



CPES

MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES

# Démonstration du théorème des nombres premiers

CASSUTO DANIEL  
GALLIN ADRIEN  
Promo 2020

*Encadrant* : Joseph LEHEC

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
2.1	Contexte historique . . . . .	1
2.2	Notations . . . . .	1
2.3	Énoncé du théorème . . . . .	1
<b>3</b>	<b>Schéma de la preuve</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Vérification des hypothèses</b>	<b>3</b>
4.1	$f$ bornée . . . . .	3
4.2	Prolongement de la fonction $g$ à un ouvert contenant l'ensemble $\{\Re(z) \geq 0\}$ . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Preuve du théorème des nombres premiers</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Preuve du théorème analytique</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>16</b>

# 1 Remerciements

Nous tenons à remercier chaleureusement notre encadrant Joseph Lehec, qui a su éclairer la preuve rédigée de manière très succincte par Zagier, ainsi que répondre à toutes nos questions, peu importe la difficulté ou le nombre de fois que nous les avons posées !

## 2 Introduction

### 2.1 Contexte historique

Initialement conjecturé en 1792 ou 1793 par Gauss, alors qu'il n'a que 15 ans, le théorème des nombres premiers est sûrement l'un des grands théorèmes les plus intuitifs. Effectivement, il semble tout à fait logique que les nombres premiers deviennent de plus en plus espacés asymptotiquement. Cependant, il faudra attendre 1896 pour que le théorème soit démontré par Hadamard et par La Vallée Poussin indépendamment. Cette première preuve s'appuie notamment sur l'étude de la fonction zêta de Riemann, mais s'avère longue et compliquée. D'autres preuves du théorème ont suivi en faisant appel à d'autres domaines des mathématiques, mais n'en sont pas pour autant plus simples. C'est en 1980 que le mathématicien américain Donald J. Newman découvre une preuve élégante pouvant tenir en quelques pages. Cette preuve est reproduite dans ce rapport, détaillée dans le but d'être abordable pour un élève en licence de mathématiques.

### 2.2 Notations

Pour alléger la rédaction, nous allons introduire quelques notations.

$\mathbb{P}$  est l'ensemble des nombres premiers

$\pi(x)$  est le nombre de nombre premiers inférieur ou égal à  $x$ , pour  $x \geq 0$

On définit aussi trois fonctions qui vont être présentes dans plusieurs parties de la preuve.

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ la fonction zêta de Riemann, avec } s \in \mathbb{C}$$

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log p \text{ avec le logarithme népérien et } x \geq 1$$

$$\Phi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s} \text{ avec } s \in \mathbb{C}$$

### 2.3 Énoncé du théorème

<b>Théorème 1</b> $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ lorsque $x \mapsto +\infty$
--

### 3 Schéma de la preuve

La preuve se construit autour de la convergence d'une intégrale. Effectivement, on va chercher à montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$  existe, et on en déduira astucieusement le théorème des nombres premiers.

Pour montrer que cette intégrale converge, on va utiliser un théorème d'analyse complexe, que l'on nomme théorème analytique.

**Théorème 2** Soit  $f$  une fonction mesurable et bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . On suppose que la fonction  $g$  définie par  $g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$  sur  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$  s'étend de manière holomorphe à un ouvert contenant l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0\}$ . Alors  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt$  existe et vaut  $g(0)$ .

**Remarque 1** Ce théorème ne s'appelle pas réellement le théorème analytique, c'est uniquement pour éviter d'éventuelles confusions. En réalité, c'est un théorème Taubérien, permettant de conclure sur la convergence d'une série ou d'une somme.

La preuve du théorème analytique se trouve dans la dernière partie de ce rapport. Elle est centrale à la validité du rapport, mais n'est pas en lien direct avec le raisonnement que l'on construit autour du théorème des nombres premiers.

On choisit la fonction  $f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ , et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ ,  $g$  prend donc la forme :

$$g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt} dt$$

Supposons que ces fonctions satisfassent les hypothèses du théorème. On aurait,

$$g(0) = \int_0^{+\infty} (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1) dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\vartheta(x)}{x} - 1\right) \frac{dx}{x}$$

On a utilisé le changement de variable  $e^t = x$  avec  $t \in [0, +\infty[$ . On a effectivement  $\frac{dx}{dt} = e^t = x$  soit  $dt = \frac{dx}{x}$  et  $x \in [1, +\infty[$ . Finalement, on obtient,

$$g(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

On retrouve bien l'intégrale dont on cherche à montrer la convergence. On en déduit que si les fonctions que l'on a choisies satisfontt les hypothèses du théorème analytique, alors l'intégrale est convergente.

Il reste à montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  satisfassent les hypothèses du théorème, ce qui forme la partie centrale de cette preuve.

