Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen, 7 Janvier 2020.
Durée : 3h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.** *Le barême est donné à titre* **indicatif**.

Exercice 1. ($\sim$ 2 points). Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in B(0,1), \quad f(x) := |x|^\alpha (1 + |\log |x||)^\beta,$$

où $B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x| < 1\}$ et $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Pour quelles valeurs de α et β, a-t-on $f \in \mathcal{L}^1(B(0,1))$? On pourra commencer par traiter le cas $d = 1$. On justifiera avec soin ses réponses.

Exercice 2. ($\sim$ 3 points).

1) Pour tout entier n, montrer que

$$\int_0^1 t^n \ln t \, dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2) En justifiant bien sa réponse, montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1+t)}{t} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

[Ind. On rappelle que $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ pour tout $t \in]-1, 1[$].

Exercice 3. ($\sim$ 4 points). Soient $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable, μ une mesure finie et (f_n) une suite de fonctions mesurables positives telle que $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to \infty$. On suppose de plus que (f_n) est bornée dans $\mathcal{L}^2$, où on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$.

1) Montrer que $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$ et que $f \in \mathcal{L}^2$.
2) Montrer que $f_n \wedge M \to f \wedge M$ dans $\mathcal{L}^1$ lorsque $n \to \infty$, pour tout $M > 0$ fixé. On rappelle la notation $s \wedge M := \min(s, M)$.
3) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall\, M > 0, \quad \sup_{n \geq 1} \int_E f_n \, \mathbf{1}_{f_n \geq M} \, d\mu \leq \frac{C}{M}.$$

4) En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^1$ lorsque $n \to \infty$.
[Ind. On pourra écrire $s = s \wedge M + (s - M)_+$].

5) Soit $p \in]1, 2[$. Montrer que $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^p$. Démonter qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\forall\, g \in \mathcal{L}^2, \quad \|g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^1}^{\theta} \|g\|_{\mathcal{L}^2}^{1-\theta}.$$

[Ind. On pourra utiliser l'inégalité de Holder et un choix possible est $\theta = 2/p - 1$].
En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^p$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. ($\sim$ 3,5 points). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

1) Montrer que si $X : \Omega \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est $\mathcal{B}$-mesurable alors X est une var (c'est-à-dire que X est $\mathcal{A}$-mesurable). Montrer que si $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$, il existe une var X qui n'est pas $\mathcal{B}$-mesurable.

On observe que $\mathbf{P}$ est également une mesure (de probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{B})$. On notera $Y \in \mathcal{L}^p(\mathcal{B})$ si Y est une var $\mathcal{L}^p$ qui est de plus $\mathcal{B}$-mesurable, c'est-à-dire si $Y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

2) Soit X une var positive et $\mathcal{L}^1$. On définit

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{Q}(B) := \int_B X d\mathbf{P}.$$

Montrer que $\mathbf{Q}$ est une mesure définie sur $(\Omega, \mathcal{B})$ absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$. En déduire qu'il existe $Y \in L^1(\mathcal{B})$ telle que

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{Q}(B) = \int_B Y d\mathbf{P}.$$

3) Soit X une var $\mathcal{L}^1$.
   (a) Montrer qu'il existe $Y \in L^1(\mathcal{B})$ telle que
   $$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{1}_B X) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_B Y). \tag{1}$$
   [Ind. On pourra introduire la décomposition $X = X_+ - X_-$ et utiliser la question 2)].
   (b) Montrer que
   $$\forall\, Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}), \quad \mathbf{E}(ZX) = \mathbf{E}(ZY). \tag{2}$$
   (c) Montrer que Y est l'unique élément de $L^1(\mathcal{B})$ qui vérifie (1).
   (d) Montrer que si X est $\mathcal{B}$-mesurable alors $Y = X$.
   (e) Montrer que si X est indépendant de $\mathcal{B}$ alors $Y = \mathbf{E}(X)$.

