TD 3 : Théorèmes de convergence

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

Exercice 1. ☞ Dans les quatre cas suivants (où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)$ converge et déterminer sa limite.

a) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,

b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,

c) $f_n(x) = \sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$,

d) $f_n(x) = |\cos(x)|^{1/n}e^{-x}$.

Exercice 2. ☞ Calculer la limite des suites suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n}dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{n})-1}\ \mathbb{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})|\geq 2\}}\ dx, \qquad \sum_{m\geq 1} \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm}).$$

Exercice 3. Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

$$\text{(i) } I_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx \qquad \text{(ii) } I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}$$

$$\text{(iii) } I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{x^2}+\pi}{ne^{2x^2}+4x^4}dx \qquad \text{(iv) } I_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}dx \qquad \text{(v) } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx.$$

Exercice 4. ☞ Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f.

a) On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_E f_{n_0}d\mu < \infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

b) Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$, mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$. (Ind. Commencer par montrer que $(f - f_n)_+ \to 0$ dans $\mathcal{L}^1$).

Exercice 6. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. On définit pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = f(x^n)$. Calculer la limite de $\int_{]0,1[} g_n d\lambda$.

Exercice 7. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.

b) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Exercice 8. [Application du lemme de Borel-Cantelli]
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\int_E |f_n|^2 d\mu \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que pour tout $x \in A^c$ on a que $|f_n(x)| < n$ à partir d'un certain rang.

Exercice 9.

a) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f et telle que $\|f_n\|_1 \leq K$ pour tout $n \geq 0$, pour une constante K. Montrer que $\|f\|_1 \leq K$.

b) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Calculer $\int \limsup_n f_n d\lambda$ et $\limsup_n \int f_n d\lambda$.

c) Soit $f_n := \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$, calculer $\int \limsup_n f_n d\lambda$ et $\limsup_n \int f_n d\lambda$.

Exercice 10.

a) Donner un exemple de suite de fonctions boréliennes positives $(f_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ admet une limite $c > 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n d\lambda < c$.

b) Si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de signe quelconque telle que $\int_E |\liminf f_n| d\mu < +\infty$, a-t-on toujours $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$?

c) Donner une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ la suite $f_n(x)$ n'admet pas de limite et $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 0$.

d) Exhiber une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues positives sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\sup_{n\geq 0} f_n(x) = +\infty$ pour tout $x \in [0,1]$ (et donc $\int_{[0,1]} \sup_{n\geq 0} f_n = +\infty$) .

Exercice 11. ☞ Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction $A \to \mathbb{R}$ μ-intégrable.

a) Montrer que :

$$\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

(Ceci exprime "l'uniforme continuité de l'intégrale" par rapport à la mesure).

c) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable pour la mesure de Lebesgue et F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\lambda$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. ☞ Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose

(i) (f_n) converge en mesure vers f ;

(ii) il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.

Montrer que

a) $|f| \leq g$ μ-p.p.

b) $f_n \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$ *(Ind. On pourra utiliser la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).*

Exercice 13. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f et $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions intégrables telles que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant vers f μ-p.p., et une fonction g intégrable telle que $\sup_{n\geq 1} |f_{\phi(n)}| \leq g$ μ-p.p.

Exercice 14. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $|\varphi(t)| \leq C\,|t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\Phi : \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^1$ définie par

$$(\Phi f)(x) = \varphi(f(x)), \quad \forall x \in E,\ \forall f \in \mathcal{L}^1.$$

Montrer que Φ est définie et continue de $\mathcal{L}^1$ dans lui-même.

Exercice 15. ☞

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax} f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x) dx = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx$.

Exercice 16. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\displaystyle\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos x}{x}\, dx$.

a) Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.

c) Calculer la limite de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $\varphi(t)$.

Exercice 17. ☞ Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t e^{-t} \displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy$.

d) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $y \in \left]-\sqrt{t}, 0\right[$, $t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}$.

e) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{0} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y} dy = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

f) En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, en déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t\, e^{-t}.$$