## 4 Vérification des hypothèses

### 4.1 f bornée

Pour montrer que la fonction  $f$  est bornée et localement intégrable, il faut une information sur son comportement asymptotique.

**Lemme 1**

$$\vartheta(x) = \mathcal{O}(x) \text{ lorsque } x \mapsto +\infty$$

On commence par poser  $b = \frac{(2n)!}{n!} \in \mathbb{N}$ . On sait que  $b$  est divisible par  $n!$  car  $\frac{b}{n!} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n} \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\forall p \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$  tel que  $p$  est premier, on a  $p \mid b$ . En effet, on a  $b = \frac{(2n)!}{n!} = \prod_{k=n+1}^{2n} k$ , divisible par tout entier  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , en particulier pour tout  $k$  premier.

Or,  $\forall p \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$  tel que  $p$  est premier,  $p$  et  $n!$  sont premiers entre eux car  $p$  est premier. D'après un corollaire du Théorème de Gauss, on a

$$\left( n! \prod_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} p \right) \mid b$$

Ce que l'on peut réécrire  $\prod_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} p \mid \frac{b}{n!}$ , c'est-à-dire,  $\prod_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} p \mid \binom{2n}{n}$

On en déduit que  $\prod_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} p \leq \binom{2n}{n}$ . On remarque ensuite que

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \text{ d'après la formule du binôme de Newton. Or,}$$

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}. \text{ On a donc } \prod_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} p \leq 2^{2n}$$

On applique le logarithme de chaque côté de l'inégalité, car les termes sont strictement positifs et la fonction  $\log$  est croissante donc conserve le sens de l'inégalité.

$$\sum_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} \log p \leq 2n \log 2$$

On observe que  $\sum_{\substack{p=n+1 \\ p \in \mathbb{P}}}^{2n} \log p = \vartheta(2n) - \vartheta(n)$ . En particulier,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\vartheta(2^m) - \vartheta(2^{m-1}) \leq 2^m \log 2$$

En utilisant une somme télescopique et le fait que  $\vartheta(1) = 0$ , on en déduit que

$$\vartheta(2^m) = \sum_{r=1}^m \vartheta(2^r) - \vartheta(2^{r-1}) \leq \sum_{r=1}^m 2^r \log 2$$

Or,  $\sum_{r=1}^m 2^r = \frac{2 - 2^{m+1}}{1 - 2} = 2^{m+1} - 2$ , car c'est une somme géométrique.

On a donc  $\vartheta(2^m) \leq (2^{m+1} - 2) \log 2 < 2^{m+1} \log 2$ .

Puisque  $\forall x \geq 1, \exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $2^{n-1} \leq x < 2^n$  et comme la fonction  $\vartheta$  est croissante en tant que somme de termes positifs, on en déduit que

$$\vartheta(x) \leq \vartheta(2^n) < 2^{n+1} \log 2 \leq x(4 \log 2)$$

Ceci étant vrai pour tout  $x \geq 1$  on a montré que  $\vartheta(x) = \mathcal{O}(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Il en découle assez rapidement que  $f$  est bornée. Comme  $e^t$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\exists M, b > 0, \forall t \in ]b, +\infty[ \quad |f(t)| \leq |\vartheta(e^t)e^{-t}| + 1 \leq M + 1$$

Comme  $e^{-t}$  est bornée sur  $[0, b]$  et que  $\vartheta(e^t)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour  $t$  dans  $[0, b]$  qui sont toutes finies par définition de  $\vartheta$ , on a bien  $f$  qui est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

## 4.2 Prolongement de la fonction $g$ à un ouvert contenant l'ensemble $\{\Re(z) \geq 0\}$

Il faut maintenant montrer que  $g$  admet un prolongement holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0\}$ . Pour rappel,  $g(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$ .  
Notons déjà que si  $\Re(z) > 0$ , alors  $g(z)$  est bien définie car d'après le Lemme 1, le terme dans l'intégrale est un  $\mathcal{O}(e^{-zt})$  quand  $t \mapsto +\infty$  qui est intégrable en  $+\infty$ .

Commençons par exprimer  $g$  de manière plus simple.

### Théorème 3

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z) > 0, \quad g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$$

**Remarque 2** La fonction  $\Phi$  est plus facile à traiter que la fonction  $g$  directement. Ainsi, pour montrer que  $g$  admet un prolongement holomorphe sur un ouvert contenant  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0\}$ , il suffit de montrer que la fonction  $\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$  est holomorphe sur un tel ensemble.

Démonstration :

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ . Comme  $g(z)$  existe, on peut séparer l'intégrale.

$$g(z) = \int_0^{+\infty} (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} \vartheta(e^t)e^{-t(z+1)} dt - \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$$

On va traiter les deux intégrales séparément et montrer que  $g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$ .

