Université Paris-Dauphine **2018-2019**
Cours de “Intégrale de Lebesgue et Probabilités” Septembre 2018

CHAPITRE 1 - Tribu, Fonction mesurable

Table des matières

1 Tribu

Dans cette section, on note E un ensemble quelconque et on introduit la notion de tribu, qui est une classe d'ensembles de parties de E, c'est-à-dire un classe de sous ensembles de $\mathscr{P}(E)$, à la base de la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Dans la suite, l'ensemble E sera typiquement un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ou un espace métrique.

Définition 1.1 *On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur E un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $E \in \mathscr{A}$;
(ii) $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$;
(iii) $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable :

$$A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}.$$

On appelle “espace mesurable” la donnée d'un couple $(E, \mathscr{A})$. On dit que $A \subset E$ est $\mathcal{A}$-mesurable (ou simplement mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté) si $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 1.2 *Montrer que si $\mathscr{A}$ est une tribu alors*
(iv) $\emptyset \in \mathscr{A}$ (et cela est équivalent à supposer (i)) ;
(v) $\mathscr{A}$ est stable par réunion finie : $(A_k \in \mathscr{A},\ 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$;
(vi) $\mathscr{A}$ est stable par intersection finie : $(A_k \in \mathscr{A},\ 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$;
(vii) si $A, B \in \mathscr{A}$ alors $A\backslash B, A\,\Delta\,B := (A \cup B)\backslash(A \cap B) \in \mathscr{A}$.
(viii) $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable, plus grande limite et plus petite limite, soit donc pour une suite $(A_n)_{n\ge1}$ de $\mathscr{A}$, on a

$$\bigcap_{n\ge1} A_n,\ \limsup A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n\ge1}\bigcup_{k\ge n} A_k,\ \liminf A_n = \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n\ge1}\bigcap_{k\ge n} A_k \in \mathscr{A}.$$

Exemples 1.3 *1)* $\{\emptyset, E\}$ *est une tribu, appelée tribu grossière.*

2) $\mathscr{P}(E)$ *est une tribu, appelée tribu discrète. Cette tribu est très utilisée lorsque* E *est discret (fini ou dénombrable) mais ne l'est pas lorsque* E *n'est pas dénombrable (par exemple si* $E = \mathbb{R}$*).*

3) Une intersection (d'un nombre quelconque) de tribus est une tribu.

4) Une réunion de tribus n'est par une tribu en général. Considérer par exemple $E := \{0, 1, 2\}$ *et la réunions des tribus* $\{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ *et* $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$*.*

5) Si $\{A_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ *est une partition de* E*, c'est-à-dire, si* $E = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *et* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *lorsque* $i \neq j$*, alors*

$$\mathcal{A} := \Big\{ \bigcup_{i\in J} A_i;\ J \subset \mathbb{N} \Big\}$$

est une tribu.

La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est définie par $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, si $\forall A \in \mathscr{A}$, $A \in \mathscr{B}$. Pour la relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$ [1] induite par l'inclusion, $\mathscr{P}(E)$ est la tribu la plus grande (ou plus fine) et $\{\emptyset, E\}$ est la tribu la plus petite (ou plus grossière).

Définition 1.4 *Soit* $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(E)$ *quelconque. L'ensemble de parties*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathscr{A}\ \mathit{tribu} \supset \mathcal{E}} \mathscr{A}$$

est une tribu, c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$*. On l'appelle tribu engendrée par* $\mathcal{E}$*.*

La tribu $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ engendrée par deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est également notée $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ ou $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.

Exemples 1.5 *1) La tribu engendrée par les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *est appelée tribu borélienne et notée* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$*. Nous reviendrons sur cet exemple fondamental dans la section 3.*

2) Soient $(E, \mathscr{A})$*,* $(F, \mathscr{B})$ *deux espaces mesurables. On appelle tribu produit la tribu de* $E \times F$ *engendrée par les "rectangles élémentaires"* $A \times B$*,* $A \in \mathscr{A}$*,* $B \in \mathscr{B}$*, elle est notée* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$*.*

3) On définit $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. La tribu borélienne* $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *de* $\overline{\mathbb{R}}$ *est la tribu engendrée par les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *et les ensembles de la forme* $[-\infty, a[$*,* $]a, +\infty]$*,* $a \in \mathbb{R}$*.*

Proposition 1.6 *Soient* E *un ensemble,* $(F, \mathscr{B})$ *un ensemble mesurable et* $f : E \to (F, \mathscr{B})$*. L'ensemble de parties*

