**Université Paris Dauphine**
**L3 MI2E**
**Intégrale de Lebesgue et Probabilités**

# Partiel, Lundi 29 Octobre.
# Durée : 1h30.

**Tous** *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Le barème est donné à titre* <u>*indicatif*</u>.

**Exercice 1 (2 points).** Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $g, h \in \mathcal{L}^2$. On définit

$$F : ]-1,1[ \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int (g+th)^2 d\mu.$$

Montrer que $F$ est de classe $C^1$ et calculer $F'(0)$.

**Correction 1.** Il s'agit d'un théorème du cours. On pose $f(t,x) := (g+th)^2$. On a $0 \le f(t,.) \le g^2 + h^2 \in \mathcal{L}^1$, $f(t,.)$ mesurable et $f(.,x)$ continue, donc $F$ est bien définie et continue. De même, $f'(t,x) := 2(g+th)h$ satisfait $|f'(t,.)| \le g^2 + 3h^2 \in \mathcal{L}^1$, $f'(t,.)$ mesurable et $f'(.,x)$ continue, donc $F$ est de classe $C^1$. Enfin, on a

$$F'(0) = \int f'(0,x) d\mu(x) = 2 \int gh d\mu.$$

**Exercice 2 (4 points).**

1) Dans $[-1,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction $f$ qui appartient à tous les espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$, mais pas à $\mathcal{L}^\infty$. Dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, donner un exemple de fonction $f$ qui appartient à $\mathcal{L}^\infty$ mais à aucun des espaces $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$.
2) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, montrer que
$$f \in \mathcal{L}^p, \ \forall p \in [1, \infty), \quad \text{et} \quad \lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$
(Ind. On pourra établir et utiliser l'inégalité $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \ge C\mu(\{|f| \ge C\})^{1/p}$).
3) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telles que
$$f \in \mathcal{L}^p, \quad \|f\|_{\mathcal{L}^p} \le C, \quad \forall p \in [1, \infty).$$
Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \le C$. (Ind. On pourra estimer $\mu(\{|f| \ge A\})$ pour $A > C$).

**Correction 2.**

1) $\ln|x| \in (\cap \mathcal{L}^p) \backslash \mathcal{L}^\infty$ et $1 \in \mathcal{L}^\infty \backslash (\cap \mathcal{L}^p)$.

2) Puisque $\mu$ est finie $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\mu(E)^{1/p} < \infty$ pour tout $p \in [1, \infty)$. On en déduit $f \in \mathcal{L}^p$ et $\limsup \|f\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \lim \mu(E)^{1/p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$. D'autre part, si $0 < C < \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ alors $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \geq C\mu(\{|f| \geq C\})^{1/p}$ et $\liminf \|f\|_{\mathcal{L}^p} \geq C$.

3) Grâce à l'inégalité de Tchebychev, pour $A > C$, on a $\mu(\{|f| \geq A\}) = \mu(\{|f|^p \geq A^p\}) \leq A^{-p}\|f\|^p_{\mathcal{L}^p} \leq (C/A)^p \to 0$ lorsque $p \to \infty$. Donc $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$.

**Exercice 3 (7 points).** Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe $C^1$. On rappelle que si $X$ est un espace vectoriel, une fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall\, u, v \in X,\ \forall\, \lambda \in [0, 1], \quad \Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda\Phi(u) + (1 - \lambda)\Phi(v).$$

1) Montrer que pour une fonction $f$ étagée, on a

$$\varphi\Big(\int_E f\, d\mu\Big) \leq \int_E \varphi(f)\, d\mu. \tag{1}$$

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\varphi(f) \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'inégalité (1) a encore lieu. *(Ind. Observer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(s) := \varphi(s) - as - b \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et utiliser la question 1) et la fonction $\psi$).*

Dans la suite, on pose

$$H(f) = \int_{[0,1]} f\, \ln f\, dx,$$

où $dx$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, lorsque cette quantité est bien définie.

3) Montrer que $H(f)$ est bien définie comme élément de $[-e^{-1}, +\infty]$ ($+\infty$ compris) pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ mesurable. *(Ind. On pourra montrer que la fonction $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $j(s) = s \ln s$ est au dessus de sa tangente au point $s = e^{-1}$).* Montrer que $H(f) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra montrer que la fonction $j$ est au dessus de sa tangente au point $s = 1$).* Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $H(f) = +\infty$. *(Ind. Discuter de l'intégrabilité de $x \mapsto x^{-1}|\ln x|^{-\alpha}$ suivant la valeur de $\alpha > 0$).*

On note $\mathscr{M}_+$ l'ensemble des fonctions $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ mesurables.

