TD1. Ensembles, tribus, fonctions mesurables

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

I - Ensembles

Exercice 1.
Soit A, B, C trois ensembles.

a) On suppose que $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$. Montrer que $B \subseteq C$.
b) On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 2. ☞
Soit $(G_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ une famille d'ensembles. Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{j=1}^{m} G_{ij} \Big) = \bigcup_{1 \le j_1, \ldots, j_n \le m} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} G_{ij_i} \Big).$$

Exercice 3. ♠
Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E. On note

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

la différence symétrique de A et B. Calculer $A \triangle \varnothing$, $A \triangle E$ et $A \triangle A$, puis montrer

a) $(A \cup B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$,
b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,

Exercice 4. ☞
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

a) Soit $A \subseteq E$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est injective.
b) Montrer que si pour tout sous-ensemble A de E on a l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.
c) Soit $B \subseteq F$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est surjective.

d) Montrer que si pour tout sous-ensemble B de F on a l'égalité $f(f^{-1}(B)) = B$, alors f est surjective.

Exercice 5. ☞
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de F. On suppose I et J non vides. Soit B une partie de F. Démontrer les assertions suivantes.

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, avec égalité quand f est injective.

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

c) ${}^c(f^{-1}(B)) = f^{-1}({}^cB)$.

Exercice 6. ☞
Soit $A, B \subset E$. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur E et à valeurs réelles, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de E et si oui, de laquelle.
a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, b) $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, c) $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, d) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$, e)$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$,
f) $\sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, g) $\inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercice 7.
Déterminer explicitement ou graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1/2[}, \qquad \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[0,n[}.$$

Exercice 8. ☞
Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ensembles on note

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

a) Que représentent les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$? Montrer que

$$\limsup A_n = \Big\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\Big\}, \quad \liminf A_n = \Big\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n^c} < \infty\Big\}.$$

b) Déterminer $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ si $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

c) Montrer que

$$\bigcap_n A_n \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset \bigcup_n A_n.$$

d) Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\cap_{n\geq 0} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 0} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$.

e) Montrer que $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$, $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$.

Exercice 9. ♠

a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dénombrable. (Ind. On pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a, b[\ ;\ |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$).

b) Qu'en est-il pour une fonction réelle monotone définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

II - Tribus

Exercice 10.
Donner des conditions sur un ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

a) $\{\varnothing, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est donné.

b) $\{\varnothing, \{x\}, {}^c\{x\}, E\}$ où $x \in E$ est donné.

c) La classe des singletons de E.

d) La classe des parties finies de E.

e) La classe des parties dénombrables de E.

f) La classe des parties finies ou cofinies de E. On dit qu'une partie A de E est cofinie si $E \smallsetminus A$ est finie.

g) La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. On dit qu'une partie A de E est codénombrable si $E \smallsetminus A$ est dénombrable.

Comparer les tribus engendrées par les différentes classes de parties décrites ci-dessus.

Exercice 11.
Soient $I \subset \mathbb{N}$, E un ensemble et $\{A_i,\ i \in I\}$ une partition de E, c'est-à-dire, $E = \cup_{i \in I} A_i$, $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. On définit

$$\mathcal{A} := \Big\{ \bigcup_{i \in J} A_i;\ J \subset I \Big\}.$$

Montrer que l'ensemble de parties $\mathcal{A}$ est une tribu. Montrer que $\mathcal{A}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ si $\mathrm{card}(I) = n < \infty$ et que $\mathcal{A}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sinon.

Exercice 12. ☞

a) Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des classes de parties de E telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

b) Montrer que l'intersection de deux tribus est une tribu. Généraliser à une famille quelconque de tribus.

c) Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas toujours une tribu.

d) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Exercice 13.
Soit $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(E) | A = f^{-1}(f(A))\}$ est une tribu sur E.

b) Si $\mathcal{A}$ est une tribu de E et $F = E$, montrer que $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} | A = f^{-1}(A)\}$ est une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que f est $\mathcal{B}$-mesurable.

Exercice 14.
Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur E. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ n'est en général pas une tribu sur F.

Exercice 15. ☞
Soit $\mathcal{F}$ la famille des intervalles semi-fermés de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]-\infty, b[$, $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, et soit $\mathcal{A}$ la famille des réunions finies d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une semi-algèbre, $\mathcal{A}$ est une algèbre et que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{F})$ coïncide avec la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice 16. ☞
Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $F \subset E$. Montrer que l'ensemble des traces sur F des éléments de $\mathcal{A}$, soit donc

$$\mathcal{B} := \{A \cap F,\ A \in \mathcal{A}\},$$

est une tribu sur F.

Exercice 17. ☞
Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurés, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(F)$ tels que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ et $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$. On définit

$$\mathcal{C} := \{A \times B,\ A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{G} := \{A \times F,\ A \in \mathcal{E}\} \cup \{E \times B,\ B \in \mathcal{F}\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{G})$. En déduire que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

b) Montrer que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des algèbres alors $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre.

