**Université Paris Dauphine**
**L3 MI2E**
**Intégrale de Lebesgue et Probabilités**

# Examen, Mercredi 9 Janvier 2019.
# Durée : 3h.

**Tous** *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.** *Le barème est donné à titre* **indicatif**. *Les exercices 1 à 4 et le problème 1 portent sur des questions qui ont été traitées en cours ou en TD, ou sont des applications directes de théorèmes du cours, ils sont donc à considérer en priorité. Afin de tenir compte de la longueur de l'énoncé, dans les problèmes, les questions notées d'une $*$ seront comptées en bonus.*

**Exercice 1. Questions de cours. ($\sim$ 1 point).**

1) Donner la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

2) Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. Donner, sans démonstration, la relation entre $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que $f$ est borélienne si, et seulement si, pour tout ouvert son image réciproque par $f$ est un borélien.

**Exercice 2. Questions de cours. ($\sim$ 1 point).** On se donne un espace de probabilité $(E, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une sous tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. On rappelle que pour toute va $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$, il existe une va $Y \in L^1(\mathcal{B})$ unique, notée $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$, telle que $\mathbf{E}(Y\,Z) = \mathbf{E}(X\,Z)$, $\forall\, Z \in L^\infty(\mathcal{B})$.

1) Démontrer que si $X$ est $\mathcal{B}$-mesurable alors $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = X$.

2) Démontrer que si $X$ est indépendante de $\mathcal{B}$ alors $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$.

**Exercice 3 ($\sim$ 1 point).** On pose

$$u_n := \int_0^\infty \frac{x}{1+nx^3}\,dx.$$

Justifier que l'intégrale ci-dessus est bien définie. La suite $(u_n)$ converge-t-elle et si la réponse est positive, quelle est sa limite ?

**Exercice 4 ($\sim$ 1 point).** Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $g, h \in \mathcal{L}^3$. On définit

$$F : ]-1,1[ \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int |g + th|^3 d\mu.$$

Montrer que $F$ est de classe $C^1$ et calculer $F'(0)$.

**Problème 1 ($\sim$ 6 points).** L'objectif de ce problème consiste principalement à **redémontrer** certains résultats démontrés en cours (en suivant les étapes proposées). Dans $\mathbb{R}$ et pour tout $\lambda > 0$, on définit les fonctions gaussiennes (centrées) par

$$G_\lambda(x) := (2\pi\lambda)^{-1/2} \exp(-x^2/(2\lambda))$$

On pose également $G(x) := G_1(x)$.

1) - Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2/2-y^2/2}\, dxdy = 2\pi.$$

2) - En déduire l'expression explicite de

$$\varphi(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$$

pour $\xi = 0$, puis pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. (Ind. On pensera à calculer $\varphi'(\xi)$).

3) - Rappeler la définition de la transformer de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. A l'aide de la question précédente, donner une expression explicite (ne faisant plus intervenir d'intégrale) de $\hat{G}$.

4) - Rappeler la définition du produit de convolution $f * g$ de deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Rappeler (sans démonstration) dans quel espace de fonctions se trouve $f * g$ lorsque $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et lorsque $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.

5) - Montrer que $G_s * G_t = G_z$, pour tout $s, t > 0$, et donner l'expression de $z$ (en fonction de $t, s$). En déduire que si $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ sont deux var indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

6) - Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. On pose $Y_1 = \frac{1}{2}X_1,\ Y_2 = \frac{1}{2}\left(Y_1 + X_2\right), \ldots, Y_n = \frac{1}{2}\left(Y_{n-1} + X_n\right), \ldots$

a) Calculer l'espérance et la variance de $Y_n$.

b) Quelle est la loi de $Y_n$ ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que $(Y_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ que l'on précisera.

7)* - Pour $u_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\, u_0(y)\, dy.$$

a) Montrer que $u \in C^2((0,\infty) \times \mathbb{R})$ et calculer

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

b) Montrer que $u(t,x) \to u_0(x)$ lorsque $t \to 0$, en un sens que l'on précisera.

