Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Partiel, Mardi 29 Octobre.
Durée : 2h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.** *Le barême est donné à titre* **indicatif**. *Afin de tenir compte de la longueur de l'énoncé, les questions les plus difficiles du dernier problème seront comptées en bonus.*

Exercice 1 ($\sim$ 4,5 points).

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée.
2) Déterminer la limite des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{\sin^2 n + nx^2}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+nx^2}\, dx$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)} dx$$

lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).

Exercice 2 ($\sim$ 2,5 points).
Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}.$$

On énoncera précisément les théorèmes utilisés. On pourra introduire la série de fonctions

$$\sum f_n(x), \quad f_n(x) := e^{-nx}.$$

Problème 3 ($\sim$ 7 points).

1) Enoncer précisément le théorème de Fubini-Tonelli. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d\lambda(x,y),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

2) Enoncer précisément le théorème de changement de variables. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta r dr.$$

3) En déduire que la mesure

$$\mu := g\lambda, \quad g(x) := (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2},$$

est une mesure de probabilité, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que les fonctions

$$G_1(y) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} \cos(yx)g(x)\,dx, \quad G_2(y) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} \sin(yx)g(x)\,dx,$$

sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et calculer G_1' et G_2'. En déduire que la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par $G(y) := G_1(y) + iG_2(y)$, est de classe C^1 et que

$$G'(y) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} xe^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

5) Montrer que

$$\int_{-A}^{A} xe^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx = iy\int_{-A}^{A} e^{ixy}e^{-x^2/2}\,dx + e^{-iAy}e^{-A^2/2} - e^{iAy}e^{-A^2/2},$$

pour tout $A > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$.

6) En déduire que $G'(y) = -yG(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\frac{d}{dy}(G(y)e^{y^2/2})$$

et en déduire que $G = g$.

Problème 4 ($\sim$ 6 points) Sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne, $\mathbb{S}$ la sphère unité et $\mathbb{B}$ la boule unité définies par

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}, \quad \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}.$$

On note $\mathscr{B}$ la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue définies sur $\mathbb{R}^n$ et de la même manière leurs restrictions à $\mathbb{B}$.

1) Montrer que

$$\mathcal{S} := \{C \cap \mathbb{S};\ C \in \mathscr{B}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{S}$.

2) On définit l'application

$$T : \mathbb{B}\backslash\{0\} \to \mathbb{S}, \quad x \mapsto T(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que $\omega := T_\sharp(n\lambda)$ est une mesure positive sur $(\mathbb{S}, \mathcal{S})$.
Pour $A \in \mathcal{S}$, on définit

$$C(A) := \{rx;\ r \in]0,1],\, x \in A\} \in \mathscr{B} \cap \mathbb{B}.$$

Montrer que

$$\omega(A) = n\lambda(C(A)), \quad \forall\, A \in \mathcal{S}.$$

3) Pour $A \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ et $\alpha \in]0,1[$, on définit

$$C_{\alpha,k}(A) := \{rx;\ \alpha^{k+1} < r \leq \alpha^k,\ x \in A\} \in \mathscr{B} \cap \mathbb{B}.$$

Pour $A \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ et $\alpha \in]0,1[$, montrer que $\lambda(C_{\alpha,k}(A)) = \alpha^{nk}\lambda(C_{\alpha,0}(A))$, puis que

$$\lambda(C(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(C_{\alpha,k}(A)) = (1-\alpha^n)^{-1}\lambda(C_{\alpha,0}(A)).$$

4) Pour $A \in \mathcal{S}$ et $0 < a < b < \infty$, on définit

$$C(A,a,b) := \{rz;\ a < r \leq b;\ z \in A\} \in \mathscr{B}.$$

Montrer que

$$\lambda(C(A,a,b)) = b^n\,\lambda(C_{a/b,0}(A)).$$

5) Déduire des questions précédentes que

$$\lambda(B) = (b^n - a^n)\frac{1}{n}\omega(A),$$

pour $B = C(A,a,b)$, $A \in \mathcal{S}$ et $0 < a < b < \infty$, puis que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\, d\lambda(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} \mathbf{1}_B(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr.$$

6) Conclure que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}} f(rz) d\omega(z) r^{n-1} dr,$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.