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B),\, B \in \mathscr{B}\} \subset \mathscr{P}(E)$$

est une tribu sur E*. On l'appelle tribu image réciproque de* $\mathscr{B}$ *par* f *ou tribu engendrée par* f*.*

Exemples 1.7 *1) Plus généralement, soient* E *un ensemble,* $(F, \mathscr{B})$ *un ensemble mesurable et* $\mathcal{F}$ *une famille d'applications de* E *dans* $(F, \mathscr{B})$*. On note* $\sigma(\mathcal{F})$ *la tribu engendrée par* $\{\sigma(f),\, f \in \mathcal{F}\}$*.*

2) Soient $(E, \mathscr{A})$ *un espace mesurable et* $F \subset E$*. L'ensemble des traces sur* F *des éléments de* $\mathscr{A}$*, soit donc*

$$\mathscr{B} := \{A \cap F,\, A \in \mathscr{A}\},$$

est une tribu sur F*. C'est l'image réciproque des éléments de* $\mathscr{A}$ *par l'application identité* $i : F \to E$*.*

3) Soit $f : (E, \mathscr{A}) \to F$*. L'ensemble de parties*

$$\{B \subset F; f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{P}(F)$$

est une tribu sur F*. On l'appelle tribu induite (ou image) de* $\mathscr{A}$ *par par* f *et on la note* $f(\mathscr{A})$*. Attention à la notation* $f(\mathscr{A})$ *qui ne désigne donc pas*

$$\{f(A);\, A \in \mathscr{A}\} \subset \mathscr{P}(F).$$

1. c'est en fait sur $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ qui cette relation d'ordre est définie

Lemme 1.8 (fondamental) *Soit $f : E \to F$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(F)$. On a $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$.*

Preuve du Lemme 1.8. L'ensemble de parties $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))$ est une tribu de E d'après la Proposition 1.6 et $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \supset f^{-1}(\mathscr{C})$, donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$.

Définissons $\mathscr{C}' := \{B \subset F; f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\} = f(\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})))$, qui est une tribu d'après l'exemple 1.7 3). Si $C \in \mathscr{C}$, alors $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$, ce qui implique $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$. On en déduite $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}'$, puis $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$, qui est la deuxième inclusion requise. ◻

Exercice 1.9 *Soient $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ deux espaces mesurés, $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(E)$ et $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(F)$ tels que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et $\mathscr{B} = \sigma(\mathcal{F})$, et enfin*

$$\mathcal{G} := \{A \times F,\, A \in \mathcal{E}\} \cup \{E \times B,\, B \in \mathcal{F}\}.$$

Montrer que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

2 Algèbre, classe monotone

Il s'avère qu'il est souvent difficile d'expliciter tous les éléments d'une tribu sur un ensemble E (lorsque E n'est pas dénombrable). Les tribus pourrons alors être définies à partir de classes d'éléments générateurs (algèbre, semi-algèbre) que nous introduisons dans cette section.

Définition 2.1 *On appelle algèbre (de Boole sur E/de parties de E) un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $E \in \mathscr{A}$;
(ii) $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$;
(iii) $\mathscr{A}$ est stable par réunion : $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

Exercice 2.2 *Montrer que si $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties alors*
(iv) $\emptyset \in \mathscr{A}$ (et cela est équivalent à supposer (i)) ;
(v) $\mathscr{A}$ est stable par réunion finie : $(A_k \in \mathscr{A},\, 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{A}$;
(vi) $\mathscr{A}$ est stable par intersection finie : $(A_k \in \mathscr{A},\, 1 \le k \le n) \Rightarrow A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{A}$;
(vii) si $A, B \in \mathscr{A}$ alors $A \backslash B, A \,\Delta\, B := (A \cup B) \backslash (A \cap B) \in \mathscr{A}$.

Exemples 2.3 *1) Une tribu est une algèbre de parties. La réciproque est fausse. Nous en donnons un premier exemple ci-dessous (cf. Exemples 2.5). La différence entre algèbre et tribu (σ-algèbre) est la condition de stabilité des réunions finies vs réunions dénombrables, le σ de σ-algèbre faisant donc référence à la dénombrabilité.*

2) Une intersection (d'un nombre quelconque) d'algèbres est une algèbre.

3) Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition finie de E, c'est-à-dire, si $E = \cup_{1 \le i \le n} A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$, alors

$$\mathcal{A} := \Big\{ \bigcup_{i \in J} A_i;\ J \subset \{1, \ldots, n\} \Big\}$$

est une algèbre. En particulier, $\mathcal{A}$ est en bijection avec $\mathscr{P}(\{1, \ldots, n\})$.

Proposition 2.4 *On appelle semi-algèbre un ensemble de parties $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(E)$ tel que*
(i) $\emptyset, E \in \mathcal{F}$;
(ii) $\mathcal{F}$ est stable par intersection : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
(ii) A^c est une union finie d'éléments de $\mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.
Alors

$$\mathscr{A} := \{\text{unions finies d'éléments de } \mathcal{F}\}$$

est une algèbre de parties de E.

Preuve de la Proposition 2.4. Il suffit de montrer que $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire. Pour $A \in \mathscr{A}$, on écrit

$$A^c = \Big(\bigcup_{i=1}^n F_i\Big)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c = \bigcap_{i=1}^n \Big(\bigcup_{j=1}^m G_{ij}\Big) = \bigcup_{1\le j_1,\dots,j_n\le m} \Big(\bigcap_{i=1}^n G_{ij_i}\Big)$$

avec $F_i, G_{ij} \in \mathcal{F}$. □

Exemples 2.5 *1) Une algèbre est une semi-algèbre. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple développé ci-dessous.*

2) On appelle intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ *un intervalle de la forme* $[a, b[$, $]-\infty, b[$ *ou* $[a, \infty[$, $-\infty < a \le b \le +\infty$. *La famille* $\mathcal{F}$ *des intervalles semi-fermés de* $\mathbb{R}$ *forme une semi-algèbre. On observe en particulier que le complémentaire d'un intervalle semi-fermé est soit un intervalle semi-fermé, soit l'union de deux intervalles semi-fermés. Par exemple* $\mathbb{R}\backslash[a, b[=]-\infty, a[\cup [b, \infty[$.

3) La famille $\mathcal{F}$ *n'est pas une algèbre puisqu'elle n'est évidemment pas stable par passage au complémentaire, ni par réunion finie. L'ensemble* $\mathscr{A}$ *des réunions finies d'intervalles semi-fermés est une algèbre d'après la Proposition 2.4.*

4) L'algèbre $\mathscr{A}$ *n'est pas une tribu puisqu'elle n'est pas stable par réunion dénombrable. Par exemple, l'intervalle ouvert* $]0, +\infty[= \cup_n [1/n, +\infty[$ *n'appartient pas à* $\mathscr{A}$. *Les tribus* $\sigma(\mathcal{F})$ *et* $\sigma(\mathscr{A})$ *coïncident avec la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$.

5) Soient $(E, \mathscr{A})$ *et* $(F, \mathscr{B})$ *deux algèbres de parties. Appelons "rectangle élémentaire" de* $E \times F$ *tout ensemble de la forme* $A \times B$ *avec* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ *et "ensemble élémentaire" toute union finie de rectangles élémentaires. La famille des rectangles élémentaires forme une semi-algèbre. Pour vérifier cette affirmation, on observera par exemple*

$$(A \times B)^c = [(A \times F) \cap (E \times B)]^c = (A^c \times F) \cup (E \times B^c).$$

La famille des ensembles élémentaires forme donc une algèbre d'après la Proposition 2.4.

Exercice 2.6 *1) Soit* $(E_i, \mathscr{A}_i)$, $1 \le i \le n$, *une famille finie d'algèbres de parties. Appelons "pavés" les sous-ensembles* $P = A_1 \times \ldots \times A_n$ *de* $E_1 \times \ldots \times E_n$, *avec* $A_i \in \mathscr{A}_i$, $1 \le i \le n$. *L'ensemble des réunions finies de pavés élémentaires forme une algèbre sur* $E_1 \times \ldots \times E_n$.

2) Soient E *un ensemble et* $\mathscr{A}$ *une algèbre de parties de* E. *Pour toute famille finie d'entiers* $i_1, \ldots, i_n$ *distincts et toute famille* $A_{i_k} \in \mathscr{A}$, $1 \le k \le n$, *on définit le cylindre élémentaire*

$$C = \prod_j C_j, \quad C_j = A_{i_k} \text{ si } j = i_k, \quad C_j = E \text{ si } j \notin \{i_1, \ldots, i_n\}.$$

L'ensemble des réunions finies de cylindres élémentaires forme une algèbre de parties de $E^{\mathbb{N}}$.

