

Examen, Mercredi 26 Juin 2019.

Durée : 3h.

**Tous les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barème est donné à titre indicatif.**

**Exercice 1. (~ 4 points).** Déterminer la limite des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n+nx^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+nx^3} dx$$

et

$$\int_{]0,+\infty[ \times ]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2+y^2+n^2x^2y^2} dx dy$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 2. (~ 2,5 points).** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $E$  convergeant presque partout vers une fonction  $f$  et telle que

$$\int_E f_n^2 d\mu \rightarrow \int_E f^2 d\mu < \infty$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Énoncer le lemme de Fatou, puis l'appliquer à la suite de fonctions  $(g_n)$  définie par  $g_n := (f_n + f)^2$ . En déduire que  $f_n \rightarrow f$  au sens de  $\mathcal{L}^2$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 3. (~ 4,5 points).** Soient  $(E, \mathcal{A})$ ,  $(F, \mathcal{B})$  deux espaces mesurables,  $\mu$  une mesure sur  $E$  et  $T : E \rightarrow F$  une application mesurable.

1) Montrer que l'application

$$\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty], \quad B \mapsto \nu(B) := \mu(T^{-1}(B))$$

est une mesure sur  $(F, \mathcal{B})$ . On la note  $\nu = T\#\mu$ .

2) Montrer que

$$\int_F \varphi(y) d\nu(y) = \int_E \varphi(T(x)) d\mu(x) \tag{1}$$

pour toute fonction  $\varphi$  étagée positive de  $F$ . Expliquer succinctement pourquoi la relation (1) est encore vraie pour tout  $\varphi \in \mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$ .

Dans la suite de cet exercice on fixe  $(E, \mathcal{A}) = (F, \mathcal{B}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et on définit  $\mu$  et  $\nu$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  par

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(B) = \lambda(B \cap [0, 1]), \quad \nu(B) = \lambda(B \cap [1, 2]).$$

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des applications  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\nu = S\#\mu$ .

- 3) Montrer que  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures de probabilités.
- 4) Montrer que l'application  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $T(x) := x + 1$  vérifie  $T \in \mathcal{S}$ .
- 5) Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 d\mu(x) \geq 1, \quad \forall S \in \mathcal{S}.$$

- 6) Dédurre des questions (4) et (5) que l'infimum

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 d\mu(x)$$

est atteint et que sa valeur est 1.

**Exercice 4 (~ 4 points).** Soit  $(X_n)$  une suite de var indépendantes  $\mathcal{L}^2$  de même loi centrée, soit donc  $\mathbf{E}(X_n) = 0$  et on note  $\sigma^2 := \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ . On définit

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n), \quad n \geq 1,$$

et le but de cet exercice est de montrer que  $Y_n \rightarrow 0$  p.s.

- 1) Expliquer sous quelles hypothèses on peut affirmer que  $Y_n \rightarrow 0$  en loi (on donnera un énoncé précis et le nom de ce résultat).
- 2) Montrer que

$$\mathbf{E}(Y_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

puis que

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y_{k^2}^2\right) < \infty.$$

- 3) En déduire que  $Y_{k^2} \rightarrow 0$  p.s.

On définit

$$q(n) := \max\{k^2; k \in \mathbb{N}, k^2 \leq n\} \quad \text{et} \quad \Delta_n := Y_n - \frac{q(n)}{n} Y_{q(n)}.$$

- 4) Montrer que  $q(n) \leq n \leq q(n) + 2\sqrt{q(n)} + 1$  et que

$$\Delta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=q(n)+1}^n X_j.$$

- 5) En déduire que

$$\mathbf{E}(\Delta_n^2) \leq \frac{3\sigma^2}{n^{3/2}},$$

puis que  $\Delta_n \rightarrow 0$  p.s.

- 6) Conclure que  $Y_n \rightarrow 0$  p.s.

**Exercice 5 (~ 5 points).** Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité sur  $(E, \mathcal{A})$ . On considère une classe d'ensembles  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  telle que

$$E \in \mathcal{B}, \quad A \cap B \in \mathcal{B}, \quad \forall A, B \in \mathcal{B}. \quad (\pi)$$

On suppose de plus

$$\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mu(A) = \nu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que  $\mu = \nu$ .

- 1) On commence par donner un exemple d'application.
  - a) - Montrer que la famille d'ensembles  $\mathcal{B} := \{]t, +\infty[, t \in \mathbb{R}\}$  vérifie  $(\pi)$  et  $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
  - b) - En déduire que si  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  dont les fonctions de répartition coïncident, alors  $\mu = \nu$ . On commencera par rappeler la définition d'une fonction de répartition.

On définit

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A}; \mu(A) = \nu(A)\}.$$

- 2) On rappelle qu'une "classe monotone" est une classe d'ensembles stable par limites croissantes et limites décroissantes. Montrer que  $\mathcal{G}$  est une classe monotone.
- 3) Montrer que pour tout  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{A}$ , on a

$$\lambda(B_1 \cup \dots \cup B_k) = \lambda(B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}) + \lambda(B_k) - \lambda(B'_1 \cup \dots \cup B'_{k-1}),$$

avec  $B'_i := B_i \cap B_k$  et où  $\lambda$  désigne  $\mu$  ou  $\nu$ .

- 4) Montrer par récurrence que  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$  implique  $A_1 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{G}$ .
- 5) Montrer que  $A, B \in \mathcal{G}$ ,  $A \subset B$ , implique  $B \setminus A \in \mathcal{G}$ .

On définit

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcap_{i \in I} A_i, I \text{ fini}, A_i \in \mathcal{B} \text{ ou } A_i^c \in \mathcal{B} \right\}.$$

- 6) Montrer que tout élément  $B \in \mathcal{C}$  peut s'écrire

$$B = A_0 \cap A_1^c \cap \dots \cap A_k^c = A_0 \setminus (A'_1 \cup \dots \cup A'_k),$$

avec  $A_i, A'_i \in \mathcal{B}$ . En déduire que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ .

On définit

$$\mathcal{D} := \left\{ \bigcup_{j \in J} B_j, J \text{ fini}, B_j \in \mathcal{C} \right\}.$$

- 7) Par un argument de récurrence, déduire des questions 3) et 6) que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ .
- 8) Montrer que  $\mathcal{D}$  est une algèbre et conclure que  $\mu = \nu$ .