

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOGENÉISATION

Ho Valérie
Rapport de stage de L3 encadré par Sylvain Wolf
Année universitaire 2019/2020

Table des matières

1	Convergence vers un problème homogénéisé	1
1.1	Préliminaires	2
1.2	Théorème de convergence	4
2	Etude numérique	5
2.1	Introduction	5
2.2	Résultats numériques	7
2.2.1	Convergence uniforme de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$	7
2.2.2	Comportement asymptotique de (u'_ε)	9
2.2.3	Convergence du schéma à ε fixé	10
3	Présentation des techniques d'homogénéisation	10
3.1	Développement à deux échelles	10
3.2	Convergence des dérivées	13
4	Conclusion	13

Introduction

La théorie de l'homogénéisation s'est développée à partir des années 1970 et a pour vocation de décrire mathématiquement les systèmes multi-échelles, c'est-à-dire des systèmes faisant intervenir au moins une échelle macroscopique (typiquement d'ordre 1) et une échelle microscopique (d'ordre $\varepsilon \ll 1$). Cela concerne en particulier les matériaux composites, composés d'au moins deux substances intimement liées, par exemple un corps principal dans lequel sont réparties des particules dont la taille est très petite devant la taille caractéristique du milieu. L'homogénéisation s'applique à l'étude d'équations à coefficients oscillants, oscillations dues aux hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique, comme par exemple l'équation de la chaleur stationnaire dans un milieu macroscopique dont la conductivité évolue à l'échelle microscopique. L'objet de l'homogénéisation est, dans ce type de situation, de proposer une équation dite *homogénéisée*, généralement plus simple, décrivant le comportement de la solution de l'équation lorsque l'échelle microscopique ε tend vers 0. On pourra ainsi obtenir une approximation en ε de la solution.

Au cours de ce stage, nous nous intéressons à un problème aux limites monodimensionnel. Pour ε petit, notons u_ε la fonction définie de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où a est une fonction 1-périodique supposée $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et strictement positive. On a donc :

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < c_1 < a(x) < c_2$$

On suppose que f est $\mathcal{C}^1([0, 1])$, de sorte que u_ε existe et est $\mathcal{C}^1(]0, 1[)$. Nous étudions le comportement de la suite (u_ε) et cherchons à caractériser sa limite quand ε tend vers 0. On note cette limite u_\star . Une des questions centrales auxquelles nous cherchons à répondre est notamment le mode de convergence de (u_ε) vers u_\star .

1 Convergence vers un problème homogénéisé

Nous introduisons tout d'abord quelques éléments de topologie faible et le théorème d'Ascoli-Arzelà, qui nous seront utiles dans l'étude du comportement asymptotique de (u_ε) .

1.1 Préliminaires

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(0, 1)$. On dit que (u_n) converge faiblement dans $L^2(0, 1)$ vers la fonction $u \in L^2(0, 1)$ si pour toute fonction ϕ dans $L^2(0, 1)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_n(x) \phi(x) dx = \int_0^1 u(x) \phi(x) dx.$$

On note : $u_n \rightharpoonup u$

Proposition 1. Soit $a \in L^2(0, 1)$. On prolonge a par 1-périodicité. Alors $a\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle a \rangle$, où :

$$\langle a \rangle := \int_0^1 a(x) dx.$$

$\langle a \rangle$ est appelée moyenne de a .

Démonstration. [1] p.41

Soit $\phi \in L^2(0, 1)$.

On veut montrer que :

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\int_0^1 a(t) dt \right) \phi(x) dx \quad (2)$$

On procède de la manière suivante : on prouve d'abord ce résultat quand ϕ est une fonction caractéristique. On étendra ensuite ce résultat aux fonctions étagées, puis on conclura par densité des fonctions étagées dans $L^2(0, 1)$.

Soient $\alpha, \beta \in (0, 1)$ et $\phi(x) := \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$. On doit prouver que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\beta - \alpha) \int_0^1 a(x) dx \quad (3)$$

En faisant un changement de variable, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \int_{\frac{\alpha}{\varepsilon}}^{\frac{\beta}{\varepsilon}} a(y) dy$$

En utilisant la 1-périodicité de a , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx &= \varepsilon \left(\left\lfloor \frac{\beta}{\varepsilon} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha}{\varepsilon} \right\rfloor - 1 \right) \langle a \rangle + \varepsilon \int_{\frac{\alpha}{\varepsilon}}^{\left\lfloor \frac{\alpha}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} a(y) dy + \varepsilon \int_{\left\lfloor \frac{\beta}{\varepsilon} \right\rfloor}^{\frac{\beta}{\varepsilon}} a(y) dy \\ &\leq (\beta - \alpha) \langle a \rangle + 2\varepsilon |\langle a \rangle| \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{\alpha}^{\beta} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = (\beta - \alpha) \langle a \rangle + O(\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient (3).

On peut ensuite étendre (3) par linéarité aux fonctions étagées.