**Problème 2 (∼ 4 points).** Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures de probabilité telles que $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$. On dénote par $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ une fonction telle que $\nu = g\,\mu$. On introduit l'entropie relative

$$H(\nu|\mu) := \int_E g \,\log g \, d\mu.$$

On notera que la fonction $s \mapsto s \log s$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par prolongement par continuité en 0. On posera donc $0 \log 0 = 0$.

1) Montrer que

$$H(\nu|\mu) = \int_E j(g)\, d\mu, \quad j(s) := s \log s - s + 1, \, \forall\, s \geq 0,$$

puis que $H(\nu|\mu) \geq 0$. (On pensera à déterminer le signe de $j$).

2) Montrer que pour tout $x \in E$, on a

$$j(g(x)) = (g(x) - 1)^2 \int_0^1 \frac{1-s}{1 + s\,(g(x) - 1)}\, ds.$$

3) En déduire que

$$H(\nu|\mu) = \int_0^1 (1-s) \int_E \frac{(g-1)^2}{1 + s\,(g-1)} d\mu \, ds.$$

4) Montrer que pour tout $s \in [0, 1]$, on a

$$\left( \int_E |g - 1| \, d\mu \right)^2 \leq \int_E \frac{(g-1)^2}{1 + s\,(g-1)} d\mu.$$

5)* Conclure que

$$\left( \int_E |g - 1| \, d\mu \right)^2 \leq 2H(\nu|\mu).$$

Cette dernière inégalité s'appelle l'inégalité de Csiszár-Kullback.

**Problème 3 (∼ 4 points).** Soit $(X_n)$ une suite de var indépendantes $\mathcal{L}^1$ de même loi centrée, soit donc $\mathbf{E}(X_n) = 0$. On définit

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

puis pour $a > \mathbf{E}(X_1) = 0$ fixé, on définit

$$M_k := \sup_{0 \leq n \leq k} (S_n - na), \quad M'_k := \sup_{0 \leq n \leq k} (S_{n+1} - S_1 - na),$$

ainsi que $M := \lim M_k$, $M' := \lim M'_k$.

1) Montrer que $M_k$ et $M'_k$ ont même loi. En déduire que $M$ et $M'$ ont même loi.
2) Montrer que
$$M_{k+1} = M'_k - \inf(a - X_1, M'_k).$$
En déduire que $\mathbf{E}(\inf(a - X_1, M'_k)) \leq 0$, puis que $\mathbf{E}(\inf(a - X_1, M')) \leq 0$.
3) Montrer que si $\mathbf{P}(M = \infty) = 1$ alors $\inf(a - X_1, M') = a - X_1$ p.s. puis que $\mathbf{E}(a - X_1) \leq 0$. En déduire une contradiction et que donc $\mathbf{P}(M = \infty) < 1$.

4) Montrer que

$$\{M < \infty\} \ = \{\sup_{n\geq k}(S_n - S_k - (n-k)a) < \infty\}$$

puis que $\{M < \infty\}$ appartient à la tribu asymptotique $\lim \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$. En déduire que

$$M < \infty \text{ p.s.}$$

5)* De l'inégalité $S_n \leq M + na$, déduire que

$$\limsup \frac{1}{n} S_n \leq a \text{ p.s..}$$

6)* Conclure que

$$\lim \frac{1}{n} S_n = 0 \text{ p.s..}$$

Nous venons de démontrer la loi forte des grands nombres dans sa version $\mathcal{L}^1$.

**Problème 4 ($\sim$ 2 points).** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ et $X$ une var $\mathcal{L}^1$. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\sigma(\sigma(X), \mathcal{B})$ sont des tribus indépendantes. On pose $Y := \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ et $\mathcal{D} := \{B \cap C;\ B \in \mathcal{B},\ C \in \mathcal{C}\}$.

1) Montrer que $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B\cap C}) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_B)\mathbf{P}(C)$, pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $C \in \mathcal{C}$.

2) En déduire $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_D) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_D)$ pour tout $D \in \mathcal{D}$.

3)* Montrer que $\mathcal{D}$ est une semi-algèbre et que $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_G) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_G)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ désigne l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}$.

4)* Montrer que $\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

5)* Conclure que $\mathbf{E}(X|\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{C})) = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$.