3) Soit $(E_t)_{t\in T}$ *une famille d'ensembles indexée par un ensemble* T *d'indices (quelconque), chacun étant muni d'une algèbre* $\mathscr{A}_t$ *de parties de* E_t. *Pour tout* $J \subset T$ *sous-ensemble fini et* $A_t \in \mathscr{A}_t$, $t \in J$, *on définit le cylindre élémentaire*

$$C = \prod_{t\in T} C_t, \quad C_t = A_t \text{ si } t \in J, \quad C_t = E_t \text{ si } t \notin J.$$

L'ensemble des réunions finies de cylindres élémentaires forme une algèbre de parties de $\prod_{t\in T} E_t$.

Définition 2.7 *Soit* E *un ensemble. Une classe monotone* $\mathcal{M}$ *sur* E *est un ensemble de parties de* E *qui est stable par limite monotone (donc par limite croissante et limite décroissante). Pour* $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ *un ensemble quelconque de parties, on note* $\mathcal{M}(\mathscr{C})$ *la plus petite classe monotone contenant* $\mathscr{C}$ *(ou classe monotone engendrée par* $\mathscr{C}$*).*

Remarque 2.8 *Soit E un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ un ensemble de parties. $\mathscr{A}$ est une tribu si, et seulement si, c'est une algèbre et une classe monotone.*

Lemme 2.9 (des classes monotones) *Soit E un ensemble et $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ une algèbre de parties. La tribu et la classe monotone engendrées par $\mathscr{C}$ sont égales, soit donc $\sigma(\mathscr{C}) = \mathcal{M}(\mathscr{C})$.*

Preuve du Lemme 2.9. On a évidemment $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$.

(i) On a $E \in \mathcal{M}$ puisque $E \in \mathscr{C}$.

(ii) Définissons l'ensemble de parties $\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{M};\ A^c \in \mathcal{M}\}$, de sorte que $\mathscr{C} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Si A est une limite monotone d'éléments de $\mathcal{M}'$, disons $A = \cup A_n$, $A_n \in \mathcal{M}'$, alors $A^c = \cap A_n^c$, $A_n^c \in \mathcal{M}'$, ce qui prouve que $\mathcal{M}'$ est une classe monotone, et donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. On a ainsi montré que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ est stable par passage au complémentaire.

(iii) Pour $A \in \mathcal{M}$, définissons l'ensemble de parties $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M};\ A \cup B \in \mathcal{M}\}$, de sorte que $\mathscr{C} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$. Si B est une limite monotone d'éléments de $\mathcal{M}_A$, disons $B = \cup B_n$, $B_n \in \mathcal{M}_A$, alors $A \cup B = \cup(A \cup B_n) \in \mathcal{M}$ puisque $A \cup B_n \in \mathcal{M}$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone. On a ainsi montré que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$ est stable par union.

Ensembles, ces trois propriétés montrent que $\mathcal{M}$ est une une algèbre de parties, ce qui suffit pour conclure d'après la remarque précédente. ◻

Exercice 2.10 *Notons $\mathscr{A}$ la famille des unions finies de tous les intervalles de $\mathbb{R}$ (sans condition de fermeture et ouverture). Montrer que c'est une algèbre mais pas une tribu. (Ind. Considérer l'ensemble de Cantor).*

3 Tribu borelienne

Nous présentons dans cette section la tribu borélienne (ou de Borel) associée à la structure topologique d'un espace métrique (E, d) général et en particulier à la structure topologique (usuelle) de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.1 *On appelle "ouvert de $\mathbb{R}$" tout ensemble de la forme*

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[, \quad J \subset \mathbb{N}, \quad a_j < b_j \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On appelle topologie de $\mathbb{R}$ l'ensemble $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2 *Soit E un ensemble. On appelle "topologie" $\mathscr{T}$ sur E tout ensemble de parties tel que*
(i) $\emptyset, E \in \mathscr{T}$;
(ii) $O_1, O_2 \in \mathscr{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}$;
(iii) $O_i \in \mathscr{T}$, $i \in I$, I quelconque, $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathscr{T}$.
On appelle "ouverts" les éléments de $\mathscr{T}$. On appelle "fermé" le complémentaire d'un ouvert.