Enfin, on utilise la densité des fonctions étagées dans $L^2(0, 1)$. Soit $\phi \in L^2(0, 1)$. Pour tout $\eta > 0$, il existe ψ , une fonction étagée telle que $\|\phi - \psi\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\eta}{2\|a\|_{L^2(0,1)}}$. On a :

$$\left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \phi(x) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) (\phi(x) - \psi(x) + \psi(x)) dx \right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \phi(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left| a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right| |\phi(x) - \psi(x)| dx + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right|$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\int_0^1 \left| a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right| |\phi(x) - \psi(x)| dx + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right| \leq \left(\varepsilon \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} |a(y) - \langle a \rangle|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi - \psi\|_{L^2(0,1)} + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right|$$

On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} |a(y) - \langle a \rangle|^2 dy &\leq \varepsilon \int_0^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} |a(y) - \langle a \rangle|^2 dy \\ &\leq \varepsilon \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \|a - \langle a \rangle\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq \varepsilon \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil 4 \|a\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

qui est une quantité bornée par une constante que l'on note M .

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right| |\phi(x) - \psi(x)| dx + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right| &\leq \sqrt{M} \|\phi - \psi\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right| \end{aligned}$$

Comme ψ est étagée, le deuxième terme du membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Donc : $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon < \delta, \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \psi(x) dx \right| < \frac{\eta}{2}$.

On a donc montré que :

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall \varepsilon < \delta, \left| \int_0^1 \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \langle a \rangle \right) \phi(x) dx \right| \leq \eta$$

Ce qui montre (2) pour tout $\phi \in L^2(0, 1)$. D'où :

$$a\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle a \rangle$$

□

Définition 2. Soit (E, d) un espace métrique et (F, δ) un espace métrique. Une partie $A \subset \mathcal{C}(E, F)$ est dite équicontinue si :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall y \in E, (d(x, y) \leq \eta) \implies (\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Définition 3. Soit X un espace métrique. Une partie $Y \subset X$ est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Théorème 1 (Ascoli-Arzelà). [2] p.25 Soient K un espace métrique compact et J un espace métrique complet. Soit une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K, J)$ telle que :

- \mathcal{A} est équicontinue
- Pour tout x dans K , l'ensemble $\mathcal{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans J .

Alors \mathcal{A} est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(K, J), \|\cdot\|_\infty)$. Autrement dit, de toute suite de fonctions de \mathcal{A} , on peut extraire une sous-suite uniformément convergente.

Lemme 1. Toute famille de fonctions équilipschitzienne est équicontinue.

Démonstration. Soit A une famille de fonctions équilipschitzienne de $\mathcal{C}(E, F)$, i.e :

$$\exists M > 0, \forall x, y \in E, \forall f \in A \mid \delta(f(x), f(y)) < Md(x, y)$$

Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$, on a que :

$$\forall x, y \in E, \forall f \in A, (d(x, y) \leq \eta) \implies (\delta(f(x), f(y)) < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon)$$

Ce qui montre que A est équicontinue. □

1.2 Théorème de convergence

Nous sommes maintenant en mesure de revenir au problème défini par (1) et nous pouvons caractériser la convergence de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \frac{du_\star}{dx} \right) = f \\ u_\star(0) = u_\star(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

où u_\star est supposée $\mathcal{C}^2(0, 1)$. Cette équation est appelée *équation homogénéisée*.

Théorème 2 (Modes de convergence de la suite (u_ε)).

(i) (u'_ε) converge faiblement dans $L^2(0, 1)$ vers $u'_\star : x \mapsto -(\lambda + F(x))\langle \frac{1}{a} \rangle$, solution de l'équation (4).

(ii) $\|u_\varepsilon - u_\star\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

Démonstration. (i) f est supposée $\mathcal{C}^1([0, 1])$. En intégrant (1), on obtient :

$$\begin{aligned} -a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u'_\varepsilon(x) &= F(x) + \lambda_\varepsilon \\ -u'_\varepsilon(x) &= \frac{F(x) + \lambda_\varepsilon}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)} \end{aligned} \quad (5)$$

où F est une primitive de f et λ_ε est une constante dépendant de ε , donnée par les conditions au bord. En intégrant (5) entre 0 et 1, on obtient :

$$0 = \lambda_\varepsilon \int_0^1 \frac{dx}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)} + \int_0^1 \frac{F(x)}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)} dx$$

D'où :

$$\lambda_\varepsilon = - \frac{\int_0^1 \frac{F(x) dx}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)}}{\int_0^1 \frac{dx}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)}}$$

Comme la fonction a est 1-périodique, il en est de même pour $\frac{1}{a}$. On peut donc appliquer la Proposition 1 à $\frac{1}{a}$. On a donc :

$$\lambda_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\int_0^1 F(x) \langle \frac{1}{a} \rangle dx}{\int_0^1 \langle \frac{1}{a} \rangle dx} =: \lambda \quad (6)$$

En appliquant dans (5) la proposition 1 à $\frac{1}{a}$, on obtient donc :

$$\forall \phi \in L^2(0, 1), \int_0^1 (\lambda_\varepsilon + F(x)) \frac{1}{a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)} \phi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (\lambda + F(x)) \langle \frac{1}{a} \rangle \phi(x) dx$$

Soit $-u'_\star := (\lambda + F(x))\langle \frac{1}{a} \rangle$. En divisant par $\langle \frac{1}{a} \rangle$ et en dérivant, on obtient que u_\star vérifie :

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \frac{du_\star}{dx} \right) = f$$

(ii) Etape 1 : Montrons que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ admet une valeur d'adhérence dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Montrons pour cela que (u_ε) vérifie toutes les hypothèses du théorème d'Ascoli Arzela. On a :

$$\forall x \in [0,1], |u'_\varepsilon(x)| = \left| \frac{\lambda_\varepsilon + F(x)}{a(\frac{x}{\varepsilon})} \right| < \frac{C}{c_1} + \frac{\|F\|_\infty}{c_1},$$

où C est une constante telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\lambda_\varepsilon| \leq C$ (cette constante existe car $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge). On en conclut que :

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], |u'_\varepsilon(x)| \leq M$ où M est une constante indépendante de x et ε .

Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall x, y \in [0,1], |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq \|u'_\varepsilon\|_\infty |x - y| \quad (7)$$

Ce qui montre que (u_ε) est équicontinue. Donc, d'après le lemme 1, (u_ε) est équicontinue. De plus, en prenant $y = 0$ dans (7), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], |u_\varepsilon(x)| \leq \|u_\varepsilon\|_\infty |x| \leq \|u_\varepsilon\|_\infty$$

Comme (u_ε) est à valeurs dans \mathbb{R} donc dans un espace de dimension finie, cela équivaut à dire que pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $\{u_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$ est relativement compact.

Les deux hypothèses du théorème d'Ascoli-Arzela sont donc vérifiées. On en déduit qu'il existe une sous-suite (u_{ε_n}) et un élément v de $\mathcal{C}([0,1])$ tels que $\|u_{\varepsilon_n} - v\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

Etape 2 : Montrons que (u_ε) converge simplement vers u_\star .

D'après la proposition 2, $u'_\varepsilon \rightharpoonup u'_\star$. D'où :

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^1 u'_\varepsilon(t) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 u'_\star(t) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) dt = u_\star(x)$$

En particulier, (u_{ε_n}) converge simplement vers u_\star . Or, d'après l'étape 1, on a que (u_{ε_n}) converge uniformément, donc simplement vers v , donc $u_\star = v$.

Etape 3 : Montrons que toute la suite (u_ε) converge uniformément vers u_\star .

Supposons par l'absurde que (u_ε) ne converge pas uniformément vers u_\star . Autrement dit :

$$\exists \alpha > 0, \forall \eta \in (0,1), \exists \varepsilon < \eta, \|u_\varepsilon - u_\star\|_\infty > \alpha$$

Soit (ε_n) une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\varepsilon_n} - u_\star\|_\infty > \alpha \quad (8)$$

Or, toutes les hypothèses du théorème d'Ascoli s'appliquent encore à (u_{ε_n}) . Donc on peut extraire une sous-suite de (u_{ε_n}) , que l'on note $(u_{\varepsilon_{n_k}})$, qui converge uniformément vers une limite notée w . $(u_{\varepsilon_{n_k}})$ vérifie l'inégalité (8). En passant à la limite, on a alors :

$$\|w - u_\star\|_\infty > \alpha.$$

Donc il existe $x \in (0,1)$ tel que $w(x) \neq u_\star(x)$. Or, (u_ε) converge simplement vers u_\star , donc toute sous-suite de (u_ε) converge simplement vers u_\star . Ceci est donc une contradiction.

Conclusion : (u_ε) converge uniformément vers u_\star lorsque ε tend vers 0. \square

2 Etude numérique

2.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette partie aux aspects numériques de la résolution de (1). Nous cherchons à vérifier numériquement les résultats du Théorème 2 sur un exemple. Pour approximer la solution (u_ε) , approxime successivement les dérivées par leur taux d'accroissement. On approche la valeur de la solution en un nombre fini de points. On discrétise d'abord l'intervalle $[0,1]$ en le divisant en N intervalles de taille $h := \frac{1}{N}$. Les points du maillage ainsi créé sont donc définis de la manière suivante :

$$x_i = ih, i \in \{0, \dots, N\} \quad (9)$$

Soit $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Notons U_ε^i la valeur de u_ε au point x_i . On approxime la valeur de $u'_\varepsilon(x_{i-\frac{1}{2}})$ par le taux d'accroissement de u_ε entre $x_{i+\frac{1}{2}}$ et $x_{i-\frac{1}{2}}$:

$$u'_\varepsilon(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{u_\varepsilon(x_i) - u_\varepsilon(x_{i-1})}{h} = \frac{U_\varepsilon^i - U_\varepsilon^{i-1}}{h}$$

On a également :

$$u'_\varepsilon(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{u_\varepsilon(x_{i+1}) - u_\varepsilon(x_i)}{h}$$

Les conditions aux bords imposent :

$$U_\varepsilon^0 = U_\varepsilon^N = 0$$

On approxime $(a(\frac{x}{\varepsilon})u'_\varepsilon(x))'$ au point x_i :

$$\begin{aligned} -(a(\frac{x}{\varepsilon})u'_\varepsilon(x))'(x_i) &\approx \frac{a(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\varepsilon})u'_\varepsilon(x_{i+\frac{1}{2}}) - a(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon})u'_\varepsilon(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} \\ &= a(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) \frac{U_\varepsilon^{i+1} - U_\varepsilon^i}{h^2} - a(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) \frac{U_\varepsilon^i - U_\varepsilon^{i-1}}{h^2} \\ &= \frac{U_\varepsilon^{i+1}}{h^2} a(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) - \frac{U_\varepsilon^i}{h^2} \left(a(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) + a(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) \right) + \frac{U_\varepsilon^{i-1}}{h^2} a(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Matriciellement, le problème (1) s'écrit :

$$A_\varepsilon^h U_\varepsilon^h = F^h \tag{10}$$

où

$$A_\varepsilon^h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\left(a(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) + a(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon})\right) & a(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}) & 0 & & 0 \\ a(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}) & & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & a(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) \\ 0 & 0 & a(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) & -\left(a(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon}) + a(\frac{x_{N-\frac{3}{2}}}{\varepsilon})\right) & \end{pmatrix}$$

$$U_\varepsilon^h = \begin{pmatrix} U_\varepsilon^1 \\ U_\varepsilon^2 \\ \vdots \\ U_\varepsilon^{N-1} \end{pmatrix}, \quad F^h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Notons que la matrice A_ε^h est tridiagonale. Pour déterminer U_ε^h , il suffit donc de résoudre le système linéaire tridiagonal (10).

