad \limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$