Université Paris Dauphine-PSL
L3 Mathématiques Appliquées
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen, 4 Janvier 2021.
Durée : 3h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.** *Le barème est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation.*

Exercice 1. (∼ 4 points). (1) En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$X_n := \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{(nx+1)(1+x^2)}\,dx, \quad Y_n := \int_0^\infty \frac{dy}{y^n+e^y}, \quad Z_n := \int_0^\infty \frac{n\ln(1+z/n)}{(1+z^2)^2}.$$

(2) Sans utiliser le théorème de convergence dominée, calculer les limites des suites d'intégrales suivantes

$$S_n := \int_0^\infty \Big(1+\frac{\sin(ns)}{n^2}\Big)^n \frac{ds}{1+s^{1+1/n}} \quad T_n := \int_0^1 \frac{t^{1/n}}{\sqrt{1-t}}dt.$$

(3) En le justifiant proprement, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}du = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k^3}.$$

(Ind. On pourra introduire la suite de fonctions $f_k(x) := e^{-kx}$).

Exercice 2. (∼ 2 points). Pour $n \geq 1$ entier et $a > 0$ réel, on définit le simplexe $\Sigma_n(a)$ et son volume $V_n(a)$ par

$$\Sigma_n(a) := \{x \in \mathbb{R}_+^n;\ x_1 + \cdots + x_n \leq a\}, \quad V_n(a) := \lambda_n(\Sigma_n(a)),$$

où λ_n désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. On note simplement $\Sigma_n := \Sigma_n(1)$, $V_n := V_n(1)$.

(a) Montrer que $V_n(a) = a^n V_n$ pour tout $n \geq 1$ et $a > 0$.

(b) Calculer directement V_1. Pour $n \geq 2$, établir l'équation

$$V_n = \int_0^1 V_{n-1}(1-x)dx.$$

En déduire une relation de récurrence entre V_n et V_{n-1}, puis la valeur de V_n en fonction de n.

Exercice 3. (∼ 6 points). Dans cet exercice, on considère l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0,\infty[$ muni de la tribu borélienne $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\lambda$. On note $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathscr{B}, \mathrm{d}x)$ l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables de carré intégrable. On note $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ l'espace des fonctions continues à support compact, c'est-à-dire, $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*)$ si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et il existe $a, b \in]0, \infty[$, $a < b$, tels que $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$.

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2$, alors la fonction $u \mapsto f(u)/u$ est intégrable sur $[a, \infty[$, pour tout réel $a > 0$, en particulier, on peut définir

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) := \int_x^\infty \frac{f(u)}{u}\, du. \tag{1}$$

Montrer que la fonction F est continue sur $]0, \infty[$.

(2) On commence par supposer que f appartient à $C_c(\mathbb{R}_+^*)$.

(a) Montrer que F est continument dérivable, nulle au voisinage de ∞, constante au voisinage de 0, donc en particulier $F \in C^1(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

(b) En observant que $xF' = -f$ et en utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^\infty (F(x))^2\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty F(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

(c) En déduire que

$$\|F\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2\|f\|_{\mathcal{L}^2}.$$

(3) Cette question est plus difficile et elle sera notée hors barème. On y montre deux résultats « de densité » (3b) et (3c) utiles dans la question (4).

(a) Soit (ρ_n) une suite régularisante qui est définie par $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ pour une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\rho \subset [-1, 1]$, $\rho \geq 0$, $\int \rho dx = 1$. Pour $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$, on pose $g_n := (g\, \mathbf{1}_{[2/n,n]}) * \rho_n$. Montrer que (g_n) est une suite de $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $g_n \to g$ en norme $\mathcal{L}^1$ lorsque $n \to \infty$ et telle que la suite $(\|g_n\|_{\mathcal{L}^\infty})$ est uniformément bornée dans $\mathbb{R}$. En déduire que $g_n \to g$ en norme $\mathcal{L}^2$ lorsque $n \to \infty$.

(b) Pour $f \in \mathcal{L}^2$, déduire de la question (a) qu'il existe une suite (f_k) de $C_c(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $f_k \to f$ en norme $\mathcal{L}^2$ lorsque $k \to \infty$.

(c) Soit $G \in \mathcal{L}^2$. Déduire de la question (b) que $G = 0$ p.p. si

$$\int_0^\infty G\, \varphi\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*).$$

(4) On revient au cas général $f \in \mathcal{L}^2$, et on note (f_k) la suite construite à la qiestion (3b).

(a) On note F_k la fonction associée à f_k par la relation (1). A l'aide de la question (2), montrer que (F_k) est une suite de Cauchy puis qu'il existe $\tilde{F} \in L^2$ tel que $F_k \to \tilde{F}$ en norme $\mathcal{L}^2$ lorsque $k \to \infty$.