4) Soient $(f_n)$ une suite de $\mathscr{M}_+$ et $f \in \mathscr{M}_+$ telles que $H(f_n) \leq C < \infty$ pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to f$ en mesure.
   - Montrer que $f_n \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$ pour tout $M > 0$.
   - Montrer que $H(f) \leq C$. *(Ind. On pourra écrire $f_{n_k}\ \ln f_{n_k} = f_{n_k}\,(\ln f_{n_k})_+ - f_{n_k}\,(\ln f_{n_k})_-$ pour une suite extraite $(f_{n_k})_k$ convenablement choisie).*
   - En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$. *(Ind. On pourra écrire $s = s \wedge M + (s - M)_+$).*

**Correction 3.**

1) Si $f = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec $(A_i)$ une partition de $E$, on a

$$\varphi\Big(\int_E f\, d\mu\Big) = \varphi\Big(\sum_i a_i \mu(A_i)\Big) \leq \sum_i \mu(A_i)\varphi(a_i) = \int_E \varphi(f)\, d\mu,$$

puisque les coefficients $\mu(A_i)$ sont positifs ou nuls et de somme égale à 1.

2) On a $\psi(s) := \varphi(s) - \varphi'(0)s - \varphi(0) \geq 0$ et $\psi$ est une fonction convexe. On considère une suite $(f_n)$ de fonctions étagées telles que $f_n \to f$ p.p. et $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ ou $0 \geq f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui implique $\psi(f_n) \leq \psi(f) + \psi(0)$ pour tout $n \geq 1$. Grâce au Théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\psi\Big(\int_E f\,d\mu\Big) \leq \int_E \psi(f)\,d\mu,$$

puis immédiatement (1).

3) La fonction $s \mapsto j(s) := s \ln s$ est continue et convexe de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que la fonction $f \ln f$ est mesurable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Comme $j(s) \geq j'(e^{-1})(s - e^{-1}) + j(e^{-1}) = -e^{-1}$, on en déduit que $j(s) + e^{-1} \geq 0$, de sorte que

$$H(f) = \int (j(s) + e^{-1})\,d\mu - e^{-1} \geq -e^{-1}$$

est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. De $j(s) \geq j'(1)(s-1) + j(1) = (s-1)$, on déduit que

$$\int_E f\,d\mu \leq H(f) + 1,$$

et donc $f \in \mathcal{L}^1$ si $H(f) < \infty$. La fonction $f(x) := x^{-1}|\ln x|^{-3/2}$ appartient à $\mathcal{L}^1$, mais $H(f) = +\infty$.

4) (a) Par la réciproque du corollaire du Théorème d'Egorov, on sait qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})$ telle que $f_{n_k} \to f$ p.p., de sorte que $f_{n_k} \wedge M \to f \wedge M$ p.p. et $f_{n_k} \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$ par le Théorème de convergence dominée. Par unicité de la limite, on a $f_n \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$. (b) Pour cette suite extraite, on a $f_{n_k} \ln f_{n_k} = j_+(f_{n_k}) - j_-(f_{n_k})$ avec $0 \leq j_+(f_{n_k}) \to j_+(f)$ p.p. et $0 \leq j_-(f_{n_k}) \to j_-(f)$ p.p., $j_-(f_{n_k}) \leq e^{-1}$. Grâce au lemme de Fatou et au Théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\begin{aligned}
H(f) + \int j_-(f)\,dx &= \int \liminf j_+(f_{n_k})\,dx \\
&\leq \liminf \int j_+(f_{n_k})\,dx \\
&= \liminf \Big\{ H(f_{n_k}) + \int j_-(f_{n_k})\,dx \Big\} \\
&\leq \liminf \Big\{ C + \int j_-(f_{n_k})\,dx \Big\} = C + \int j_-(f)\,dx.
\end{aligned}$$

(c) Pour $M > 1$, on écrit

$$\begin{aligned}
\int |f - f_{n_k}|\,dx &\leq \int |f \wedge M - f_{n_k} \wedge M|\,dx + \int (f - M)_+\,dx + \int (f_{n_k} - M)_+\,dx \\
&\leq \int |f \wedge M - f_{n_k} \wedge M|\,dx + \frac{1}{\ln M} \int j_+(f)\,dx + \frac{1}{\ln M} \int j_+(f_{n_k})\,dx \\
&\leq \int |f \wedge M - f_{n_k} \wedge M|\,dx + \frac{2}{\ln M}(C + e^{-1}),
\end{aligned}$$

et on passe à la limite $k \to \infty$ et $M \to \infty$.

**Exercice 4 (7 points).** Soient $E$ un ensemble, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux tribus sur $E$ telles que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ (cela signifie $A \in \mathscr{A}$ implique $A \in \mathscr{B}$) et $\mu$ une mesure finie définie sur $\mathscr{B}$ (donc aussi sur $\mathscr{A}$). On note $\mathcal{L}^p(\mathscr{C}) := \mathcal{L}^p(E, \mathscr{C}, \mu)$ pour $\mathscr{C} = \mathscr{A}$ ou $\mathscr{C} = \mathscr{B}$.

