Université Paris Dauphine-PSL
L3 Mathématiques Appliquées
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Examen de rattrapage, 22 Juin 2021.
Durée : 3h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés. Il est préférable de bien traiter quelques exercices plutôt que de survoler tous les exercices.** *Le barème est donné à titre* **indicatif** *et prendra en compte cette dernière recommandation. Afin de tenir compte de la longueur de l'énoncé, les questions notées d'une $*$ seront comptées hors barème (en bonus).*

Exercice 1. ($\sim$ 1 point).

(1) Donner un exemple de suite (f_n) de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $f_n \geq 0$, $\|f_n\|_1 = 1$, $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to 0$ p.p. lorsque $n \to \infty$.

(2) Donner un exemple de suite (f_n) de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $f_n \geq 0$, $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\|f_n\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Donner un exemple de suite (f_n) de $\mathcal{L}^1([0,1])$ telle que $f_n \geq 0$, $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $f_n \to 0$ p.p. lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. ($\sim$ 3 points).

1) Enoncer précisément les théorèmes de convergence monotone, de Fatou et de convergence dominée.

2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$X_n := \int_0^\infty \frac{dx}{nx^n + \sqrt{x}}, \quad Y_n := \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+ny^2}\, dy, \quad Z_n := \int_0^\infty \frac{n+\sin(nz)}{1+nz^3} dz$$

sont-elles bien définies ?

3) Déterminer la limite des intégrales X_n, Y_n et Z_n lorsque n tend vers l'infini en utilisant une fois et une seule fois chacun des trois théorèmes énoncés à la question 1).

Exercice 3. ($\sim$ 3 points). Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

(1) Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Montrer que

$$\forall\, t > 0, \quad \frac{\sin t}{t} = \int_0^1 \cos(tu) du.$$

(3) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re ez > 0$, on a

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z},$$

en justifiant bien les deux égalités.

(4) Montrer que

$$\forall\, x > 0, \quad \Re e\int_0^1 \frac{du}{x-iu} = \arctan(1/x).$$

(5) Enoncer proprement le théorème de Fubini. En déduire une expression simple (pas sous une forme intégrale) de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 4. ($\sim$ 3 points). (1) Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^4}\,dx.$$

(2) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{du}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\Big).$$

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I := \int_{\mathbb{R}_+^2}\frac{xy}{x^2+y^2}e^{-(x^4+y^4)}\,dxdy.$$

(Ind. On pourra penser à effectuer le changement de variables $(x,y) = (r\sqrt{\cos\theta}, r\sqrt{\sin\theta})$).

(4*) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx \geq \sqrt{2I}.$$

Exercice 5. ($\sim$ 5,5 points). Soit $(E,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré, **de mesure** $\mu(E)$ **finie**, $p \in]1,2[$ et $q := p/(p-1)$. On rappelle que pour tout $r \in [1,\infty]$, l'espace de Lebesgue $L^r = L^r(E,\mathscr{A},\mu)$ est muni de la norme

$$\|u\|_r := \Big(\int_E |f(x)|^r\,d\mu(x)\Big)^{1/r} \quad \text{si } r < \infty, \quad \|u\|_\infty := \operatorname*{supess}_{x\in E}|f(x)|.$$

On dit que que Λ appartient à l'espace dual $(L^p)' := \mathcal{L}(L^p,\mathbb{R})$ de L^p, si $\Lambda : L^p \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue sur L^p, soit donc

$$\forall\, f_1, f_2 \in L^p,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \Lambda(f_1+\lambda f_2) = \Lambda(f_1)+\lambda\Lambda(f_2),$$
$$\exists\, C,\quad \forall\, f\in L^p,\quad |\Lambda(f)| \leq C\,\|f\|_p.$$

(1) Pour $g \in L^q$, montrer que
$$(\Lambda_g)(u) := \int_E ugd\mu$$
est défini pour tout $u \in L^p$, puis que $\Lambda_g \in (L^p)'$.

L'objectif de cet exercice est de montrer la réciproque : pour tout $\Lambda \in (L^p)'$, il existe $g \in L^q$ telle que $\Lambda = \Lambda_g$.

(2) Montrer que $L^\infty \subset L^2 \subset L^p \subset L^1$.

Si $u : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$(T_n u)(x) = \max(-n, \min(n, u(x))),$$
pour tout $x \in E$.

(3) Soit $u \in L^p$. Montrer que $T_n u \in L^2$ et que $T_n u \to u$ au sens de la norme L^p. Cela montre que L^2 est dense dans L^p.