Définition 3.3 *Soit E un ensemble. On dit que $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance sur E si*
(i) $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$;
(ii) $\forall\, x, y, z \in E$, $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.
On dit alors que (E, d) est un espace métrique. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) := \|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$, définit une distance.
On appelle boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(a, r) := \{x \in E;\ d(x, a) < r\}.$$

On appelle ouvert de E tout ensemble $\mathcal{O} \subset E$ vérifiant

$$\forall\, a \in \mathcal{O}, \quad \exists\, r > 0; \quad B(a, r) \subset \mathcal{O}.$$

Proposition 3.4 *L'ensemble des ouverts $\mathscr{T}_E$ d'un espace métrique (E, d) forme une topologie. La topologie de $\mathbb{R}$ (définie ci-dessus) est une topologie. C'est la topologie associée à la distance définie à partir de la valeur absolue (qui est une norme).*
La topologie de $\mathbb{R}^d$ est la topologie associée à une distance définie à partir d'une norme de $\mathbb{R}^d$. Les normes étant équivalentes, elles induisent toutes la même topologie.

Définition 3.5 *On appelle "tribu borelienne" sur un espace métrique E la tribu $\mathscr{B}(E)$ engendrée par les ouverts de E. On appelle "tribu borelienne" sur $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un borélien est un ensemble appartenant à la tribu borélienne.*

Remarque 3.6 *Dans la suite de ce cours, les tribus considérées seront toutes des tribus boréliennes associées à espace métrique (E, d). En particulier, les topologies seront "à base dénombrable d'ouverts", c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, il existe une suite $(\mathcal{O}_n)$ telle que pour tout ouvert $U \ni x$, il existe (au moins) un $\mathcal{O}_n$ tel que $x \in \mathcal{O}_n \subset U$. Dans un espace métrique, il suffit de poser $\mathcal{O}_n := B(x, 1/n)$.*

Proposition 3.7 *La tribu borelienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est également la tribu engendrée par*
(i) les fermés ; (ii) les intervalles (les intervalles ouverts, fermés, semi-fermés) ;
(iii) les demi-droites $[x, +\infty[$, (iv) les demi-droites $]x, +\infty[$,
(v) les demi-droites $]-\infty, x[$; (vi) les demi-droites $]-\infty, x]$;
où dans (iii)–(vi) x parcourt $\mathbb{R}$ ou une partie D dense de $\mathbb{R}$. De plus, les singletons, donc également les parties dénombrables de $\mathbb{R}$, sont boréliens.

Proposition 3.8 *La tribu borelienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathbb{R}^d$ est la tribu engendrée par*
(i) les boules ouvertes ; (ii) les pavés $P = I_1 \times \ldots \times I_d$, I_k intervalle ;
(iii) les demi-espaces.

Ce résultat dit en particulier que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve de la Proposition 3.8 : On peut se ramener à considérer des pavés ouverts et des demi-espaces ouverts par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de la Proposition 3.7. On remarque également que
- les demi-espace sont des pavés et que les pavés sont des intersections de demi-espaces ;
- les cubes (pavés avec des I_k de même longueur) sont des pavés et les pavés sont des unions dénombrables de cubes ;
- les boules ouvertes pour la norme infinie sont les cubes ;
- les cubes ouverts, pavés ouverts, demi-espaces ouverts et boules ouvertes sont des ouverts.

En notant $\mathscr{C}_k$, les différentes familles d'ensembles, avec $\mathscr{C}_{i,\infty}$ définie à partir de la norme infinie, on a clairement $\sigma(\mathscr{C}_{i,\infty}) = \sigma(\mathscr{C}_{ii}) = \sigma(\mathscr{C}_{iii}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ et également $\sigma(\mathscr{C}_{i,N}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, avec $\mathscr{C}_{i,N}$ définie à partir d'une norme N quelconque. Finalement, en notant D une famille dénombrable et dense de $\mathbb{R}^d$ (par exemple $D := \mathbb{Q}^d$), on observe que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $y \in D$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $x \in B(y, r) \subset \mathcal{O}$, où $B(y, r)$ désigne une boule ouverte au sens d'une norme N. On a donc $x \in \cup_{B(y,r)\subset\mathcal{O}} B(y, r)$ et $\mathcal{O} = \cup_{B(y,r)\subset\mathcal{O}} B(y, r)$, le terme de droite étant une union dénombrable de boules ouvertes. Cela implique $\mathcal{O} \in \sigma(\mathscr{C}_{i,N})$ et donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathscr{C}_{i,N})$, pour toute norme N. ◻

Proposition 3.9 *Sur un espace métrique séparable (E, d), la tribu borelienne $\mathscr{B}(E)$ est également la tribu engendrée par*
(i) les boules ouvertes ; (ii) les boules ouvertes de rayon $r \in \mathbb{Q}_+^*$; (iii) les fermés.

