TD 5 : Espaces $\mathcal{L}^p$ et inégalités fonctionnelles

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

1 Espaces $\mathcal{L}^p$

Exercice 1. Pour quelle(s) valeur(s) de p les fonction suivantes définies de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont-elles dans l'espace $\mathcal{L}^p$?

a) $x \mapsto \frac{\arctan x}{x} \mathbb{1}_{]0,+\infty]}(x)$

b) $x \mapsto \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)$

Exercice 2. ☞ Discuter l'appartenance à $\mathcal{L}^p(A)$ des fonctions $|x|^\alpha$ et $|x|^\alpha \log|x||^\beta$ suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et l'ensemble $A = B_1$, $A = B_1^c$ ou $A = \mathbb{R}^d$. *(Ind. Commencer par $d = 1$).*

Exercice 3. Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions sur $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = n^\alpha (1 - n^\beta |x - n^{-\beta}|)^+.$$

a) Faire un dessin et montrer que $f_n \xrightarrow{p.p} 0$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, p pour que $f_n \to 0$ dans L^p.

Exercice 4. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.

a) Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$, on considère f_A^ε la fonction définie par

$$f_A^\varepsilon(x) = (1 - d(x, A)/\varepsilon)^+.$$

Montrer que f_A^ε est ε-Lipschitzienne, que $0 \le f_A^\varepsilon \le 1$ et que $f_A^\varepsilon = 1$ sur A, $f_A^\varepsilon = 0$ sur $\{x : d(x, A) \ge \varepsilon\}$.

b) Soit O un ouvert de mesure finie et K un compact tel que $K \subseteq O$. Montrer qu'il existe une fonction Lipschitzienne à support compact g telle que $\mathbb{1}_K \le g \le \mathbb{1}_O$.

c) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$. En déduire que si A est un Borélien de mesure finie, il existe une fonction Lipschitzienne à support compact g telle que $\|\mathbb{1}_A - g\|_p \le \varepsilon$.
Indication : utiliser la régularité de λ.

d) Si $f \in \mathcal{L}^p$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une fonction Lipschitzienne à support compact g telle que $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.
Indication : commencer par une fonction étagée positive, puis une fonction mesurable positive et enfin une fonction de $\mathcal{L}^p$.

2 Inégalités fonctionnelles

Exercice 5. Soit $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions positives mesurables de $(0,1)$. On définit

$$\Phi : \mathscr{M}_+ \to [0,\infty],\ f \mapsto \Phi(f) := \int_0^1 f dx \int_0^1 \frac{1}{f} dx.$$

a) Montrer que $\Phi(\mathscr{M}_+)$ n'est pas majorée.

b) Montrer que $\Phi(\mathscr{M}_+)$ est minoré. Trouver $m := \inf\{\Phi(f),\ f \in \mathscr{M}_+\}$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les $f \in \mathscr{M}_+$ telles que $\Phi(f) = m$.

Exercice 6. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ deux fonctions positives et telles que $f(x)g(x) \geq 1$ p.p. Montrer que

$$\int_0^1 f dx \int_0^1 g dx \geq 1.$$

Exercice 7. Soient f de classe C^1 sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$

Exercice 8. ☞

1) Dans $[-1,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction f qui appartient à tous les espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$, mais pas à $\mathcal{L}^\infty$. Dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction f qui appartient à $\mathcal{L}^\infty$ mais à aucun des espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$.

2) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, montrer que

$$f \in \mathcal{L}^p,\ \forall\, p \in [1,\infty), \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

(Ind. On pourra établir et utiliser l'inégalité $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \geq C\mu(\{|f| \geq C\})^{1/p}$).

3) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$f \in \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_{\mathcal{L}^p} \leq C, \quad \forall\, p \in [1,\infty).$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C$. (Ind. On pourra estimer $\mu(\{|f| \geq A\})$ pour $A > C$).

Exercice 9. ☞ Ici $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré et $\mathcal{L}^\alpha$ l'espace de Lebesgue associé.

1) Montrer que pour tout $1 < r < p \leq \infty$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\forall\, f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_r \leq \|f\|_1^\theta \, \|f\|_p^{1-\theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \theta + \frac{1-\theta}{p}.$$

[Appliquer Hölder aux fonctions $|f|^{r\theta}$ et $|f|^{r(1-\theta)}$].