Proposition 2. *La matrice A_ε^h est symétrique définie négative.*

Démonstration. Soit $X \in \mathbb{R}^{N-1}$, de composantes X_1, X_2, \dots, X_{N-1} . On a :

$$\begin{aligned}
{}^t X A_\varepsilon^h X &= \sum_{i=1}^{N-1} X_i (A_\varepsilon^h X)_i \\
&= X_1 \left(- \left(a \left(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) + a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) \right) X_1 + a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) X_2 \right) \\
&+ X_2 \left(X_1 a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) - \left(a \left(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) + a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) \right) X_2 + a \left(\frac{x_{\frac{5}{2}}}{\varepsilon} \right) X_3 \right) + \dots \\
&+ X_{N-1} \left(X_{N-2} a \left(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) - X_{N-1} \left(a \left(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) + a \left(\frac{x_{N-\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) \right) \right) \\
&= -a \left(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) X_1^2 + a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) (-X_1^2 + 2X_2 X_1 - X_2^2) + \dots - X_{N-1}^2 a \left(\frac{x_{N-\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) \\
&= -a \left(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) X_1^2 - a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) (X_1 - X_2)^2 + \dots - X_{N-1}^2 a \left(\frac{x_{N-\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

Soit $X \in \mathbb{R}^{N-1}$ tel que :

$${}^t X A_\varepsilon^h X = 0$$

i.e.

$$-a \left(\frac{x_{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \right) X_1^2 - a \left(\frac{x_{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) (X_1 - X_2)^2 + \dots - X_{N-1}^2 a \left(\frac{x_{N-\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \right) = 0$$

Comme a est minorée par une constante positive, cela implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \\ \vdots \\ X_{N-2} - X_{N-1} = 0 \\ X_{N-1} = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, X_i = 0$$

Donc A_ε^h est définie négative. □

Cela implique que A_ε^h est inversible.

2.2 Résultats numériques

Les codes Python correspondants se trouvent en Annexe.

2.2.1 Convergence uniforme de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

Dans l'équation (1), on choisit :

$$f \equiv 1$$

et

$$a : x \mapsto 2 + \cos(2\pi x).$$

Nous implémentons en Python le schéma d'approximation précédemment décrit appliqué au problème (1) avec ce choix de fonctions. Nous traçons ensuite le graphe de l'approximation de (u_ε) auquel on adjoint le graphe de u_\star , dont l'expression est obtenue par intégration de (4), on obtient la Figure 1. On trace également $\|U_\varepsilon - u_\star\|_\infty$ en fonction de ε (Figure 2). On constate alors que (U_ε) converge uniformément vers u_\star quand ε tend vers 0, ce qui est cohérent avec le Théorème 2. On cherche ensuite à dégager l'ordre de convergence de (U_ε) vers u_\star . Pour cela, on trace le graphe de la Figure 2 en échelle log-log et on effectue une régression linéaire (Figure 3). La pente de la droite obtenue par régression linéaire est proche de 1, ce qui suggère que l'ordre de convergence de (U_ε) vers u_\star en norme infinie est 1.