D'une part,

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \left[ -\frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z}$$

D'autre part, on utilise le fait que  $\vartheta(e^t) = \vartheta(p_n)$  où  $p_n$  est le  $n$ -ième nombre premier, avec  $n$  vérifiant  $p_n \leq e^t < p_{n+1}$ . Comme tous les termes sont positifs, on peut passer au logarithme avec  $\log(p_n) \leq t < \log(p_{n+1})$ . Dès lors, on utilise la  $\sigma$ -additivité de l'intégrale de Lebesgue car la fonction que l'on intègre est mesurable et positive et  $\{\log(p_n), \log(p_{n+1})\}, n \in \mathbb{N}^*\}$  forme une partition de l'espace  $[\log 2, +\infty[$ . En effet, il suffit de considérer la fonction à partir de  $t = 2 = p_1$  car  $\forall x < 2, \vartheta(x) = 0$ . En particulier, on a  $\log 2 < 2$ .

$$\int_0^{+\infty} \vartheta(e^t)e^{-t(z+1)} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\log(p_n)}^{\log(p_{n+1})} e^{-(z+1)t} \vartheta(p_n) dt$$

On peut alors sortir  $\vartheta(p_n)$  de l'intégrale. Finalement,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \vartheta(e^t)e^{-t(z+1)} dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta(p_n) \int_{\log(p_n)}^{\log(p_{n+1})} e^{-(z+1)t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta(p_n) \left[ -\frac{e^{-(z+1)t}}{z+1} \right]_{\log(p_n)}^{\log(p_{n+1})} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\vartheta(p_n)}{z+1} (p_n^{-(z+1)} - p_{n+1}^{-(z+1)}) \\ &= \frac{1}{z+1} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta(p_n) p_n^{-(z+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta(p_n) p_{n+1}^{-(z+1)} \right) \\ &= \frac{1}{z+1} \left( \vartheta(p_1) p_1^{-(z+1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \vartheta(p_n) p_n^{-(z+1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \vartheta(p_{n-1}) p_n^{-(z+1)} \right) \end{aligned}$$

On remarque que  $\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1}) = \log(p_n)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \vartheta(e^t)e^{-t(z+1)} dt &= \frac{1}{z+1} \left( \frac{\log(2)}{2^{z+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} (\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1})) p_n^{-(z+1)} \right) \\ &= \frac{1}{z+1} \left( \frac{\log(2)}{2^{z+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(p_n)}{p_n^{z+1}} \right) \\ &= \frac{\Phi(z+1)}{z+1} \end{aligned}$$

Maintenant que l'on a exprimé la fonction  $g$  en fonction de  $\Phi$ , on va pouvoir démontrer l'existence d'un ouvert contenant  $\{\Re(z) \geq 0\}$  en se ramenant à l'étude de la fonction zêta de Riemann. On va commencer par énoncer deux lemmes qui nous permettront d'obtenir l'holomorphie de  $\frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}$ , et donc de  $g$ , sur  $\{\Re(z) \geq 0\}$

**Lemme 2**

$$\forall \Re(s) \geq 0, \zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

**Remarque 3** Ce lemme montre entre autres le lien entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers et justifie la présence de cette fonction dans cette démonstration

Démonstration : si  $\Re(s) > 1$ , on remarque que le terme dans le produit est en réalité la limite d'une série géométrique de raison  $p^{-s}$  avec  $|p^{-s}| < 1$ , on peut réécrire le terme de droite sous la forme :

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p < P, p \in \mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} p^{-ns}$$

Comme le produit est fini et que tout les  $p^{-xs}$  sont intégrables car  $p > 1$ , en utilisant Fubini, on peut inverser le signe somme avec le produit sur le produit des  $\pi(P)$  séries :

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{(n_k)_{k \in \mathbb{P}, k \leq P} \in \mathbb{N}^{\pi(P)}} \left( \frac{1}{\prod_{p < P, p \in \mathbb{P}} p^{n_k}} \right)^s$$

La décomposition des nombres entiers en nombres premiers est unique, donc on a  $\prod_{p < P, p \in \mathbb{P}} p^{n_k} \in \mathcal{N}_P$ , où  $\mathcal{N}_P = \{k \in \mathbb{N}, k = \prod_{p < P} p^{n_p}, (n_p)_{p \in \mathbb{P}, p \leq P} \in \mathbb{N}^{\pi(P)}\}$ .

