Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Partiel, Jeudi 28 Octobre 2021.
Durée : 2h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.** *Le barème est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation. Afin de tenir compte de la longueur de l'énoncé, les questions notées d'une $*$ seront comptées hors barème (en bonus).*

Exercice 1 - Résultats de convergence ($\sim$ 6 points).

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone de Beppo-Levi, de Fatou et de convergence dominée.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \leq f_n \leq 1, \quad \|f_n\|_1 = 1, \quad f_n \to f \text{ ponctuellement.}$$

   - Que peut-on dire de f et de la valeur de $\|f\|_1$?
   - Donner un exemple de suite (f_n) et de limite f telle que $\|f\|_1 \neq 1$.
3) Déterminer la limite des intégrales

$$X_n := \int_0^\infty \frac{n\,dx}{1+n+nx^2}, \quad Y_n := \int_0^{+\infty} \frac{n\,dy}{1+ny^n}, \quad Z_n := \int_0^\infty \frac{\sin(z^n)}{z^n}\frac{dz}{1+z^2}$$

   lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!\,.$$

   En utilisant le développement en série entière de cos, en déduire que

$$\int_0^\infty \cos(\sqrt{t})e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}\,.$$

Exercice 2 - Intégrales dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ ($\sim$ 4 points).

1) On note λ_2 la mesure de Lesbesgue de $\mathbb{R}^2$. A l'aide d'un théorème du cours (dont on donnera un énoncé précis), calculer de deux manières différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} ye^{-y^2(1+x^2)} d\lambda_2(x,y),$$

et en déduire l'identité

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) En effectuant notamment le changement de variables $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, calculer l'intégrale

$$\int_D f(x,y,z) dxdydz$$

avec $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 2z,\ 0 \leq z \leq 1\}$, $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$.

Exercice 3 ($\sim$ 5 points). On note C_b^1 l'espace des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que g, g' sont bornées. On définit de manière sembable l'espace C_b^2. Pour $g \in C_b^2$, on note

$$Lg(x) := g''(x) - xg'(x).$$

Pour $f_0 \in C_b^2$ et $t \geq 0$, on pose

$$f(t,x) := \int_{\mathbb{R}} f_0(xe^{-t} + y\sqrt{1-e^{-2t}}\,)\,\gamma(y)\,dy, \tag{1}$$

où $\gamma(x) := (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$.

1) Montrer que si $g \in C_b^1$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} (g\gamma)'(x)\,dx = 0.$$

2) Montrer que pour $g_1, g_2 \in C_b^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(Lg_2)\gamma\,dx = -\int_{\mathbb{R}} g_1'g_2'\gamma\,dx = \int_{\mathbb{R}} (Lg_1)g_2\gamma\,dx.$$

(Ind. On pourra penser à introduire la fonction $(g_1g_2'\gamma)'$).

3) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par (1) est de classe C^2 et qu'elle vérifie l'équation

$$\partial_t f(t,x) - Lf(t,x) = 0, \quad \forall\, t > 0, x \in \mathbb{R},$$

où ici $Lf(t,x) := \partial^2_{xx}f(t,x) - x\partial_x f(t,x)$. (Ind. On pourra penser à utiliser la question 1) afin de justifier certaines « intégrations par parties »).

4*) On définit

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\gamma(x)\,dx, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Montrer que M est de classe C^1 et que

$$M'(t) = \int_{\mathbb{R}} Lf(t,x)\gamma(x)\,dx, \quad \forall\, t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\gamma(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x)\gamma(x)\,dx, \quad \forall\, t \geq 0.$$

(Ind. On pourra penser à utiliser la question 2)).

Exercice 4 - Mesure produit ($\sim$ 5 points) L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat énoncé en cours, mais non démontré, de l'existence et unicité d'une mesure produit dans le cadre de mesures σ-finies (mais pas finies).

On considère donc ici deux espaces mesurés $(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $(F, \mathscr{B}, \nu)$ et on suppose que μ et ν sont σ-finies, mais pas finies. On rappelle que cela signifie qu'il existe (E_n) une suite croissante de $\mathscr{A}$ telle que $E = \lim E_n$, $\mu(E_n) < \infty$, et qu'il existe (F_n) une suite croissante de $\mathscr{B}$ telle que $F = \lim F_n$, $\nu(F_n) < \infty$. On pourra utiliser librement les résultats démontrés en cours, mais évidemment pas le résultat d'existence et unicité d'une mesure produit dans le cadre de mesures σ-finies.

1) Donner un exemple d'espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$ telle que μ est σ-finie mais $\mu(E) = +\infty$.
2) On pose $\mathscr{A}_n := \{A \cap E_n,\ A \in \mathscr{A}\}$ et $\mu_n(A) := \mu(A)$ si $A \in \mathscr{A}_n$. Montrer que $\mathscr{A}_n$ est une tribu sur E_n. Comment appelle-t-on cette tribu ? Montrer que $(E_n, \mathscr{A}_n, \mu_n)$ est un espace mesuré. On définit de manière semblable (et donc sans preuve) l'espace mesuré $(F_n, \mathscr{B}_n, \nu_n)$ avec $\mathscr{B}_n := \{B \cap F_n,\ B \in \mathscr{B}\}$ et $\mu_n(B) := \mu(B)$ si $B \in \mathscr{B}_n$.
3) Pourquoi la mesure produit $\lambda_n := \mu_n \otimes \nu_n$ est-elle bien définie sur l'espace mesurable produit $(E_n \times F_n, \mathscr{A}_n \otimes \mathscr{B}_n)$? Donner un énoncé précis (existence, unicité, caractérisation) du résultat à invoquer.
4) On rappelle le lemme des classes monotones : si $\mathscr{C}$ est une algèbre de parties, alors la tribu et la classe monotone engendrées par $\mathscr{C}$ sont égales, soit donc $\sigma(\mathscr{C}) = \mathcal{M}(\mathscr{C})$.

   - En déduire que si $\mathscr{C}$ est une algèbre de parties et si $\mathscr{M}$ est une classe monotone telles que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M} \subset \sigma(\mathscr{C})$, alors $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C})$.

   - Pour $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, on définit $C_n := C \cap (E_n \times F_n)$. Démontrer que $C_n \in \mathscr{A}_n \otimes \mathscr{B}_n$ puis que $\lambda_{n+1}(C_{n+1}) \geq \lambda_n(C_n)$.
5) On définit enfin

$$\lambda : \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \to [0, \infty], \quad C \mapsto \lambda(C) := \lim_{n\to\infty} \lambda_n(C_n).$$

   Montrer que λ est bien définie comme mesure sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.
6) Démontrer que λ est l'unique mesure produit $\mu \otimes \nu$.

7*) Démontrer que

$$\lambda(C) = \int_F \mu(C^y)\, \nu(dy),$$

où on rappelle que $C^y := \{x \in E;\ (x, y) \in C\}$ désigne la section d'ordonnée $y \in F$.