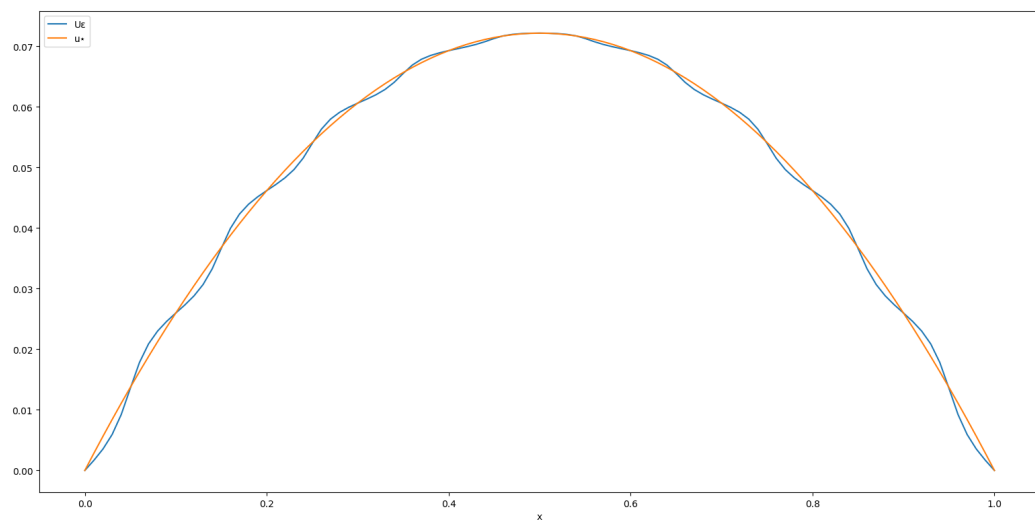


FIGURE 1 – Graphes de U_ϵ et u_*

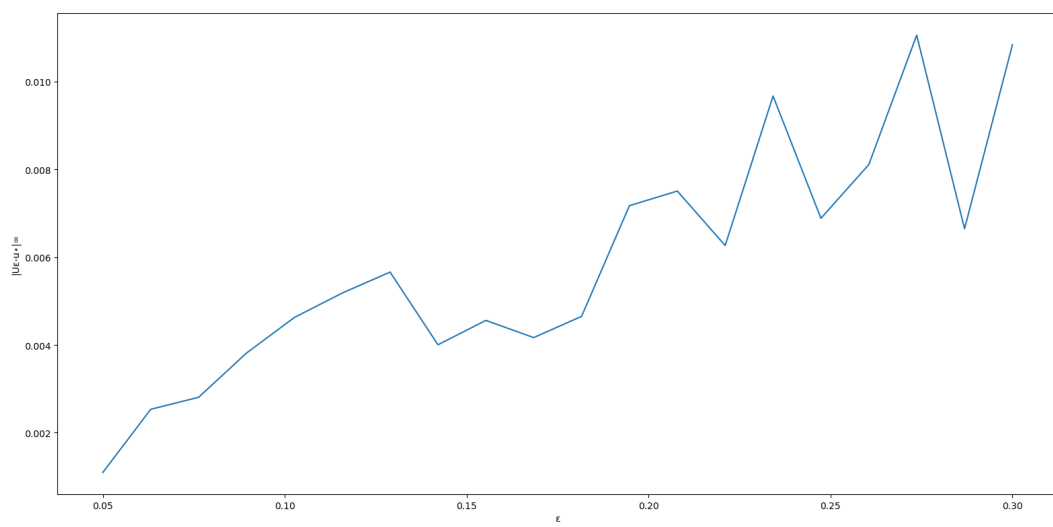


FIGURE 2 – Graphe de $\|U_\epsilon - u_*\|_\infty$ en fonction de ϵ

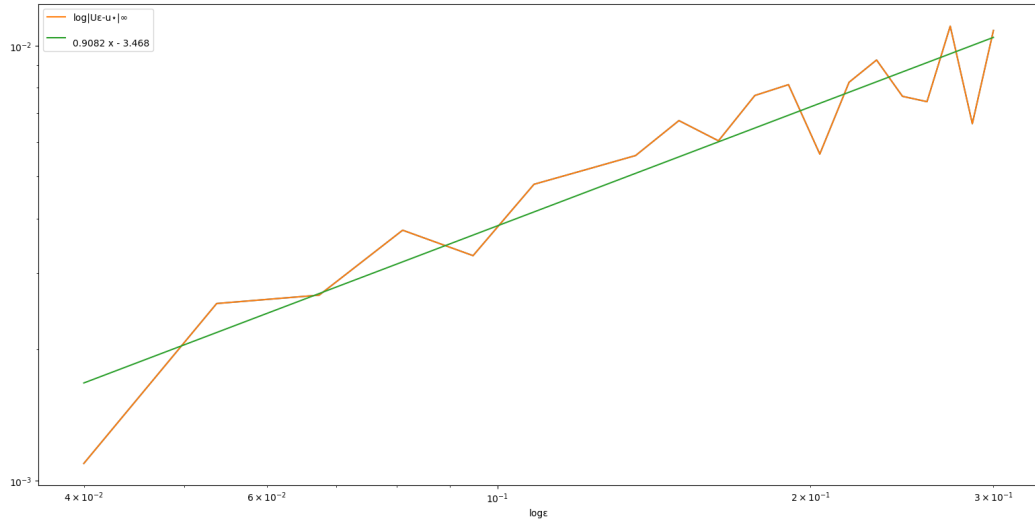


FIGURE 3 – Ordre de convergence de (U_ε) vers u_\star

2.2.2 Comportement asymptotique de (u'_ε)

Pour obtenir l'expression de (u'_ε) , on intègre l'équation :

$$-((2 + \cos(2\pi \frac{x}{\varepsilon}))u'_\varepsilon)' = 1 \quad (12)$$

On obtient :

$$u'_\varepsilon(x) = -\frac{x + \lambda_\varepsilon}{2 + \cos(2\pi \frac{x}{\varepsilon})}$$

où λ_ε est une constante déterminée par les conditions aux bords :

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{\int_0^1 \frac{t}{2 + \cos(2\pi \frac{t}{\varepsilon})} dt}{\int_0^1 \frac{1}{2 + \cos(2\pi \frac{t}{\varepsilon})} dt}$$

Nous traçons les graphes de (u'_ε) et u'_\star .

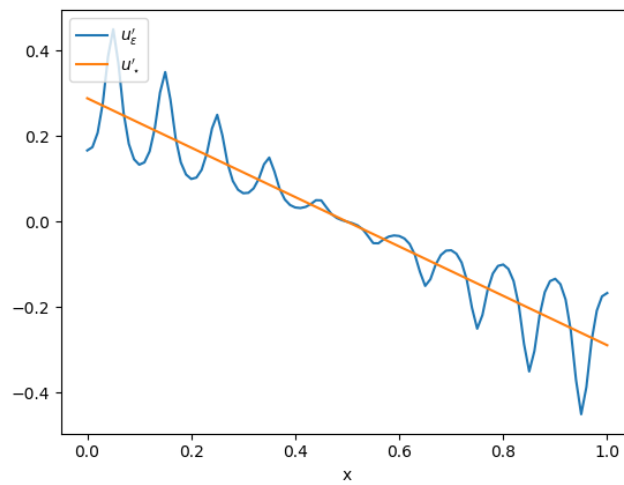


FIGURE 4 – Graphes de (u'_ε) et u'_\star

Nous traçons ensuite $\|u'_\varepsilon - u'_\star\|_\infty$ en fonction de ε .