Autrement dit,  $\mathcal{N}_P$  est l'ensemble des nombres entiers tels que sa décomposition en nombres premiers ne comporte que des nombres premiers plus petits que  $P$ . On a donc identifier chaque terme à un unique entier. On a donc :

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^s} \mathbb{1}_{\mathcal{N}_P}(k)$$

On peut dominer  $\frac{1}{k^s} \mathbb{1}_{\mathcal{N}_P}$  par  $\frac{1}{k^s}$  qui est intégrable, donc on peut inverser la limite et la série par le théorème de convergence dominée, ce qui achève la preuve :

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{k^s} \mathbb{1}_{\mathcal{N}_P} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^s}$$



**Corollaire 1**

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1, \zeta(s) \neq 0$$

Démonstration : D'après le Lemme 2, on a  $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$ . On remarque que :

1.  $\sum_{p \in \mathbb{P}} \left| \frac{1}{1 - p^{-s}} - 1 \right| < \infty$ , en effet le terme dans la somme est équivalent à  $\frac{1}{p^s}$  qui est sommable si  $s \in \{\Re(s) > 1\}$ .
2.  $\forall p \in \mathbb{P}, \forall s \in \mathbb{C} \cap \{\Re(s) > 1\}, \frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0$

De ces deux conditions, on en déduit que le produit est convergent sur cette ensemble et qu'il est non nulle .

A présent, nous allons introduire un autre lemme sur la fonction zêta de Riemann.

**Lemme 3** *La fonction  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  s'étend de manière holomorphe à  $\{\Re(s) > 0\}$*

**Remarque 4** *Autrement dit, la fonction  $\zeta$  s'étend de manière méromorphe sur  $\Re(s) > 0$ , avec un seul pôle en  $s = 1$ .*

Démontrons ce nouveau résultat ! Soit  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(s) > 1$  :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$$

Cette fonction est définie pour tout  $s$  tel que  $\Re(s) > 0$ . En effet, la série converge absolument puisque  $\Re(s) > 0$  implique  $\Re(s) + 1 > 1$ , le critère de Riemann nous assure alors la convergence absolue :

$$\left| \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| = \left| s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} dx \right| \leq |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \left| \frac{du}{u^{s+1}} \right| dx \leq \max_{u \in [n, n+1]} \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| = \frac{|s|}{n^{\Re(s)+1}}$$

Avec notre Corollaire 1 et notre Lemme 3 en poche, nous pouvons nous attaquer à l'holomorphie de  $g$  :

**Propriété 1**  $\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1}$  est holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 1\}$

**Remarque 5** Il y a une translation de  $-1$  effectuée dans ce résultat par rapport à celui cherché sur  $g$ . C'est effectivement le même énoncé, mais cette écriture permet une rédaction plus légère, il faudra juste opérer la translation inverse pour conclure.

Démonstration : On écrit cette fonction sous la forme :

$$\frac{\Phi(z)}{z} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \left( \Phi(z) - \frac{1}{z-1} - 1 \right)$$

On sait que la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z}$  est holomorphe sur l'ensemble  $\Re(z) > 1/2$ .

Montrons alors que la fonction  $z \mapsto \Phi(z) - \frac{1}{z-1} - 1$  est holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $\{\Re(z) \geq 1\}$ . L'idée est de montrer que  $\Phi(z)$  a un unique pôle en 1 dont la partie singulière est effacée par celle de  $\frac{1}{z-1}$ .

Le Corollaire 1 affirme que  $\forall s$  tel que  $\Re(s) > 1$   $\zeta(s) \neq 0$ . On remarque que  $-\log(\zeta) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1 - p^{-s})$ , et on en déduit que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\partial \log \zeta}{\partial s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s(1 - p^{-s})} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s - 1}$$

Par ailleurs,  $\frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)} = \frac{\log(p)}{p^s - 1} - \frac{\log(p)}{p^s}$  donc :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s - 1} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)} + \Phi(s)$$

On trouve donc :

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s(p^s - 1)}$$

Les critères de croissances comparées et des séries de Riemann nous assurent que la série de droite est holomorphe sur  $\Re(s) > \frac{1}{2}$ , car c'est la limite d'une série de fonction holomorphe sur  $\Re(s) > \frac{1}{2}$  qui converge normalement.

Le Lemme 3 nous assure que  $\zeta$  est méromorphe sur  $\{\Re(s) \geq 1\}$  donc  $\frac{\zeta'}{\zeta}$  aussi. On en déduit que  $\Phi$  est aussi méromorphe sur cet ensemble et que ses pôles

sont exactement les pôles de  $\frac{\zeta'}{\zeta}$ , qui sont les zéros et les pôles de  $\zeta$ . On fait une disjonction de cas.

— Si  $\Re(s) > 1$  :

D'après le Corollaire 1 et le lemme 3, la fonction  $\zeta$  n'admet, ni pôle, ni zéros sur cet ensemble, et donc  $\Phi$  est holomorphe sur cet ensemble. On peut en déduire que les seuls pôles de  $\frac{\zeta'}{\zeta}$  sont sur  $\{\Re(s) = 1\}$ .