Soit $\Lambda : L^p \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. On note
$$\|\Lambda\|_{(L^p)'} := \sup_{u \in L^p;\, \|u\|_{L^p} \leq 1} |\Lambda(u)| < \infty,$$
la norme de Λ dans l'espace dual $(L^p)' := \mathcal{L}(L^p, \mathbb{R})$.

(4) Montrer que la restriction de Λ à L^2 est une forme linéaire continue de L^2, en particulier qu'il existe une constante $C \in]0, \infty[$ telle que
$$\forall\, v \in L^2, \quad |\Lambda(v)| \leq C\|v\|_2.$$

(5) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ telle que
$$\forall\, v \in L^2, \quad \Lambda(v) = \int_E vgd\mu.$$

(6) On note $u_n := T_n(|g|^{q-2}g)$. Montrer que $gu_n \geq T_n(|g|^q)$, puis que
$$\int_E |u_n|^p d\mu \leq \int_E u_n g d\mu.$$
En déduire que
$$\|u_n\|_p^{p-1} \leq \|\Lambda\|_{(L^p)'}.$$

(7) En déduire que $g \in L^q$ et que $\|g\|_q \leq \|\Lambda\|_{(L^p)'}$

(8) Montrer que
$$\forall\, u \in L^p, \quad \Lambda(u) = \int_E ugd\mu.$$

(9*) Montrer que $\|g\|_q = \|\Lambda\|_{(L^p)'}$ et conclure que l'application
$$\Pi : L^q \to (L^p)', \quad g \mapsto \Lambda_g,$$
est une isométrie.

Exercice 6. (∼ 4,5 points). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, pour toute var $X \in \mathcal{L}^p(\mathcal{A})$, $p = 1$ ou 2, il existe une unique var $Y \in \mathcal{L}^p(\mathcal{B})$, notée $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$, telle que

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})Z) = \mathbf{E}(XZ), \quad \forall\, Z \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}).$$

(1) **Questions de cours.**

(a) Montrer que si X est $\mathcal{B}$-mesurable et Y est indépendante de $\mathcal{B}$ alors $\mathbf{E}(XY|\mathcal{B}) = X\mathbf{E}(Y)$.

(b) Montrer que si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C})$.

Comme $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ est $\mathcal{C}$ mesurable, on peut appliquer (a) et cela implique $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$.

(c) Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X)$.

On considère désormais une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de va de $\mathcal{L}^2$ telle que

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad \forall\, n \geq 1, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

(2) Pour $m > n$, montrer que

$$\mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad \mathbf{E}((X_m - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_m^2|\mathcal{F}_n) - X_n^2,$$

et en déduire

$$\mathbf{E}(X_m^2) - \mathbf{E}(X_n^2) = \sum_{k=n}^{m-1} \mathbf{E}((X_{k+1} - X_k)^2) = \mathbf{E}((X_m - X_n)^2).$$

(3) Pour $\varepsilon > 0$, on définit la famille d'événements (A_ℓ), $1 \leq \ell \leq n$, par

$$A_1 := \{|X_1| \geq \varepsilon\}, \quad A_\ell := \{|X_1| < \varepsilon, \ldots, |X_{\ell-1}| < \varepsilon, |X_\ell| \geq \varepsilon\}, \ \ell \geq 2.$$

Montrer que

$$\mathbf{E}(X_n^2 \mathbf{1}_{A_\ell}) = \mathbf{E}((X_n - X_\ell)^2 \mathbf{1}_{A_\ell}) + \mathbf{E}(X_\ell^2 \mathbf{1}_{A_\ell}) \geq \varepsilon^2 \mathbf{P}(A_\ell).$$

En déduire que

$$\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}(X_n^2).$$

A partir de maintenant, on suppose de plus que

$$\sup_{n\geq 0} \mathbf{E}(X_n^2) < \infty.$$

(4) En utilisant la question (1), montrer que (X_n) est une suite convergente dans $\mathcal{L}^2$.

(5*) Pourquoi peut-on affirmer que

$$\mathbf{P}(\max_{n\leq k\leq m} |X_k - X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}((X_m - X_n)^2)?$$

Déduire de la question (3) qu'il existe n_p tel que

$$\mathbf{P}(\sup_{k\geq n_p} |X_k - X_{n_p}| \geq \varepsilon) \leq 2^{-p}.$$

En déduire que p.s. il existe $p \geq 1$ tel que

$$\sup_{k\geq n_p} |X_k - X_{n_p}| < \varepsilon,$$

et en conclure que p.s. la suite (X_n) est convergente.