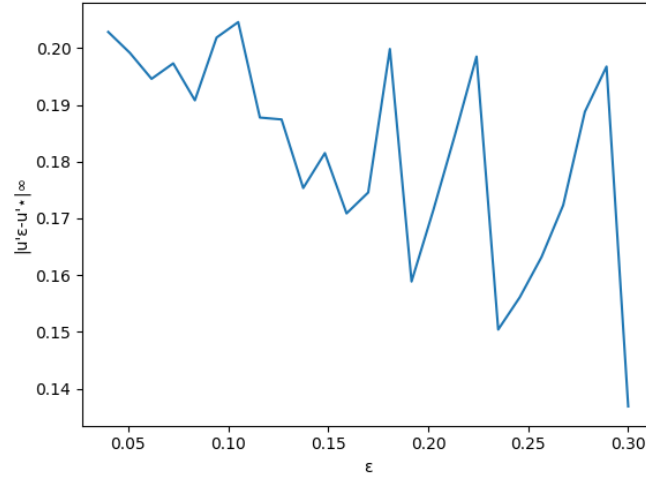


FIGURE 5 – $\|u'_\varepsilon - u'_\star\|_\infty$ en fonction de ε

On constate que (u'_ε) ne converge pas vers u'_\star en norme infinie quand ε tend vers 0.

2.2.3 Convergence du schéma à ε fixé

Nous traçons $\|u_\varepsilon^h - \pi_h(u)\|_\infty$, où $\pi_h(u)$ est la projection sur le maillage de la solution exacte de l'équation (12).

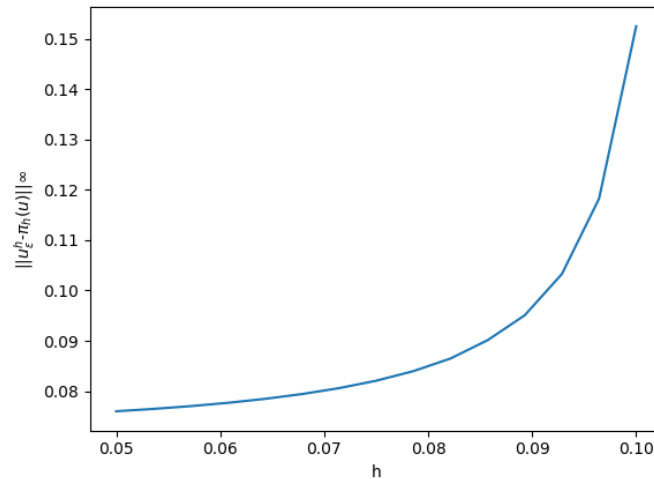


FIGURE 6 – $\|u_\varepsilon^h - \pi_h(u)\|_\infty$ en fonction de h .

3 Présentation des techniques d'homogénéisation

3.1 Développement à deux échelles

Nous avons vu dans les parties précédentes que (u_ε') ne converge pas vers u_\star . Nous proposons une ouverture dans cette dernière partie dans laquelle nous cherchons à approximer u_ε sur la base du postulat

suivant :

$$u_\varepsilon = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots \quad (13)$$

où

$$\begin{aligned} u_i &: (x, y) \longrightarrow u_i(x, y) \\ y &\mapsto u_i(x, y) \end{aligned}$$

est \mathcal{C}^2 et périodique à x fixé et $y := \frac{x}{\varepsilon}$. On a donc découpé les variables microscopique x et macroscopique y .

On dérive et on injecte (13) dans l'équation (1) en découplant les variables microscopiques et macroscopiques :

$$\begin{aligned} a(y)u'_\varepsilon(x) &= a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) + a(y)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) + \varepsilon a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + a(y)\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) + a(y)\varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) + \dots \\ (a(y)u'_\varepsilon(x))' &= a(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x})}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y})}{\partial y} + \dots \end{aligned}$$

On range ensuite les termes selon les puissances de ε .

Termes en $O(\frac{1}{\varepsilon^2})$:

$$\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial y}$$

Termes en $O(\frac{1}{\varepsilon})$:

$$\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial y}$$

Termes en $O(1)$:

$$a(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y})}{\partial y}$$

On reprend l'équation (1), et on identifie les termes du même ordre en ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial y} = 0 \\ u_0(x, \cdot) \text{ périodique} \end{cases} \quad (14)$$

On multiplie par u_0 et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_0 \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial y} dy &= 0 \\ \left[u_0 a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 a(y) dy &= 0 \\ \int_0^1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 a(y) dy &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$$

Donc $u_0(x, y) = u_0(x)$. Pour les termes en $O(\frac{1}{\varepsilon})$, on a :

$$\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{a(y)\partial u_1}{\partial y})}{\partial y} = 0$$

D'après ce qui précède, cela se réduit en :

$$\frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial y} = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial\left(a(y)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right]\right)}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

Nous cherchons u_1 de la forme :

$$u_1(x, y) = u'_0(x)w(y)$$

On obtient alors l'équation du correcteur :

$$\frac{\partial\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}(1 + w'(y))\right)}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Posons

$$\alpha := a(y)(1 + w'(y))$$

qui, d'après cette dernière équation est une constante.