— Si  $\Re(s) = 1$  :

Si  $\zeta$  admet un zéro sur  $\Re(s) \geq 1$  alors il vérifie nécessairement  $\Re(s) = 1$ . Montrons que  $\zeta$  n'admet pas de zéros sur  $\{\Re(s) = 1\}$ . Pour cela on considère  $s = 1 \pm i\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , et on suppose qu'il est un zéro d'ordre  $\mu \in \mathbb{N}$  (en acceptant  $\mu = 0$ , ce qui signifierait qu'il n'est pas un zéro). On considère aussi  $s = 1 \pm 2i\alpha$ , et on suppose qu'il soit un zéro d'ordre  $\nu \in \mathbb{N}$ . Le fait que  $s$  et  $\bar{s}$  sont des zéros de même ordre, vient de l'égalité  $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ .

Comme  $\frac{\zeta'}{\zeta}$  est une dérivée logarithmique, le résidu associés à un zéro de  $\zeta$  est son ordre de multiplicité en tant que zéro de  $\zeta$ . On en déduit :

$$Res_{-\frac{\zeta'}{\zeta}}(1) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1 + \varepsilon) = 1$$

$$Res_{-\frac{\zeta'}{\zeta}}(1 \pm \alpha) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1 \pm i\alpha + \varepsilon) = -\mu$$

$$Res_{-\frac{\zeta'}{\zeta}}(1 \pm 2i\alpha) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Phi(1 \pm 2i\alpha + \varepsilon) = -\nu$$

Afin de prouver que  $\mu$  et  $\nu$  valent 0, nous devons introduire une nouvelle fonction  $h$  :

$$h(\varepsilon) := \sum_{k=-2}^2 \binom{4}{2+k} \Phi(1+\varepsilon+ik\alpha) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} \left( \frac{1}{p^{-2\alpha i}} + 4 \frac{1}{p^{-i\alpha}} + 6 + 4 \frac{1}{p^{i\alpha}} + \frac{1}{p^{+2i\alpha}} \right)$$

$$h(\varepsilon) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} \left( \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} p^{i(k-2)} \right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} \left( \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} p^{\beta k} p^{(4-k)\gamma} \right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} (p^\beta + p^\gamma)^4$$

Par identification  $\beta = -\frac{i\alpha}{2}$ ,  $\gamma = \frac{i\alpha}{2}$ . On a donc :

$$\sum_{k=-2}^2 \binom{4}{2+k} \Phi(1+\varepsilon+ik\alpha) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} (p^{i\frac{\alpha}{2}} + p^{-i\frac{\alpha}{2}})^4 = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^{1+\varepsilon}} (2 \cos(\frac{\alpha}{2}))^4 \geq 0$$

Enfin :

$$\varepsilon h(\varepsilon) = \sum_{k=-2}^2 \binom{4}{2+k} \varepsilon \Phi(1+\varepsilon+ik\alpha) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \left( \binom{4}{0} + \binom{4}{4} \right) \mu - \left( \binom{4}{1} + \binom{4}{3} \right) \nu - \binom{4}{2} = 6 - 8\mu - 2\nu$$

La fonction  $h$  étant positive pour tout  $\varepsilon$ , cela implique que  $6 - 8\mu - 2\nu \geq 0$ . Or,  $\mu \in \mathbb{N}$  donc  $\mu = 0$  soit l'ordre de multiplicité de  $1 + i\alpha$  est 0. Puisque cette relation est vrai  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ , il n'y a pas de zéros de  $\zeta$  sur la droite  $\{\Re(s) = 1\}$ .

Pour étendre ce résultat à un ouvert contenant  $\{\Re(s) = 1\}$ , on remarque d'abord que les zéros seront dans l'ensemble  $\{\Re(s) < 1\}$ . Comme ils sont isolés, on en déduit qu'il existe un ensemble ouvert contenant l'ensemble  $\{\Re(z) \geq 1\}$  tel que la fonction  $z \mapsto \Phi(z) - \frac{1}{z-1}$  soit holomorphe.

Finalement, la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z+1} \left( \Phi(z+1) - \frac{1}{z} - 1 \right)$  est holomorphe sur cet ouvert.

En effectuant la translation de 1, on a montré que la fonction  $g$  admet un prolongement holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $\{\Re(z) \geq 0\}$ .

