

Examen, 19 Février 2022.

Durée : 3h.

Tous les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices. Le barème est donné à titre **indicatif** et prendra en compte cette dernière recommandation.

Exercice 1. (~ 5 points). (1) En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$X_n := \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{(nx+1)(1+x^2)} dx, \quad Y_n := \int_0^\infty \frac{dy}{y^n + e^y}, \quad Z_n := \int_0^\infty \frac{n \ln(1+z/n)}{(1+z^2)^2}.$$

(2) Sans utiliser le théorème de convergence dominée, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$S_n := \int_0^\infty \left(1 + \frac{\sin(ns)}{n^2}\right)^n \frac{ds}{1+s^{1+1/n}} \quad T_n := \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{\sqrt{1-t}} dt.$$

(3) En le justifiant proprement, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k^3}.$$

(Ind. On pourra introduire la suite de fonctions $f_k(x) := e^{-kx}$).

Exercice 2. (~ 3 points). Pour $n \geq 1$ entier et $a > 0$ réel, on définit le simplexe $\Sigma_n(a)$ et son volume $V_n(a)$ par

$$\Sigma_n(a) := \{x \in \mathbb{R}_+^n; x_1 + \dots + x_n \leq a\}, \quad V_n(a) := \lambda_n(\Sigma_n(a)),$$

où λ_n désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . On note simplement $\Sigma_n := \Sigma_n(1)$, $V_n := V_n(1)$.

(a) Montrer que $V_n(a) = a^n V_n$ pour tout $n \geq 1$ et $a > 0$.

(b) Calculer directement V_1 . Pour $n \geq 2$, établir l'équation

$$V_n = \int_0^1 V_{n-1}(1-x) dx.$$

En déduire une relation de récurrence entre V_n et V_{n-1} , puis la valeur de V_n en fonction de n .

Exercice 3. (~ 8 points). Dans cet exercice, on considère l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et de la mesure de Lebesgue $dx = d\lambda$. On note $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}, dx)$ l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables de carré intégrable. On note $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ l'espace des

fonctions continues à support compact, c'est-à-dire, $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*)$ si $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et il existe $a, b \in]0, \infty[$, $a < b$, tels que $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$.

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2$, alors la fonction $u \mapsto f(u)/u$ est intégrable sur $[a, \infty[$, pour tout réel $a > 0$, en particulier, on peut définir

$$\forall x > 0, \quad F(x) := \int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du. \quad (1)$$

Montrer que la fonction F est continue sur $]0, \infty[$.

(2) On commence par supposer que f appartient à $C_c(\mathbb{R}_+^*)$.

(a) Montrer que F est continument dérivable, nulle au voisinage de ∞ , constante au voisinage de 0, donc en particulier $F \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

(b) En observant que $x F' = -f$ et en utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^\infty (F(x))^2 dx = 2 \int_0^\infty F(x) f(x) dx.$$

(c) En déduire que

$$\|F\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2\|f\|_{\mathcal{L}^2}.$$

(3) Cette question est plus difficile et elle sera notée hors barème. On y montre deux résultats « de densité » (3b) et (3c) utiles dans la question (4).

(a) Soit (ρ_n) une suite régularisante qui est définie par $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ pour une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}\rho \subset [-1, 1]$, $\rho \geq 0$, $\int \rho dx = 1$. Pour $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$, on pose $g_n := (g \mathbf{1}_{[2/n, n]}) * \rho_n$. Montrer que (g_n) est une suite de $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $g_n \rightarrow g$ en norme \mathcal{L}^1 lorsque $n \rightarrow \infty$ et telle que la suite $(\|g_n\|_{\mathcal{L}^\infty})$ est uniformément bornée dans \mathbb{R} . En déduire que $g_n \rightarrow g$ en norme \mathcal{L}^2 lorsque $n \rightarrow \infty$.

(b) Pour $f \in \mathcal{L}^2$, déduire de la question (a) qu'il existe une suite (f_k) de $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $f_k \rightarrow f$ en norme \mathcal{L}^2 lorsque $k \rightarrow \infty$.

(c) Soit $G \in \mathcal{L}^2$. Déduire de la question (b) que $G = 0$ p.p. si

$$\int_0^\infty G \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*).$$

(4) On revient au cas général $f \in \mathcal{L}^2$, et on note (f_k) la suite construite à la question (3b).

(a) On note F_k la fonction associée à f_k par la relation (1). A l'aide de la question (2), montrer que (F_k) est une suite de Cauchy puis qu'il existe $\tilde{F} \in \mathcal{L}^2$ tel que $F_k \rightarrow \tilde{F}$ en norme \mathcal{L}^2 lorsque $k \rightarrow \infty$.

(b) Pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*)$, on définit

$$\forall u > 0, \quad \Phi(u) := \frac{1}{u} \int_0^u \varphi(x) dx.$$

Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}^2$, puis que

$$\int_0^\infty F \varphi dx = \int_0^\infty f \Phi du \quad \text{et} \quad \int_0^\infty F_k \varphi dx = \int_0^\infty f_k \Phi du.$$

En déduire que

$$\int_0^\infty \tilde{F} \varphi dx = \int_0^\infty f \Phi du,$$

puis que $F \in \mathcal{L}^2$.

Exercice 4. (~ 5 point). Soit (X_n) une suite de var indépendantes \mathcal{L}^2 de même loi centrée, soit donc $\mathbf{E}(X_n) = 0$ et on note $\sigma^2 := \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. On définit

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n), \quad n \geq 1,$$

et le but de cet exercice est de montrer que $Y_n \rightarrow 0$ p.s.

- 1) Expliquer sous quelles hypothèses on peut affirmer que $Y_n \rightarrow 0$ en loi (on donnera un énoncé précis et le nom de ce résultat).
- 2) Montrer que

$$\mathbf{E}(Y_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

puis que

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y_{k^2}^2\right) < \infty.$$

- 3) En déduire que $Y_{k^2} \rightarrow 0$ p.s.

On définit

$$q(n) := \max\{k^2; k \in \mathbb{N}, k^2 \leq n\} \quad \text{et} \quad \Delta_n := Y_n - \frac{q(n)}{n} Y_{q(n)}.$$

- 4) Montrer que $q(n) \leq n \leq q(n) + 2\sqrt{q(n)} + 1$ et que

$$\Delta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=q(n)+1}^n X_j.$$

- 5) En déduire que

$$\mathbf{E}(\Delta_n^2) \leq \frac{3\sigma^2}{n^{3/2}},$$

puis que $\Delta_n \rightarrow 0$ p.s.

- 6) Conclure que $Y_n \rightarrow 0$ p.s.