Les termes en $O(1)$ donnent :

$$a(y)\frac{\partial^2 u_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x})}{\partial y} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y})}{\partial y} = f(x)$$

On intègre selon y entre 0 et 1, en utilisant la périodicité :

$$\int_0^1 a(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} dy + \int_0^1 \frac{\partial(a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y})}{\partial x} dy = f(x)$$

D'où :

$$\frac{\partial\left(a(y)\int_0^1\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right]dy\right)}{\partial x} = f(x)$$

Or,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x}(1 + w'(y))$$

D'où :

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\left[\int_0^1 a(y)(1 + w'(y))dy\right]\right)}{\partial x} = f(x)$$

Conclusion :

En partant du développement postulé en (13), on a donc trouvé une approximation de u_ε à l'ordre 1 en ε :

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

où u_0 est solution de

$$\begin{cases} \alpha u_0''(x) = f(x), \forall x \in (0, 1) \\ u_0(0) = u_0(1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

et

$$u_1(x, y) = u'_0(x)w(y)$$

On a également :

$$(a(y)(1 + w'(y)))' = 0$$

et w est périodique.

3.2 Convergence des dérivées

Théorème 3. $(u_\varepsilon(x))' - (u_0(x) + \varepsilon u'_0(x)w(y))'$ tend vers 0 à l'ordre 1 en ε quand ε tend vers 0.

Démonstration. Se reporter aux pages 64 – 65 du livre de Claude Le Bris [1]. □

4 Conclusion

Au cours de ce stage, nous avons pu explorer certains aspects de la théorie de l'homogénéisation en étudiant un problème monodimensionnel. En étudiant la convergence de la solution à l'équation initiale, nous avons défini une équation homogénéisée dont la solution apparaît comme la limite uniforme de la solution au problème initial lorsque ε tend vers 0. Cependant, la dérivée de la solution de l'équation homogénéisée ne converge pas vers la dérivée de la solution de l'équation définissant le problème initial. Nous avons ensuite cherché à constater ces résultats numériquement sur Python en approximant la solution à partir d'un schéma par différences finies. Il convient de souligner l'origine double de l'erreur entre l'approximation de la solution à l'équation initiale et la solution de l'équation homogénéisée. En effet, l'erreur a deux origines, numérique et théorique. Enfin, nous avons présenté les techniques d'homogénéisation dans le cas monodimensionnel. Celles-ci reposent sur un postulat nous donnant u_ε sous la forme d'un développement à deux échelles consistant à découpler les variables microscopique et macroscopique. Il s'agit de trouver une approximation de u_ε à l'ordre 1 en ε afin de rétablir la convergence des dérivées.

Il aurait aussi été intéressant de constater numériquement la convergence de la dérivée de cette dernière approximation. Par ailleurs, nous aurions pu étudier le cas où la fonction a est moins régulière, ou encore des problèmes de dimension supérieure à 1.

Remerciements

Je tenais à adresser un immense merci à Sylvain Wolf pour son encadrement optimal lors de ce stage, sa grande disponibilité, son enthousiasme permanent et ses précieux conseils. Ce stage m'a été grandement instructif de par l'approche inédite des mathématiques et de la recherche à laquelle j'ai été introduite. A travers ce stage, j'ai pu explorer la théorie de l'homogénéisation, un domaine mathématique qui m'était tout à fait nouveau, et j'ai particulièrement apprécié l'équilibre entre la théorie et l'aspect plus appliqué de la modélisation numérique.

Références

- [1] C. Le Bris. *Systèmes multi-échelles : Modélisation et Simulation*, volume 47. Springer Science & Business Media, 2005.
- [2] Laurent Schwartz. *Théorie des ensembles et topologie, tome 1. analyse*, 1997.

Annexe

Les codes Python nous ayant permis d'obtenir les résultats numériques de la deuxième partie sont les suivants :

Obtention de la solution approchée U_ε

```
eps=0.1
N=100
h=1/N
a=lambda x: 2+np.cos(2*pi*x)
F=lambda x: 1+0*x
v=np.linspace(0,1,N+1)
F_h=F(v[1:-1])
```

```

xx=(1/eps)*np.linspace(h/2,1-3*h/2,N-1)
yy=(1/eps)*np.linspace(3*h/2,1-h/2,N-1)
B=-a(yy)[0:-1]# de part et d'autre de la diagonale
C=a(xx)+a(yy)
A_eps=(1/h**2)*(np.diag(B,-1)+np.diag(C)+np.diag(B,+1))
U_eps=spl.solve(A_eps,F_h)
U_eps=np.concatenate([[0],U_eps,[0]])

```

Convergence uniforme de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

Tracé de la Figure 1 :

```

plt.ylabel('U\03B5')
plt.xlabel('x')
plt.plot(v,U_eps,label="U\03B5")
plt.legend(loc="upper left")
f=lambda x:1/a(x)
a_moy=integrate.quad(f,0,1)[0]

```

```

f_tilde=lambda x: integrate.quad(F,0,x)[0]
C=-(integrate.quad(f_tilde,0,1)[0])

```

```

u_star=lambda x: -a_moy*((integrate.quad(f_tilde,0,x))[0]+C*x)

```

```

L=[]
for i in v:
    L.append(u_star(i))
plt.plot(v,L,label="u\02C6")
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()