## 5 Preuve du théorème des nombres premiers

A ce moment de la preuve, nous avons enfin montré que les hypothèses de notre théorème 2 sont vérifiées, et on ne va pas s'en priver ! Il nous reste plus qu'une petite manipulation pour montrer un ultime lemme :

**Lemme 4**

$$\vartheta(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x$$

Démonstration : On rappelle que  $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . D'après le

Lemme 1,  $\vartheta(x) = \mathcal{O}(x)$ . L'idée est de montrer que  $\limsup \frac{\vartheta(x)}{x} \leq 1$  et  $\liminf \frac{\vartheta(x)}{x} \geq 1$ . Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il existe  $\lambda > 1$  et  $x$  arbitrairement grand, vérifiant  $\vartheta(x) \geq \lambda x$ . Comme  $\vartheta$  est croissante en  $x$ , on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt$$

En utilisant le changement de variable  $t' = \frac{t}{x}$ , on trouve :

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - t'}{t'^2} dt' = \lambda - 1 - \log(\lambda) > 0$$

On remarque que pour ce  $\lambda$ , l'intégrale est strictement positive et indépendante de  $x$ . Cela contredirait le résultat du théorème 2, c'est-à-dire que  $\int_1^{+\infty} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt$  converge. donc par extension que  $\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . On peut donc en déduire la première inégalité :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leq 1$$

De même, l'inégalité  $\vartheta(x) \leq \lambda x$  avec  $\lambda < 1$  donnerait :

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^x \frac{\lambda x - t}{t^2} dt \stackrel{t' \rightarrow \lambda t}{=} \int_{\lambda}^1 \frac{\lambda - t'}{t'^2} dt' = 1 - \lambda + \log(\lambda) < 0$$

Une fois de plus cette dernière conséquence contredirait les résultats du théorème analytique donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 \implies \vartheta \sim x}$$

Le théorème des nombres premiers découle assez rapidement de cette équivalence :

$$\forall \varepsilon > 0, \vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \log(p) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} (1-\varepsilon) \log(x) = (1-\varepsilon) \log(x) (\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon}))$$

$$(1-\varepsilon) \log(x) (\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) = (1-\varepsilon) \log(x) (\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon}))$$

La dernière égalité découle du fait que  $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}$  ce qui permet d'affirmer que  $\pi(x^{1-\varepsilon}) = O(x^{1-\varepsilon})$ . On obtient donc :

$$\frac{\vartheta(x)}{\log(x)} \geq (1-\varepsilon) (\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon}))$$

De plus :

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p) \leq \sum_{p \leq x} \log(x) = \pi(x) \log(x)$$

Donc

$$\pi(x) \geq \frac{\vartheta(x)}{\log(x)} \geq (1-\varepsilon) (\pi(x) + O(x^{1-\varepsilon}))$$

L'inégalité étant vrai pour tout  $\varepsilon$ , en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et en utilisant l'équivalent précédemment démontré, on termine la preuve du théorème des nombres premier :

$$\boxed{\frac{\vartheta(x)}{\log(x)} \sim \frac{x}{\log(x)} \sim \pi(x)}$$

## 6 Preuve du théorème analytique

Soit  $T > 0$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On définit la fonction  $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt} dt$ . Montrons qu'elle est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

La fonction  $t \mapsto f(t)e^{-zt}$  est mesurable pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . De plus, la fonction  $z \mapsto f(t)e^{-zt}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$ . On note  $k = \max\{e^{-zt}, z \in K, t \in [0, T]\}$ . Comme  $f$  est bornée par hypothèse, on peut noter  $B$  sa borne. Dès lors,  $\forall z \in K, \forall t \in [0, T], |f(t)e^{-zt}| \leq Bk$  qui est intégrable sur  $[0, T]$  car c'est un segment. En vertu du théorème d'holomorphie sous le signe somme, on a montré que  $g_T$  est holomorphe sur  $C$ .

Le but est de montrer que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(0)$  existe et vaut  $g(0)$ .

Par hypothèse,  $g$  se prolonge de manière holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \geq 0\}$ . Soit  $R > 0$ , on sait que  $\exists \delta > 0$  tel que  $g$  se prolonge de manière holomorphe sur un ouvert contenant l'ensemble  $M = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R, \Re(z) \geq -\delta\}$ . On note  $C = \partial M$  le bord de  $M$ . L'idée de cette preuve est d'utiliser la formule de Cauchy pour la fonction  $z \mapsto (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$  en  $z = 0$  avec le chemin qui correspond à  $C$  parcouru dans le sens trigonométrique (on le note  $C$  aussi).

On sait que cette fonction est holomorphe au voisinage de  $M \cup C$ , et que  $\forall z \notin M \cup C, n_C(z) = 0$ , avec  $n_C(z)$  l'indice du chemin  $C$  par rapport à  $z$ . Comme  $C$  est un chemin fermé dans  $M \cup C$ , on peut utiliser la formule de Cauchy.

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)}{z} dz$$

On va montrer que cette intégrale tend vers 0 quand  $T$  tend vers  $+\infty$ .

On définit d'abord les ensemble  $C_+ = C \cap \{\Re(z) > 0\}$  et  $C_- = C \cap \{\Re(z) < 0\}$ , et les chemins correspondant à ces ensemble parcourus dans le sens trigonométrique, de sorte que l'intégrale sur  $C$  soit égale à la somme de l'intégrale sur  $C_+$  et sur  $C_-$ , car on enlève deux points (un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue).