Proposition 3.10 *Si (E, d) est un espace métrique et $F \subset E$, alors les boréliens de (F, d) sont les traces sur F des boréliens de E.*
Si E et F sont deux espaces métriques séparables alors $\mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(F) = \mathscr{B}(E \times F)$.
Si (E_n, d_n) est une suite d'espaces métriques séparable, alors l'espace produit $E = \prod_n E_n$ peut être muni de la distance $d((x_n), (y_n)) = \sup_n (d_n(x, y_n) \wedge 2^{-n})$ et $\mathscr{B}(E) = \otimes_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(E_n)$.

4 Fonction mesurable

Définition 4.1 *Soient* $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ *des espaces mesurables et* $f : E \to F$ *une fonction. On dit que* f *est mesurable (ou* $\mathscr{A} - \mathscr{B}$ *mesurable) si* $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ *pour tout* $B \in \mathscr{B}$*, c'est-à-dire, si* $\sigma(f) = f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$*. On dit que* f *est borelienne si* $\mathscr{B}$ *est une tribu borelienne.*

En pratique, on sera amené à considérer des fonctions à valeurs dans F avec
(1) - F espace mesurable quelconque ;
(2) - F espace métrique muni de sa tribu borélienne ;
(3) - $F = \bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^N$;
(4) - $F = \mathbb{R}$.
Pour alléger la présentation nous considérerons essentiellement les deux cas extrêmes (le plus general (1) et le plus particulier (4)). Néanmoins, les résultats valables dans le cas réel sont souvent généralisables (de manière assez simple) au cas (3). Dans les applications, nous pourrons donc avoir recours à ces généralisations.

Proposition 4.2 *Soient* $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$ *mesurables,* $f : E \to F$ *et* $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(F)$ *tel que* $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$*. Alors* f *est mesurable si, et seulement si,* $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$*. En particulier, toute fonction continue (définie sur des espaces métriques) est borelienne. En particulier, toute fonction* f *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable si* $\{f > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty])$ *est mesurable pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve de la Proposition 4.2 : Grâce au Lemme 1.8, on a

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset \mathscr{A},$$

ce qui signifie que f est mesurable.
Par définition, une fonction $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est continue si

$$\forall\, x \in E, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, y \in E, d_E(y, x) < \delta \Rightarrow d_F(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathscr{T}_F$ et montrons que l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathscr{T}_E$. Soit en effet $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ de sorte que $f(x) \in \mathcal{O}$, et également $B_F(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité, on a $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$, soit donc $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui prouve bien que $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{T}_E \subset \mathscr{B}(E)$ On conclut grâce à la première partie de la proposition et le fait que $\sigma(\mathscr{T}_F) = \mathscr{B}(F)$. ◫

Proposition 4.3 *Soient* $(E, \mathscr{A})$, $(F, \mathscr{B})$, $(G, \mathscr{C})$ *des espaces mesurables et* $f : E \to F$, $g : F \to G$ *des fonctions mesurables. Alors* $g \circ f : E \to G$ *est* $\mathscr{A} - \mathscr{C}$ *mesurable.*

Proposition 4.4 *Soient* $(E, \mathscr{A})$, $(F_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ *des espaces mesurables et* $f : E \to \prod F_t$*. On note* $\pi_\tau : \prod F_t \to F_\tau$ *la projection canonique, i.e.* $\pi_\tau((x_t)_{t \in T}) = x_\tau$*. Alors* f *est mesurable si, et seulement si, les* $\pi_\tau \circ f$ *sont mesurables pour tout* $\tau \in T$*. En particulier, toute fonction* f *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *est mesurable si, et seulement si,* $\Re e f$ *et* $\Im m f$ *sont mesurables.*

Preuve de la Proposition 4.4 : Le sens direct est clair. Enfin de démontrer l'implication réciproque, on définit l'ensemble de parties

$$\mathcal{E} := \Big\{\prod B_t ; \exists\, \tau \in T,\, B_t = E\ \forall\, t \neq \tau,\, B_\tau \in \mathscr{B}\Big\},$$

qui satisfait $\sigma(\mathcal{E}) = \otimes \mathscr{B}_t$ d'après (une généralisation de) l'Exercice 1.9. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, en utilisant les notations introduites dans la définition de $\mathcal{E}$, on a $f^{-1}(B) = (\pi_\tau \circ f)^{-1}(B_\tau)$ est mesurable, soit donc $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{A}$. On conclut grâce à la Proposition 4.2. ◫