2) Montrer que si $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ et (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^r$ pour tout $r \in [1, p[$.
3) On suppose de plus que μ est finie. Montrer que si $f_n \to f$ p.p. et (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^r$ pour tout $r \in [1, p[$. [Utiliser la décomposition $g = g\mathbb{1}_{g<M} + g\mathbb{1}_{g\geqslant M}$].

Exercice 10. [Inégalité de Jensen] Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe C^1. On rappelle que si X est un espace vectoriel, une fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall\, u, v \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad \Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v).$$

1) Montrer que pour une fonction f étagée, on a

$$\varphi\Big(\int_E f\, d\mu\Big) \leq \int_E \varphi(f)\, d\mu. \tag{1}$$

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\varphi(f) \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'inégalité (1) a encore lieu. *(Ind. Observer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(s) := \varphi(s) - as - b \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et utiliser la question 1) et la fonction ψ).*

Exercice 11. [Inégalité de Hölder] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q \in]0, 1[$ deux exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considère deux fonctions mesurables f, g. Démontrer *l'inégalité de Hölder*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

en utilisant l'inégalité de Jensen. *(Indication : considérer la mesure μ_ϕ où $\phi = |f|^p / \int |f|^p d\mu$ (lorsqu'elle est bien définie) et la fonction $h = |g|/|f|^{p-1}\mathbb{1}_{f\neq 0}$).*

3 Au delà des espaces $\mathcal{L}^p$ ♠

Exercice 12. Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et F sa fonction de répartition. Montrer que F est absolument continue, au sens où il existe un module de continuité ω_F tel que pour toute suite $[a_i, b_i]$ d'intervalles d'intérieurs disjoints

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \quad \text{implique} \quad \sum_i (F(b_i) - F(a_i)) \leq \omega_F(\delta),$$

si, et seulement si, μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. [Ind. Utiliser le théorème de Radon-Nikodym]

Définition 1 *Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. On dit que $\mathcal{F}$ est* equi-intégrable *si*

— *$\mathcal{F}$ est absolument équicontinue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall A \in \mathscr{A}, \forall f \in \mathcal{F}, \mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon. \tag{AEC}$$

— *$\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}^1$, i.e.*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f| d\mu < \infty. \tag{BL1}$$

Exercice 13. [Caractérisation] Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. Montrer que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable si et seulement si elle vérifie (BL1) ainsi que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \int_{|f|\geq M} |f| d\mu \leq \varepsilon. \tag{AEC'}$$

Exercice 14. [Quelques conditions suffisantes] Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions mesurables. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable dans les cas suivants :

a) $\mathcal{F} = \{f\}$ où $f \in \mathcal{L}^1$,
b) il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $|f| \leq g$ pour tout $f \in \mathcal{F}$,
c) $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^p$ où $p > 1$.

Exercice 15. On suppose que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré fini. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables.

a) Montrer que $f_n \to f$ p.p. et (f_n) équi-intégrable impliquent $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$. [On pourra procéder comme dans l'exercice 9.3].
b) Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ si et seulement si $f_n \to f$ en mesure et (f_n) est équi-intégrable.

Exercice 16. [Partiel 2018-2019] Dans la suite, on pose

$$H(f) = \int_{[0,1]} f \ln f \, dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, lorsque cette quantité est bien définie.

1) Montrer que $H(f)$ est bien définie comme élément de $[-e^{-1}, +\infty]$ ($+\infty$ compris) pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable. *(Ind. On pourra montrer que la fonction $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $j(s) = s \ln s$ est au dessus de sa tangente au point $s = e^{-1}$).* Montrer que $H(f) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra montrer que la fonction j est au dessus de sa tangente au point $s = 1$).* Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $H(f) = +\infty$. *(Ind. Discuter de l'intégrabilité de $x \mapsto x^{-1}|\ln x|^{-\alpha}$ suivant la valeur de $\alpha > 0$).*

On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ mesurables.

2) Soient (f_n) une suite de $\mathscr{M}_+$ et $f \in \mathscr{M}_+$ telles que $H(f_n) \leq C < \infty$ pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to f$ en mesure.
   – Montrer que $f_n \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$ pour tout $M > 0$.
   – Montrer que $H(f) \leq C$. *(Ind. On pourra écrire $f_{n_k} \ln f_{n_k} = f_{n_k} (\ln f_{n_k})_+ - f_{n_k} (\ln f_{n_k})_-$ pour une suite extraite $(f_{n_k})_k$ convenablement choisie).*
   – En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra écrire $s = s \wedge M + (s - M)_+$).*