```

Tracé de la Figure 2 :

```

tab_eps=np.linspace(0.04,0.3,20)
ecart=[]
u_star_proj=[]
for i in v:
    u_star_proj.append(u_star(i))
for eps in tab_eps:
    xx=(1/eps)*np.linspace(h/2,1-3*h/2,N-1)
    yy=(1/eps)*np.linspace(3*h/2,1-h/2,N-1)
    B=-a(yy)[0:-1]
    C=a(xx)+a(yy)

    A_eps=(1/h**2)*(np.diag(B,-1)+np.diag(C)+np.diag(B,+1))

    U_eps=spl.solve(A_eps,F_h)
    U_eps=np.concatenate([[0],U_eps,[0]])
    ecart.append(spl.norm(U_eps-u_star_proj,np.inf))
plt.ylabel('|U\03B5-u\02C6|\u221e')
plt.xlabel('\03B5')
plt.plot(tab_eps,ecart)

```

Tracé de la Figure 3 :

```

tab_eps=np.linspace(0.04,0.3,20)

```

```

ecart=[]
u_star_proj=[]
for i in v:
    u_star_proj.append(u_star(i))
for eps in tab_eps:
    xx=(1/eps)*np.linspace(h/2,1-3*h/2,N-1)
    yy=(1/eps)*np.linspace(3*h/2,1-h/2,N-1)
    B=-a(yy)[0:-1]
    C=a(xx)+a(yy)

    A_eps=(1/h**2)*(np.diag(B,-1)+np.diag(C)+np.diag(B,+1))
    U_eps=spl.solve(A_eps,F_h)
    U_eps=np.concatenate([[0],U_eps,[0]])
    ecart.append(spl.norm(U_eps-u_star_proj,np.inf))

plt.ylabel('log |U\03B5-u\22C6|\ u221e')
plt.xlabel('log\03B5')
plt.plot(tab_eps,ecart)

plt.loglog(tab_eps,ecart,label="log |U\03B5-u\22C6|\ u221e")
coeffs=np.polyfit(np.log(tab_eps),np.log(ecart),1)

poly=np.poly1d(coeffs)

y_fit=lambda x: np.exp(poly(np.log(x)))
plt.loglog(tab_eps,y_fit(tab_eps),label=poly)
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()

```

Comportement asymptotique de (u'_ε)

Tracé de la Figure 4

```

eps=0.1
N=100
h=1/N
a=lambda x: 2+np.cos(2*pi*x)
F=lambda x: 1+0*x
v=np.linspace(0,1,N+1)
F_h=F(v[1:-1])

g1=lambda x: x/a(x/eps)
g2=lambda x:1/a(x/eps)
C_ex=-integrate.quad(g1,0,1)[0]/integrate.quad(g2,0,1)[0]
u_eps_prime=lambda x: -(x+C_ex)*g2(x)

u_proj=[]
for i in v:
    u_proj.append(u_eps_prime(i))
plt.plot(v,u_proj,label="$u_\epsilon$")
plt.legend(loc="upper left")
#plt.show()
#print(u_proj)

f=lambda x:1/a(x)

```



```

a_moy=integrate.quad(f,0,1)[0]

f_tilde=lambda x: integrate.quad(F,0,x)[0]
C=-(integrate.quad(f_tilde,0,1)[0])

u_star_prime=lambda x: -a_moy*(f_tilde(x)+C)

L=[]
for i in v:
    L.append(u_star_prime(i))

plt.plot(v,L,label="$u\_star'$")
plt.xlabel("x")
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()

    Tracé de la figure 5

#norme infinie (u_eps'-u_star')
tab_eps=np.linspace(0.04,0.3,25)

ecart=[]
u_star_proj=[]

for i in v:
    u_star_proj.append(u_star_prime(i))
    u_proj.append(u_eps_prime(i))

for eps in tab_eps:
    u_proj=[]
    g1=lambda x: x/a(x/eps)
    g2=lambda x:1/a(x/eps)
    C_ex=-integrate.quad(g1,0,1)[0]/integrate.quad(g2,0,1)[0]
    u_eps_prime=lambda x:-(x+C_ex)*g2(x)
    for i in v:
        u_proj.append(u_eps_prime(i))
    ecart.append(spl.norm(np.array(u_proj)-np.array(u_star_proj),np.inf))

plt.ylabel("|u'\u03B5-u'\u22C6|\u221e")
plt.xlabel('\u03B5')
plt.plot(tab_eps,ecart)
plt.show()

```

Convergence du schéma à ε fixé

Tracé de la Figure 6 :

```

H=np.linspace(0.05,0.1,15)
def ordre(H):
    result=[]
    for h in H:
        xx=(1/eps)*np.linspace(h/2,1-3*h/2,N-1)
        yy=(1/eps)*np.linspace(3*h/2,1-h/2,N-1)
        B=-a(yy)[0:-1]

```

```

C=a(xx)+a(yy)

A_eps=(1/h**2)*(np.diag(B,-1)+np.diag(C)+np.diag(B,+1))

U_eps=spl.solve(A_eps,F_h)
U_eps=np.concatenate([[0],U_eps,[0]])
erreur=spl.norm(U_eps-u_proj,np.inf)
result.append(erreur)
return(result)
plt.ylabel('$||u_\epsilon^h - \pi_h(u)||_\infty$')
plt.xlabel('h')
plt.plot(H,ordre(H))
plt.show()

```