Proposition 4.5 *Soient* $(E, \mathcal{A})$ *et* $(F, \mathscr{B})$ *deux espaces mesurables,* $A \in \mathscr{A}$, $b \in F$ *et* $f : A^c \to F$ *une fonction mesurable (pour la tribu trace de* $\mathscr{A}$ *sur* A^c*). Alors la fonction* $g : E \to F$ *définie par* $g(x) := f(x)$ *si* $x \notin A$, $g(x) := b$ *si* $x \in A$*, est mesurable.*

Preuve de la Proposition 4.5 : On prend $B \in \mathscr{B}$ et on observe que $g^{-1}(B) = A \cup f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ si $b \in B$, $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ si $b \notin B$. ◫

Proposition 4.6 *Si f et g sont mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ (éventuellement $\overline{\mathbb{R}}$), $p > 0$, alors $|f|^p$, $f^{-1}\,\mathbf{1}_{\{f \neq 0\}}$, $f+g$, fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont mesurables.*

Preuve de la Proposition 4.6 : Ce sont des composées de fonctions mesurables. En particulier, la fonction $\varphi(z) = 1/z$ si $z \neq 0$, $\varphi(z) = 0$ si $z = 0$, est borélienne. ◫

Proposition 4.7 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est partout convergente, alors la fonction $\lim f_n$ est mesurable. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est convergente sur une partie mesurable C et si g est une fonction mesurable quelconque, alors la fonction f définie par $f(x) = \lim f_n(x)$ si $x \in C$, $f(x) = g(x)$ si $x \notin C$ est mesurable.*

Preuve de la Proposition 4.7 : De $\{\sup f_n > \alpha\} = \cup\{f_n > \alpha\}$ et $\{\inf f_n > \alpha\} = \cap\{f_n > \alpha\}$, on déduit que $\sup f_n$ et $\inf f_n$ sont boréliennes. Par conséquent, $\limsup f_n = \inf\sup f_n$ et $\liminf f_n = \sup\inf f_n$ sont également boréliennes. Enfin, si (f_n) est partout convergente, alors $\lim f_n = \limsup f_n = \liminf f_n$ est borélienne. ◫

Définition 4.8 *Sur un ensemble mesurable $(E, \mathscr{A})$, une fonction numérique f définie sur E est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs et si elle est mesurable. Une fonction étagée s'écrit donc*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{1}_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R}\,(ou\ \overline{\mathbb{R}},\, \mathbb{C},\, \mathbb{R}^d), \quad A_i \in \mathscr{A}. \tag{4.1}$$

Il existe toujours une (unique) "écriture canonique" qui consiste à prendre les (a_i) distincts et les (A_i) non vides et formant une partition de E. On note $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E, \mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(E, \mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

En effet, si f est étagée dont les valeurs sont $a_1, \dots, a_n$ (par définition distincts) alors les $A_i := f^{-1}(a_i) \in \mathscr{A}$ sont disjoints et f prend la forme (4.1). Réciproquement (dans le cas réel pour simplifier), si f est de la forme (4.1) sans que les a_i soient nécessairement distincts ni que les A_i soient nécessairement disjoints, alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{J \in \mathcal{I}_\alpha} \Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) \in \mathscr{A}, \quad \mathcal{I}_\alpha := \{J \subset \{1, \dots, n\}, \sum_{j \in J} a_j > \alpha\},$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, de sorte que f est mesurable.

Proposition 4.9 *Les fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ sont les fonctions qui sont partout limites de suite de fonctions étagées. Pour une fonction bornée, on peut supposer la limite uniforme. Pour une fonction positive, on peut supposer les fonctions étagées positives et la limite croissante.*

Preuve de la Proposition 4.9. - Si $f : (E, \mathscr{A}) \to \mathbb{R}$ est positive et bornée, $0 \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in E$, pour tout $n \ge 0$ et $k \in \{0, \dots 2^n + 1\}$, on définit l'ensemble mesurable

$$E_{n,k} := \{x \in E; \frac{k}{2^n} M \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} M\},$$

puis la fonction étagée positive

$$f_n := \sum_{k=0}^{2^n+1} \frac{k}{2^n} M \mathbf{1}_{E_{n,k}}.$$

La suite (f_n) est croissante et converge uniformément vers f.

- Pour une fonction f positive, on définit f_n de la même manière en prenant $M = 1$ et $k \in \{0, ..., 2^{2n}\}$, de sorte que (f_n) est encore croissante.

