Université Paris Dauphine
L3 MI2E
Intégrale de Lebesgue et Probabilités

Partiel, Mardi 29 Octobre.
Durée : 2h.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse.* **Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront clairement être énoncés.** *Le barême est donné à titre* **indicatif**.

Exercice 1 - Autour de la constante γ d'Euler ($\sim$ 5 points).

1) On définit
$$\gamma_n := \Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)-\ln n.$$
Trouver un équivalent de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$ lorsque $n\to\infty$ et en déduire que (γ_n) converge vers une constante $\gamma\in\mathbb{R}$.

2) Montrer que
$$\gamma_n = \int_1^n \Big(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\Big)dx+\frac{1}{n},$$
où $[x]$ désigne la partie entière de x. En déduire que
$$\gamma = \int_1^\infty \Big(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\Big)dx,$$
et en particulier que $\gamma>0$.

3) Montrer que
$$\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n \le e^{-x},\quad \forall\, x\in[0,n],$$
et en déduire que
$$a_n := \int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n \ln x\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-x}\ln x\, dx.$$

4) En posant $x=n(1-y)$, montrer que
$$a_n = \frac{n}{n+1}\ln n + nb_n,\quad \text{où}\quad b_n := \int_0^1 y^n \ln(1-y)\, dy.$$
Démontrer que
$$b_n = -\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \frac{y^{n+k}}{k}\, dy.$$
En observant que
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(n+k+1)} = \frac{1}{n+1}\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^K\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k+1}\Big) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j},$$
en déduire que
$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x}\ln x\, dx.$$

Exercice 2 ($\sim$ 5 points). Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\alpha > 0$, on définit l'ensemble

$$K_\alpha := \{x, y > 0;\ x^\alpha + y^\alpha < 1\}.$$

1) Démontrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \lambda(K_\alpha) = 1.$$

2) Dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{K_\alpha} d\lambda,$$

effectuer le changement de variables $(r, \theta) \mapsto (r(\cos\theta)^{2/\alpha}, r(\sin\theta)^{2/\alpha})$.

3) En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi (\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha}-1}\, d\theta.$$

Exercice 3 ($\sim$ 5 points).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (en tout point) de dérivée f' bornée. On fixe $x < y$ deux réelles, et notre objectif est de démontrer le théorème fondamental de l'analyse :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, dt,$$

où l'intégrale est définie au sens de Lebesgue (et dt désigne donc la mesure de Lebegue).

1) Pourquoi f est-elle mesurable ? Pour une suite (h_n) de $\mathbb{R}$ telle que $h_n \to 0$, on définit la suite de fonctions (g_n) par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) := \frac{1}{h_n}(f(t + h_n) - f(t)).$$

Montrer que f' est mesurable. Pourquoi a-t-on

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |g_n(t)| \ \leq C,$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+$?

2) Montrer d'une part que

$$\lim_{n \to \infty} \int_x^y g_n(t)\, dt = \int_x^y f'(t)\, dt.$$

3) Montrer d'autre part que

$$\int_x^y g_n(t)\, dt = \frac{1}{h_n}\Big\{ \int_y^{y+h_n} f(s)\, ds - \int_x^{x+h_n} f(t)\, dt\Big\},$$

puis que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h_n}\Big\{ \int_y^{y+h_n} f(s)\, ds - \int_x^{x+h_n} f(t)\, dt\Big\} = f(y) - f(x).$$

Exercice 4 - « régularité » de la mesure de Lebesgue ($\sim$ 5 points) On note $\mathscr{B}([0,1])$ la tribu borélienne sur $[0,1]$ que l'on munit de la mesure de Lebesgue λ. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre induite par les intervalles de $[0,1]$: $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i),$$

où (a_i, b_i) désigne un intervalle (ouvert, fermé ou semi-fermé) de $[0,1]$. On rappelle que pour $A, B \in \mathscr{B}([0,1])$, on note

$$A \Delta B := (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

la différence symétrique de A et B. On définit enfin l'ensemble de parties

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathscr{B}([0,1]);\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A},\ \lambda(C \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

1) Observer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.
2) On montre dans cette question que $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante. Pour cela, on considère une suite croissante (C_n) de $\mathcal{C}$ et on note $C := \cup_{j \geq 1} C_j$. On fixe $\varepsilon > 0$.
   - Montrer que $C \in \mathscr{B}([0,1])$.
   - Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda(C \backslash C_n) < \varepsilon/2$ et qu'il existe $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(C_n \Delta A_n) < \varepsilon/2$. En déduire
   $$\lambda(C \Delta A_n) < \varepsilon.$$
   - Conclure que $C \in \mathcal{C}$.
3) Montrer que $\mathcal{C}$ est stable par limite décroissante.
4) En déduire que $\mathcal{C} = \mathscr{B}([0,1])$.

   On rappelle que l'on dit que $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une <u>fonction en escalier</u> si elle est de la forme
   $$g(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \, \mathbf{1}_{(a_j, b_j)},$$
   où les intervalles (ouverts, fermés ou semi-fermés) (a_j, b_j) forment une partition de $[0,1]$ et $\alpha_j \in \mathbb{R}$.
5) Etablir que pour tout $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, il existe une suite (f_n) de <u>fonctions en escalier</u> telle que
   $$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} \to 0.$$