(b) Pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+^*)$, on définit

$$\forall\, u > 0, \quad \Phi(u) := \frac{1}{u} \int_0^u \varphi(x)\, dx.$$

Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}^2$, puis que

$$\int_0^\infty F\varphi\, dx = \int_0^\infty f\Phi\, du \quad \text{et} \quad \int_0^\infty F_k\varphi\, dx = \int_0^\infty f_k\Phi\, du.$$

En déduire que

$$\int_0^\infty \tilde{F}\varphi\, dx = \int_0^\infty f\Phi\, du,$$

puis que $F \in \mathcal{L}^2$.

Exercice 4. ($\sim$ 5 point). Processus de branchement de Galton-Watson.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, pour toute var $X \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A})$, $p = 1$ ou 2, il existe une unique var $Y \in \mathcal{L}^p(\mathcal{B})$, notée $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$, telle que

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})Z) = \mathbf{E}(XZ), \quad \forall\, Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}).$$

(1) **Questions de cours.**

(a) Montrer que si X est $\mathcal{B}$-mesurable et Y est indépendante de $\mathcal{B}$ alors $\mathbf{E}(XY|\mathcal{B}) = X\mathbf{E}(Y)$.

(b) Montrer que si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C})$.

(c) Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X)$.

Dans la suite de cet exercice, on se donne $(\zeta_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi de probabilité μ supportée par $\mathbb{N}$ et telle que

$$q := \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mu(k) < \infty, \quad m := \sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k) > 1.$$

Soient (Y_n) et (X_n) les suites de va définies (par récurrence) par

$$Y_0 := 1, \quad Y_{n+1} := \sum_{k=1}^{Y_n} \zeta_{n,k}, \quad X_n := \frac{Y_n}{m^n},$$

et soit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Ici et dans la suite, on prend pour convention $\sum_{k=1}^{0} \zeta_{n,k} = 0$.

(2) Montrer que Y_n est indépendante de $(\zeta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ et

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y_n=r}) \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{r} \zeta_{n,k}) = \mathbf{E}(X_n).$$

(3) Montrer que

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{1}_{Y_n=r} \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{r} \zeta_{n,k}) = X_n.$$

(4) Montrer que

$$\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \frac{1}{m^{2n+2}} \mathbf{E}\Big(\sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{1}_{Y_n=r} \sum_{k,\ell=1}^{r} \zeta_{n,k}\zeta_{n,\ell}\Big) = \frac{1}{m^{2n+2}} \mathbf{E}\big(qY_n + m^2 Y_n(Y_n - 1)\big).$$

En déduire que

$$\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = \mathbf{E}(X_n^2) + \frac{q - m^2}{m^{n+2}},$$

puis par récurrence que

$$\sup_{n\geq 0} \mathbf{E}(X_n^2) \leq \frac{q - m}{m^2 - m}.$$

(5) Pour $m > n$, en utilisant plusieurs fois (1b) et (3), montrer que

$$\mathbf{E}((X_m - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_m^2|\mathcal{F}_n) - X_n^2,$$

et à l'aide de (1c), en déduire

$$\mathbf{E}(X_m^2) - \mathbf{E}(X_n^2) = \sum_{k=n}^{m-1} \mathbf{E}((X_{k+1} - X_k)^2) = \mathbf{E}((X_m - X_n)^2).$$

(6) Montrer que (X_n) est une suite convergente dans $\mathcal{L}^2$.

Exercice 5 - régularité de la mesure de Lebesgue ($\sim$ 3 points) On note $\mathscr{B}([0,1])$ la tribu borélienne sur $[0,1]$ que l'on munit de la mesure de Lebesgue λ. L'objectif de cet exercice est de montrer la propriété suivante : pour tout borélien $B \in \mathscr{B}([0,1])$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvet $\mathcal{O}$ tels que

$$K \subset B \subset \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \lambda(\mathcal{O} \backslash K) < \varepsilon. \tag{2}$$

Dans ce but, on définit l'ensemble de parties

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathscr{B}([0,1]);\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \text{ compact}, \mathcal{O} \text{ ouvert verifiant } (2)\}$$

et l'algèbre $\mathcal{A}$ induite par les intervalles semi-fermés de $[0,1]$: $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i := [a_i, b_i[,\ I_n = \emptyset \text{ ou } I_n = \{1\},$$

avec $n \geq 1$, $a_i, b_i \in [0,1]$, $a_i < b_i < a_{i+1}$.

1) Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.
2) On montre dans cette question que $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante. Pour cela, on considère une suite croissante (C_n) de $\mathcal{C}$ et on note $C := \cup_{j \geq 1} C_j$. On fixe $\varepsilon > 0$.
   - Montrer que $C \in \mathscr{B}([0,1])$.
   - Montrer qu'il existe $N \geq 1$ tel que $\lambda(C \backslash C_N) < \varepsilon/2$ et montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $\mathcal{O}_n$ ouvert de $[0,1]$ tel que $C_n \subset \mathcal{O}_n$ et $\lambda(\mathcal{O}_n \backslash C_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. En déduire que $C \in \mathcal{C}$.
3) Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par limite décroissante.
4) En déduire que $\mathcal{C} = \mathscr{B}([0,1])$.