Exercice 5. ($\sim$ 2,5 points). Soit $\mathcal{Z}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{N}(0, I)$, c'est-à-dire

$$P^{\mathcal{Z}} = \gamma\, \lambda, \quad \text{avec} \quad \gamma(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2} \quad \text{et} \quad \lambda \text{ la mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^d.$$

Pour $\mathcal{Y}$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de loi ν, on rappelle que la fonction caractéristique $\varphi_{\mathcal{Y}}$ est définie comme étant la transformée de Fourier de ν, soit donc

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_{\mathcal{Y}}(\xi) := \mathbf{E}(e^{i\mathcal{Y}\cdot\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy\cdot\xi}\, \nu(dy) =: \hat{\nu}(\xi).$$

On remarquera que la définition de la transformée de Fourier ici est celle utilisée dans les chapitres de *probabilités*.

Soit $K \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On rappelle qu'il existe une matrice $R \in O(d)$ et une matrice Δ diagonale positive telle que $K = {}^t R \Delta R$. On note $\Delta^{1/2}$ la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_i}$, où les (λ_i) sont les coefficients diagonaux de Δ.

1) On pose $\mathcal{X} := {}^tR\,\Delta^{1/2}\mathcal{Z}$. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{\mathcal{X}}$.

2) En déduire l'existence d'une mesure de probabilité μ de $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\hat{\mu}(\xi) = \exp\big(-\frac{1}{2}\xi \cdot K\xi\big).$$

3) Exhiber une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que $\mu = \varphi_\sharp(\gamma\lambda)$.

Exercice 6 ($\sim$ 5 points). Sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne, $\mathbb{S}$ la sphère et $\mathbb{B}$ la boule définies par

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}, \quad \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}.$$

On rappelle que nous avons démontré durant l'épreuve de "partiel" qu'il existe une mesure borélienne ω sur $\mathbb{S}$ telle que la formule *de type Fubini-Tonelli*

$$\int_{\mathbb{B}} f\,dx = \int_0^1\!\!\int_{\mathbb{S}} f(rz)d\omega(z)r^{n-1}dr \tag{3}$$

est vraie pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

1) On fixe $\theta \in C^1(\mathbb{R})$, $\theta' \leq 0$, $\theta(t) = 1$ si $t \leq 0$, $\theta(t) = 0$ si $t \geq 1$. Montrer que pour $\Phi \in C_c(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \Phi(r)k\theta'\big(\frac{k}{2}(1-r^2)\big)\, r\,dr = -\Phi(1).$$

[Ind. On pourra, par exemple, effectuer le changement de variable $u := (1-r^2)/2$ et commencer par calculer l'intégrale de θ' sur $\mathbb{R}$].

2) On définit $d(x) := (1-|x|^2)/2$ et on fixe $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'application

$$r \mapsto \Phi_i(r) := r^{N-1}\int_{\mathbb{S}} \varphi(rz)z_i d\omega(z)$$

appartient à $C_c(\mathbb{R}_+)$. En déduire que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{B}} \varphi(x)x_i k\theta'(kd(x))\,dx = -\int_{\mathbb{S}} \varphi(z)z_i d\omega(z).$$

[Ind. On pensera à utiliser la formule (3)].

3) Pour $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x)\,dx = 0.$$

En déduire que pour $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[\theta(kd(x))]\,dx = -\int_{\mathbb{B}}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.$$

4) A l'aide des questions 3) et 4), montrer que

$$\int_{\mathbb{B}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \int_{\mathbb{S}} \varphi(z)z_i d\omega(z).$$

5) Etablir la *formule de Stokes* : si $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs de classe C^1 et à support compact, on a

$$\int_{\mathbb{B}} \mathrm{div}E\,dx = \int_{\mathbb{S}} E\cdot z\,d\omega(z),$$

où

$$\mathrm{div}E := \sum_{i=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(x), \quad E\cdot z := \sum_{i=1}^n E_i(z)\,z_i.$$