1) Montrer que $f$ est $\mathscr{B}$-mesurable si elle est $\mathscr{A}$-mesurable. En déduire que $L^2(\mathscr{A})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathscr{B})$.
2) Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathscr{B})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A})$ telle que
$$\|f-g\|_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})} = \inf_{h\in\mathcal{L}^2(\mathscr{A})} \|f-h\|_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})}.$$
En déduire que
$$\forall\, h \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A}), \quad \int_E ghd\mu = \int_E fhd\mu.$$
*(Ind. On pourra utiliser l'exercice 1).* La fonction $g$ est-elle unique ?
3) Montrer que si $f \geq 0$ presque partout alors la fonction $g$ définie si dessus satisfait également $g \geq 0$ presque partout.
4) Montrer que si $0 \leq f \in \mathcal{L}^1(\mathscr{B})$ alors il existe une suite $(g_n)$ de $\mathcal{L}^2(\mathscr{A})$, $g_n \geq 0$, telle que
$$\forall\, h \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A}), \quad \int_E g_n hd\mu = \int_E (f\wedge n)hd\mu.$$
En déduire que la suite $(g_n)$ est croissante, $\|g_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}$ pour tout $n \geq 1$, puis qu'il existe $0 \leq g \in \mathcal{L}^1(\mathscr{A})$ telle que
$$\forall\, h \in \mathcal{L}^\infty(\mathscr{A}), \quad \int_E ghd\mu = \int_E fhd\mu. \tag{2}$$
5) En déduire que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathscr{B})$, il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathscr{A})$ telle que (2) a lieu et $\|g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}$.

**Correction 4.**

1) Si $f$ est $\mathscr{A}$-mesurable et $C$ est un borélien, alors $f^{-1}(C) \in \mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, de sorte que $f$ est $\mathscr{B}$-mesurable. On en déduit que $L^2(\mathscr{A})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathscr{B})$. Si $(f_n)$ est une suite de $L^2(\mathscr{A})$ qui converge vers $f$ dans $L^2(\mathscr{B})$ alors c'est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathscr{A})$ et elle est donc convergente vers une limite $g$ dans $L^2(\mathscr{A}) \subset L^2(\mathscr{B})$. On en déduit que $g$ est $\mathscr{A}$-mesurable et que $f = g$ par unicité de la limite dans $L^2(\mathscr{B})$.
2) Le Théorème de projection sur un sev fermé nous dit exactement que pour tout $f \in L^2(\mathscr{B})$ il existe un unique $g \in L^2(\mathscr{A})$ tel que
$$\|f-g\|_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})} = \inf_{h\in\mathcal{L}^2(\mathscr{A})} \|f-h\|_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})}.$$
La fonction $g \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A})$ est donc unique à modification sur un ensemble de mesure nulle près. La caractérisation de $g$ est donnée dans le cours. Autre façon, on définit
$$F(t) := \|f-g+th\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})} \geq F(0) = \|f-g\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathscr{B})},$$
pour $h \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A})$. D'après l'exercice 1, on a
$$F'(0) = 2\int (f-g)h\, d\mu = 0,$$
puisque $F$ est de classe $C^1$ et prend son minimum en $t = 0$.
3) (1pt) Dans le cas contraire, il existe $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) > 0$ tels que $g \leq -\varepsilon$ sur $A$. On en déduit
$$0 \leq \int_E f\mathbf{1}_A d\mu = \int_E g\mathbf{1}_A d\mu \leq -\varepsilon\mu(A) < 0,$$
ce qui est absurde.

4) La question 2) appliquée à la fonction $f \wedge n \in \mathcal{L}^2$ donne l'existence de $g_n \in \mathcal{L}^2(\mathscr{A})$, et $g_n \geq 0$ d'après la question 3). De plus, de

$$\int_E (g_m - g_n) h d\mu = \int_E (f \wedge m - f \wedge n) h d\mu, \quad \forall\, h \in L^2(\mathscr{A}),$$

et de la question 3), on tire que $g_m \geq g_n$ si $m \geq n$ (puisqu'alors $f \wedge m - f \wedge n \geq 0$). Enfin, en prenant $h = 1$ dans (2), on a

$$\int_E g_n d\mu = \int_E (f \wedge n) d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall\, n \geq 1.$$

D'après le Théorème de convergence monotone, la suite $(g_n)$ converge donc vers une fonction $0 \leq g \in \mathcal{L}^1(\mathscr{A})$. On écrit

$$\forall\, h \in \mathcal{L}^\infty(\mathscr{A}), \quad \int_E g_n h d\mu = \int_E (f \wedge n) h d\mu,$$

et on passe sans difficulté à la limite $n \to \infty$ grâce au Théorème de convergence dominée.

5) (1pt) Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathscr{B})$, on écrit $f = f_+ - f_-$ et ce qui précède implique qu'il existe $0 \leq g_\pm \in \mathcal{L}^1(\mathscr{A})$ telles que $g = g_+ - g_- \in \mathcal{L}^1(\mathscr{A})$ satisfait (2). On en déduit $\|g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}$ en choisissant $h = \operatorname{sign} g = \mathbf{1}_{g>0} - \mathbf{1}_{g<0}$.