Université Paris Dauphine-PSL
L3 Mathématiques Appliquées
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen, Jeudi 23 Juin 2022.
Durée : 3h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.** *Le barème est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation.*

Exercice 1. ($\sim$ 5 points). Dans cet exercice, lorsque que le calcul d'une limite est demandé, on en donnera sa valeur explicite comme élément de $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$.

(1) Enoncer le théorème de convergence dominée. En utilisant ce théorème, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$X_n := \int_0^\infty \frac{x - x^2}{nx^2 + 1} e^{-x}\, dx, \quad Y_n := \int_0^\infty \frac{dy}{y^n + \sqrt{y}}, \quad Z_n := \int_0^\infty \frac{n \sin(z/n)}{(1+z^2)^2}\, dz.$$

(2) Sans utiliser le théorème de convergence dominée, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$S_n := \int_0^\infty \frac{1 + \sin^2(ns)}{s^n + s^{1-1/n}} ds, \quad T_n := \int_0^\infty \min(\sqrt{t}, n) e^{-t} dt,$$

à l'aide d'un résultat du cours que l'on énoncera proprement.

(3) En le justifiant proprement, montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Exercice 2. ($\sim$ 2 points) a) Pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$ et tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on définit

$$I_\lambda(p,q) := \int_0^\lambda t^p (\lambda - t)^q dt.$$

Monrer que

$$I_\lambda(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \lambda^{p+q+1}.$$

b) En déduire la valeur (sous la forme d'un rationnel explicite) de l'intégrale

$$J := \iint_D x^5 y^7 (1-x-y)^9 \, dxdy,$$

où $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2;\, x + y \leq 1\}$.

Exercice 3. ($\sim$ 2 points) Calculer l'intégrale

$$\iint_{\Delta} (x^2 + y^2 - 2xy)\, dxdy,$$

où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. (Indication : on pourra faire un dessin et penser à passer en coordonnées polaires).

Exercice 4. ($\sim$ 4 points) On fixe un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$.

(1) Soient (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$, $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $C \in \mathbb{R}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ p.p. dans E et $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1} \to \|f\|_{\mathcal{L}^1}$ lorsque $n \to \infty$.

a) Montrer que $0 \leq |f_n - f| - |f_n| + |f| \leq 2|f|$.

b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

(2) On fixe maintenant $1 < p < \infty$. Soient (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $C \in \mathbb{R}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ p.p. dans E et $\|f_n\|_{\mathcal{L}^p} \to \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ lorsque $n \to \infty$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R}, \quad ||s + t|^p - |s|^p| \leq \varepsilon |s|^p + C_\varepsilon |t|^p.$$

En déduire que

$$W_n := ||f_n|^p - |f - f_n|^p - |f|^p| \leq \varepsilon |f_n - f|^p + (C_\varepsilon + 1)|f|^p.$$

b) En adaptant la preuve de la question (1), montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \max(W_n - \varepsilon |f_n - f|^p, 0)\, d\mu = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p\, d\mu = 0.$$

$\big($Ind. On pourra penser à écrire $W_n \leq \max(W_n - \varepsilon |f_n - f|^p, 0) + \varepsilon |f_n - f|^p\big)$.

Exercice 5 - mesures étrangères. ($\sim$ 2 points) Pour deux mesures λ, σ définies sur un même espace mesurable $(E, \mathscr{A})$, on dit que

- σ est absolument continue par rapport à λ si ($A \in \mathscr{A}$ et $\lambda(A) = 0$) implique $\sigma(A) = 0$;
- λ et σ sont étrangères s'il existe $S \in \mathscr{A}$ tel que $\lambda(S) = 0$ et $\sigma(S^c) = 0$.

Soient μ et ν deux mesures sur un même espace mesurable $(E, \mathscr{A})$ avec $\mu(E)$ fini. On pose

$$m := \sup\{\mu(A);\ A \in \mathscr{A},\ \nu(A) = 0\}.$$

1) Montrer qu'il existe une suite (A_n) de $\mathscr{A}$ telle que $\nu(A_n) = 0$ et $\mu(A_n) \to m$ lorsque $n \to \infty$.
2) On note $S := \bigcup A_n$. Montrer que $S \in \mathscr{A}$, $\nu(S) = 0$ et $\mu(S) = m$.
3) Pour $A \in \mathscr{A}$, on note $\mu_e(A) := \mu(A \cap S)$ et $\mu_a(A) := \mu(A \cap S^c)$. Montrer que μ_e et μ_a sont des mesures sur $(E, \mathscr{A})$ qui sont étrangères et telles que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Montrer enfin que μ_e et ν sont étrangères.

4) Montrer que μ_a est absolument continue par rapport à la mesure ν.
(Ind. Pour $A \in \mathscr{A}$ tel que $\nu(A) = 0$, on introduira l'ensemble $B := S \cup (A \cap S^c)$ et on calculera $\nu(B)$ et $\mu(B)$).

Exercice 6. ($\sim$ 6 points) On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
(1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées $\mathcal{L}^2$. On définit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, montrer que

$$\mathbf{P}\big(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k),$$

où

$$A_1 := \{|S_1| \geq \varepsilon\}, \quad A_k := \{\max_{1 \leq i \leq k} |S_i| \geq \varepsilon > \max_{1 \leq i \leq k-1} |S_i|\} \text{ si } k \geq 2.$$

Pour $n \geq k \geq 1$, montrer également que

$$\mathbf{E}(S_n^2 \, \mathbf{1}_{A_k}) = \mathbf{E}(S_k^2 \, \mathbf{1}_{A_k}) + \mathbf{E}((S_n - S_k)^2 \, \mathbf{1}_{A_k}) \geq \varepsilon^2 \mathbf{P}(A_k).$$

En deduire que

$$\mathbf{P}\big(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k^2).$$

(2) Soit (Y_n) une suite de va réelles iid centrées $\mathcal{L}^2$ et soit $\alpha > 1/2$.

a) On note $X_n := Y_n / n^\alpha$ et $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. A l'aide de la question (1), montrer que pour tout $M \geq N$, on a

$$\mathbf{P}\big(\max_{N \leq p \leq M} |S_p - S_N| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \frac{1}{N^{2\alpha - 1}} =: \eta_\varepsilon(N),$$

pour une constante numérique $C > 0$ (que l'on n'essaiera pas de calculer).

b) On définit

$$w_N := \max_{p,q \geq N} |S_p - S_q|.$$

Montrer que (w_N) est une suite décroissante de va positives et que

$$\mathbf{P}\big(w_N \geq 2\varepsilon\big) \leq 2\eta_\varepsilon(N).$$

c) Montrer que $\lim w_N$ est une va positive, puis que

$$\mathbf{P}(\lim w_N = 0) = 1 - \lim_{k \to \infty} \mathbf{P}(\lim w_N \geq 1/k),$$

et enfin que

$$\mathbf{P}(\lim w_N \geq 1/k) = 0, \quad \forall\, k \geq 1.$$

En déduire que $w_N \to 0$ presque sûrement.

d) Etablir finalement que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{n^\alpha}$$

est presque sûrement convergente.