Exercice 18. /♠/ [Variante du lemme des classes monotones]
Soit E un ensemble.

a) On dit que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est un π-système si $\mathcal{C}$ est stable par intersection.

b) On dit que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est un λ-système si

   i) $E \in \mathcal{C}$;

   ii) $\mathcal{C}$ est stable par différence propre ($A, B \in \mathcal{C}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{C}$) ;

   iii) $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante.

   Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ le plus petit λ-système contenant $\mathcal{E}$.

1) Montrer que les ensembles de parties suivants sont des π-systèmes :

   i) la classe des intervalles $\mathcal{C}_1 := \{]-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$;

   ii) la classe des singletons $\mathcal{C}_2 := \{\{x\},\ x \in E\} \cup \{\emptyset\}$;

   iii) la classe des pavés $\mathcal{C}_2 := \{A \times B;\ A, B \in \mathcal{P}(E)\}$.

2) Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ alors $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est bien défini.

3) Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système alors $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. (Ind. Adapter la preuve du lemme des classes monotones).

III - Fonctions mesurables

Exercice 19.
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E : \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$. *(Ind. Penser au critère de Cauchy).*

Exercice 20. ☞
Soit (a_n) une suite de réels. On définit dans $\bar{\mathbb{R}}$ les nombres

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

a) Pourquoi ces nombres sont-ils bien définis ?

b) Vérifier les assertions suivantes

$$\begin{aligned}
\limsup a_n < \alpha &\implies \exists\, n,\ \forall\, k \geq n,\ a_k < \alpha \\
\exists\, n,\ \forall\, k \geq n,\ a_k \leq \alpha &\implies \limsup a_n \leq \alpha \\
\limsup a_n > \alpha &\implies \forall\, n,\ \exists\, k \geq n,\ a_k > \alpha \\
\forall\, n,\ \exists\, k \geq n,\ a_k \geq \alpha &\implies \limsup a_n \geq \alpha.
\end{aligned}$$

c) Montrer que $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ et que (a_n) converge vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ si, et seulement si,

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \ell.$$

d) Soit (b_n) une deuxième suite de réels. A-t-on toujours

$$\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n ?$$

Et si les deux suites sont bornées ? Et si (b_n) converge ?

e) Soit (A_n) une suite d'ensembles. Comparer

$$\limsup \mathbf{1}_{A_n}, \quad \mathbf{1}_{\limsup A_n}, \quad \liminf \mathbf{1}_{A_n}, \quad \mathbf{1}_{\liminf A_n}.$$

Exercice 21.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 22.
Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.

a) Montrer que la tribu image réciproque est $\sigma(f) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ A = -A\}$.

b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 23. ☞
Soient F un ensemble, $(F_i, \mathcal{B}_i)$ deux espaces mesurables et $g_i : F \to F_i$ deux applications. On note $\pi_i : F_1 \times F_2 \to F_i$ les projections canoniques sur F_i. On rappelle que

$$\mathcal{B} := \sigma((g_i)_{i=1,2}) = \sigma\Big(\bigcup_{i=1,2} g_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\Big), \quad \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 := \sigma\{A_1 \times A_2,\ A_i \in \mathcal{B}_i\}.$$

a) Montrer que $\sigma((g_i)_{i=1,2})$ est la plus petite tribu de F rendant les g_i mesurables.

b) En déduire que $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ est la plus petite tribu de $F_1 \times F_2$ rendant les π_i mesurables.

Soit $(E, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable.

c) Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ est mesurable si, et seulement si, $g_i \circ f : (E, \mathcal{A}) \to (F_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable pour $i = 1, 2$.

d) Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to F_1 \times F_2$. On note $f = (f_1, f_2)$, soit donc $f_i := \pi \circ f$. En déduire que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-mesurable si, et seulement si, f_i est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$-mesurable pour $i = 1, 2$.

Exercice 24. /♠/[lemme de la classe monotone fonctionnelle]
Soient $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur E et $\mathcal{C}$ une classe de parties stable par intersection et contenant E. On suppose

a) $\forall\, C \in \mathcal{C},\ \mathbb{1}_C \in \mathcal{H}$;

b) pour toute suite croissante positive de $\mathcal{H}$ qui converge vers une limite f bornée, on a $f \in \mathcal{H}$.

Montrer que les fonctions $\sigma(\mathcal{C})$ mesurables bornées appartiennent à $\mathcal{H}$.

On pourra procéder en plusieurs étapes :

a) Montrer que $\mathcal{M} := \{A \subset E;\ \mathbb{1}_A \in \mathcal{H}\}$ est une classe monotone.

b) En déduire que $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$ (Ind. Utiliser le lemme de la classe monotone).

c) En déduire que les fonctions étagées de $\sigma(\mathcal{C})$ appartiennent à $\mathcal{H}$.

d) Conclure.