On commence par chercher la limite de l'intégrale sur  $C_+$ . Soit  $z \in C_+$ , on a

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt \right|$$

$$|g(z) - g_T(z)| \leq \int_T^{+\infty} |f(t)e^{-zt}| dt$$

$$|g(z) - g_T(z)| \leq B \int_T^{+\infty} |e^{-zt}| dt$$

Avec  $B$  la borne supérieure de  $f$

$$\text{Or, } B \int_T^{+\infty} |e^{-zt}| dt = B \int_T^{+\infty} e^{-\Re(z)t} dt = \frac{B e^{-\Re(z)T}}{\Re(z)} \text{ puisque } z \in C_+ \text{ donc } \Re(z) > 0$$

On majore ensuite l'autre terme dans l'intégrale.

$$\left| e^{zT} \frac{(1 + \frac{z^2}{R^2})}{z} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{R^2 + z^2}{zR^2} \right|$$

Comme  $z$  est sur  $C$ , on a  $|z| = R$  et  $R^2 = z\bar{z}$ . On peut donc écrire

$$\left| e^{zT} \frac{(1 + \frac{z^2}{R^2})}{z} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{z(\bar{z} + z)}{zR^2} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \frac{e^{\Re(z)T}}{R^2} 2\Re(z)$$

Finalement,  $\forall z \in C_+$ , on a

$$\left| \frac{(g(z) - g_T(z))}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \right| \leq \frac{B e^{-\Re(z)T}}{\Re(z)} \frac{e^{\Re(z)T}}{R^2} 2\Re(z) = \frac{2B}{R^2}$$

On se ramène à l'intégrale curviligne. On paramètre le demi-cercle  $C_+$  :

$$\int_{C_+} \frac{(g(z) - g_T(z))}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(g(Re^{i\theta}) - g_T(Re^{i\theta}))}{Re^{i\theta}} e^{Re^{i\theta}T} \left(1 + \frac{Re^{i\theta 2}}{R^2}\right) i Re^{i\theta} dz$$

D'après ce qui précède, on a

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_+} \frac{(g(z) - g_T(z))}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz \right| \leq \frac{2B}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{2B}{R}$$

On verra que cette majoration suffira pour conclure. Il faut maintenant effectuer un travail similaire sur l'intégrale sur le chemin  $C_-$ . Cette fois-ci, il est nécessaire d'étudier séparément les fonction  $g$  et  $g_T$  :

$$\int_{C_-} \frac{(g(z) - g_T(z))}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = \int_{C_-} \frac{g(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz + \int_{C_-} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz$$

On effectue un raisonnement analogue à celui pour l'intégrale sur le chemin  $C_+$  sur l'intégrale de  $g_T$ . L'idée est de se ramener à l'intégrale sur le demi-cercle à gauche de la droite des imaginaires purs pour utiliser les résultats précédents.

D'après la Figure 1, le chemin  $C_3$  correspond à la différence entre le chemin  $C_-$  et le chemin  $C_2$ . On a donc l'égalité

$$\int_{C_3} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = \int_{C_2} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz - \int_{C_-} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz$$

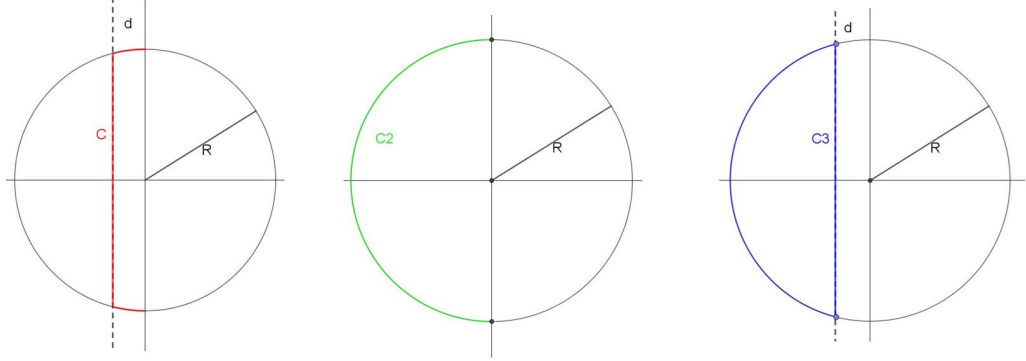


FIGURE 1 – Chemin  $C_-$  1 (gauche, noté  $C$ ), chemin  $C_2$  (centre), et chemin  $C_3 = C_2 - C_1$  (droite)

On remarque que la fonction  $z \mapsto \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  car on a montré que la fonction  $g_T$  est entière, et le seul pôle de cette fonction est en  $z = 0$ . Puisque le chemin  $C_3$  n'entoure pas le point 0, on a  $\text{Ind}_{C_3}(0) = 0$ . Comme c'est un chemin fermé, par la formule de Cauchy, on a  $\int_{C_3} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = 0$ .

