Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Partiel, Lundi 31 Octobre 2022.
Durée : 2h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.** *Le barème est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation. Afin de tenir compte de la longueur de l'énoncé, certaines questions du problème seront comptées hors barème (en bonus).*

Exercice 1 - Résultats de convergence ($\sim$ 6 points). Dans cet exercice, lorsque le calcul d'une limite est demandé, on en donnera **sa valeur explicite** comme élément de $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$.

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone de Beppo-Levi, de Fatou et de convergence dominée.
2) Donner un exemple de suite de fonctions mesurables (f_n) sur $\mathbb{R}$ telles que $f_n \geq 0$, $\sup f_n \to 0$ et $\|f_n\|_{\mathcal{L}^1} = 1$.
3) Déterminer la limite des intégrales

$$X_n := \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{(x\sqrt{n}+1)^2} dx, \quad Y_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2}}{2\cos(\frac{y}{n}) - 1} \mathbf{1}_{\{3|\cos(\frac{y}{n})| \geq 2\}}\, dy, \quad Z_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|z|/n}}{1+z^2} dz$$

lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).

4) Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2+1}.$$

Exercice 2 ($\sim$ 4 points). On note $B(0,R)$ le disque de rayon R de $\mathbb{R}^2$ et λ_3 la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$.

1) Pour $a, R \geq 0$, calculer

$$\int_{B(0,R)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} dxdy.$$

2) On définit

$$\mathcal{C} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}.$$

Faire un dessin, puis calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\lambda_3(x,y,z).$$

Problème - Mesure atomique et mesure diffuse ($\sim$ 10 points).

On désigne par $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1) On dit qu'un ensemble $A \in \mathscr{A}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \in \mathscr{A}$ tel que $B \subset A$, on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$.

a) Donner un exemple de mesure possédant des atomes.

b) Montrer que la mesure de Lebesgue n'a pas d'atome. [Indication. On pourra raisonner par l'absurde, montrer par un argument de dichotomie que s'il existe un atome $A \subset [0,1]$ alors il existe $x \in A$ tel que $\lambda(\{x\}) = \lambda(A)$, puis traiter le cas d'un atome quelconque].

2) On dit que μ est purement atomique s'il existe une collection $\mathcal{C}$ d'atomes de μ telle que

$$\mu(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(A \cap C), \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{A}.$$

Montrer que si E est dénombrable et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(E)$ alors la mesure μ est nécessairement purement atomique.

3) On dit que μ est diffuse si elle n'a pas d'atome. On considère dans toute la question 3) une **mesure diffuse** μ telle que $\mu(E) = 1$ et on souhaite établir que l'image de $\mathscr{A}$ par μ est $[0,1]$.

Dans les quatre premières questions, on fixe $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) > 0$, on définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_A &:= \{C \in \mathscr{A},\ C \subset A,\ \tfrac{1}{3}\mu(A) \le \mu(C) \le \tfrac{2}{3}\mu(A)\}, \\
\mathscr{C}_A &:= \{C \in \mathscr{A},\ C \subset A,\ 0 < \mu(C) < \tfrac{1}{3}\mu(A)\}, \\
\kappa_A &:= \sup\{\mu\big(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} C_j\big);\ \mathcal{J} \text{ au plus dénombrable, } C_j \in \mathscr{C}_A, \forall\, j \in \mathcal{J}\},
\end{aligned}$$

et notre objectif est de démontrer que $\mathscr{B}_A \neq \emptyset$.

a) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{A}$ tel que $C \subset A$ et $0 < \mu(C) < \mu(A)$. En déduire que $\mathscr{B}_A \neq \emptyset$ ou $\mathscr{C}_A \neq \emptyset$. Désormais, on suppose $\mathscr{C}_A \neq \emptyset$. Montrer que $\kappa_A = \mu(B) \in]0,1]$ avec

$$B := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i, \quad \mathcal{I} \text{ au plus dénombrable,} \quad B_i \in \mathscr{C}_A,\ \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

On rappelle qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

b) Montrer que $\mathscr{B}_A \neq \emptyset$ si $\frac{1}{3}\mu(A) \le \kappa_A \le \frac{2}{3}\mu(A)$.

c) Montrer que $\mathscr{B}_A \neq \emptyset$ si $\kappa_A > \frac{2}{3}\mu(A)$. [Indication. On pourra montrer qu'il existe $B' \subset B$ tel que $B' \in \mathscr{B}_A$].

d) Montrer que si $\kappa_A < \frac{1}{3}\mu(A)$ alors il existe $C, D \in \mathscr{A}$ tels que

$$A = B \cup C \cup D, \quad B,\ C,\ D \text{ disjoints,} \quad \mu(C) > 0, \quad \mu(D) > 0.$$

En déduire encore une fois que $\mathscr{B}_A \neq \emptyset$ et conclure.

e) Montrer que pour tout $n \ge 0$, il existe une partition de E par une famille finie $(B_{n,k})_{1 \le k \le 2^n}$ d'ensembles mesurables tels que $B_{n,k} = B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}$ et $(1/3)^n \le \mu(B_{n,k}) \le (2/3)^n$ pour tout $1 \le k \le 2^n$. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$, il existe une suite croissante (B_n) de $\mathscr{A}$ et une suite décroissante (A_n) de $\mathscr{A}$ telles que

$$B_n \subset A_n, \quad \mu(B_n) \le x < \mu(A_n) \le \mu(B_n) + (2/3)^n.$$

Conclure.

4) On montre ici qu'une mesure quelconque μ se décompose en $\mu = \nu + \rho$ avec ν purement atomique et ρ diffuse.

a) Si A et B sont deux atomes de μ, montrer que l'on a l'alternative suivante :
- $\mu(A \cap B) = \mu(A) = \mu(B)$, on notera $A \equiv B$;
- ou $\mu(A \cap B) = 0$.

b) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une collection d'atomes tels que $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ si $i \neq j$ et pour tout atome A il existe $i \in I$ tel que $A \equiv C_i$. (On ne cherchera pas à démontrer l'existence d'une telle collection. Cela s'obtient sans grande difficulté en observant que $\equiv$ est une relation d'équivalence et en choisissant un représentant C_i dans chaque classe d'équivalence). Montrer que

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \; A \mapsto \nu(A) := \sum_{i \in I} \mu(A \cap C_i)$$

est une mesure, dont les $(C_i)_{i \in I}$ sont les atomes et qu'elle est purement atomique.

c) Montrer alors que $\rho := \mu - \nu$ est une mesure diffuse. [Indication. On pourra introduire la partition $E = E_1 \cup E_2$ de E avec $E_1 = \cup_i C_i$, identifier $\mu(A \cap E_1)$ et $\mu(A \cap E_2)$, puis montrer que si ρ possédait un atome, alors cet atome serait également un atome de μ].