- Pour une fonction f bornée, on décompose $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ avec $f_j \geq 0$ et bornées, et on utilise la première étape.

- Pour une fonction f quelconque, on décompose $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ avec $f_j \geq 0$, et on utilise la deuxième étape. ◫

Théorème 4.10 *Soient $f : E \to (F, \mathscr{B})$ et $g : E \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ deux applications. Il y a équivalence entre*

(i) g est $\sigma(f)$ mesurable ;

(ii) il existe $\varphi : (F, \mathscr{B}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable telle que $g = \varphi \circ f$.

Preuve du Théorème 4.10. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) n'est rien d'autre que la Proposition 4.3. Montrons l'implication réciproque. On commence par supposer que g est étagée

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ distincts}, \; A_i \text{ disjoints}.$$

Comme g est $\sigma(f)$-mesurable, on a $A_i = g^{-1}(\{a_i\}) \in \sigma(f)$, et donc $A_i := f^{-1}(B_i)$ pour un certain $B_i \in \mathscr{B}$. On a donc

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{B_i} \circ f = \varphi \circ f, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{B_i},$$

avec $\varphi : F \to \mathbb{R}$ mesurable. Dans le cas général d'une fonction $g : (E, \sigma(f)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, on sait que g est limite simple d'une suite (g_n) de fonctions étagées et $\sigma(f)$ mesurables. D'après la première étape, il existe $\varphi_n : F \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $g_n = \varphi_n \circ f$. Pour tout $y \in F$, on pose

$$\varphi(y) := \lim \varphi_n(y) \text{ si la limite existe}, \; := 0 \text{ sinon}.$$

On sait que la fonction $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ainsi définie est mesurable, on note $C \in \mathscr{B}$ l'ensemble des $y \in F$ pour lesquels $\lim \varphi_n(y)$ existe. Pour tout $x \in E$, on a $g(x) = \lim g_n(x) = \lim \varphi_n(f(x))$, de sorte que $f(x) \in C$ et donc

$$\varphi(f(x)) = \lim \varphi_n(f(x)) = g(x),$$

ce qui donne la représentation cherchée $g = \varphi \circ f$. ◫

5 Compléments (hors programme) et exercices

• On utilise couramment quatre "structures" en Analyse. De la plus forte à la plus générale, ces structures sont celles associées aux espaces suivants :
- espace (vectoriel) normé (ex : $\mathbb{R}^d$) ;
- espace métrique (ex : boules et sphères de $\mathbb{R}^d$) ;
- espace topologique (permet de définir les fonctions continues) ;
- espace mesuré (permet de définir les fonctions mesurables).

Il convient d'ajouter deux propriétés de "régularité" définies dans un espace métrique :
- séparabilité (il existe un sous ensemble D dénombrable et dense, par exemple $D = \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) ;
- complétude (les suites de Cauchy convergent).

Le bon cadre pour développer la théorie de la mesure et des probabilités est celui des espaces polonais, c'est-à-dire, les espaces métriques, séparables et complets. Il est néanmoins possible de définir une partie de la théorie dans le cadre (plus abstrait et plus général) des espaces mesurés.

• On peut montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est de même cardinal que $\mathbb{R}$. Son cardinal ne coincide donc pas avec celui de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ qui lui est strictement supérieur à celui de $\mathbb{R}$.

Plus généralement, soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré. S'il existe une partie infinie dénombrable de la tribu $\mathcal{A}$ qui engendre celle-ci, alors $\mathcal{A}$ a la puissance du continu.

L'ensemble de Cantor C est un exemple de borélien qui n'appartient pas à l'algèbre des unions finies de pavés.

Exercice 5.1 *Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble de parties*

$$\mathscr{A} := \{A \subset E;\ A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

est une tribu. Comparer $\mathscr{A}$ avec $\sigma(\{x\},\, x \in E)$ et avec la tribu engendrée par $\mathscr{P}_f(E)$, l'ensemble des parties finies de E.

Exercice 5.2 *Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Pour $A, B \in \mathscr{A}$, les fonctions suivantes sont-elles des fonctions caractéristiques d'ensemble*

$$\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B,\ \sup\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\},\ \inf\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}?$$

Soit (A_n) une suite de $\mathscr{A}$. Comparer

$$\limsup \mathbf{1}_{A_n}, \quad \mathbf{1}_{\limsup A_n}, \quad \liminf \mathbf{1}_{A_n}, \quad \mathbf{1}_{\liminf A_n}.$$