On en déduit que

$$\int_{C_-} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = \int_{C_2} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz$$

On peut alors effectuer un raisonnement analogue à celui de l'intégrale sur  $C_+$ . On a

$$\forall z \in C_2, |g_T(z)| \leq \int_0^T |f(t)| e^{-\Re(z)t} dt \leq B \int_0^T e^{-\Re(z)t} dt = \frac{B e^{-\Re(z)T}}{|\Re(z)|}$$

Avec  $B$  la borne de  $f$  et en notant que  $\Re(z) < 0$  d'où la valeur absolue. De plus,

$$\left| e^{zT} \frac{1 + \frac{z^2}{R^2}}{z} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{z(\bar{z} + z)}{zR^2} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{\bar{z} + z}{R^2} \right| = \frac{e^{\Re(z)T}}{R^2} 2|\Re(z)|$$

Car  $|z| = R$  puisque  $z \in C_2$ . On paramètre l'intégrale curviligne de la même manière avec :

$$\int_{C_2} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{g_T(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} e^{Re^{i\theta}T} \left(1 + \frac{(Re^{i\theta})^2}{R^2}\right) iRe^{i\theta} d\theta$$

On en déduit que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz \right| \leq \frac{2B}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\theta = \frac{2B}{R}$$



Il reste uniquement à étudier l'intégrale  $\int_{C_-} \frac{g_T(z)}{z} e^{zT} (1 + \frac{z^2}{R^2}) dz$ . Cette fois-ci, on va passer à la limite en  $T$ .

Montrons donc que  $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} \frac{g(z)}{z} e^{zT} (1 + \frac{z^2}{R^2}) dz \right| = 0$

Tout d'abord, on paramétrise l'intégrale curviligne :

$$\int_{C_-} \frac{g(z)}{z} e^{zT} (1 + \frac{z^2}{R^2}) dz = \int_0^1 \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} e^{\gamma(t)T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) \gamma'(t) dt$$

On n'a pas besoin de déterminer  $\gamma$  explicitement. En effet, puisque c'est un chemin, il est  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 1]$ . En particulier,  $\gamma'$  est continue par morceaux sur cet intervalle, et y est donc bornée. On note  $M > 0$  sa borne en module.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} \frac{g(z)}{z} e^{zT} (1 + \frac{z^2}{R^2}) dz \right| &\leq \left| \frac{M}{2\pi} \int_0^1 \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} e^{\gamma(t)T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) dt \right| \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| e^{\Re(\gamma(t))T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) dt \end{aligned}$$

On va montrer que ce dernier terme tend vers 0 lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ . Pour ce faire, on utilise le théorème de convergence dominée. D'une part,

$$\forall T > 0, \forall t \in [0, 1] \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| e^{\Re(\gamma(t))T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) \leq \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right)$$

Puisque  $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in C_-$  donc  $\Re(\gamma(t)) < 0$ . Or, la fonction  $t \mapsto \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right)$  est intégrable sur  $[0, 1]$ , car elle est y définie et continue par morceaux. On a donc l'hypothèse de domination (et par ailleurs que la fonction est intégrable). D'autre part,

$$\forall t \in [0, 1], \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| e^{\Re(\gamma(t))T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

On a la convergence simple. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\frac{M}{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)} \right| e^{\Re(\gamma(t))T} \left(1 + \frac{\gamma(t)^2}{R^2}\right) dt \rightarrow 0 \text{ lorsque } T \rightarrow +\infty$$

On en déduit que  $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_-} \frac{g(z)}{z} e^{zT} (1 + \frac{z^2}{R^2}) dz \right| = 0$ .

On obtient  $\limsup_{T \rightarrow +\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{4B}{\pi R}$ . Comme  $R$  est choisi arbitrairement, on peut le faire tendre vers  $+\infty$ . On en déduit que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} |g(0) - g_T(0)| = 0$$

On a donc montré que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(0)$  existe et vaut  $g(0)$ , ce qui est le résultat demandé. Le théorème est donc démontré.

## 7 Conclusion

On a montré le théorème des nombres premiers, par l'intermédiaire d'un théorème d'analyse complexe. Cette preuve a de nombreuses astuces, mais permet une compréhension plus profonde du théorème des nombres premiers. En particulier, nous avons déjà rencontré le résultat avec un grand  $O$  plutôt qu'une relation d'équivalence, mais la preuve était beaucoup plus simple (on peut d'ailleurs trouver ce résultat rapidement à partir du Lemme 1). Toute la subtilité est donc dans la relation d'équivalence, qui nécessite des arguments plus forts, et donc une compréhension plus globale du sujet.

## 8 Bibliographie

Zagier D, Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 8 (Oct., 1997), pp. 705-708