Quentin Petit

Les solutions de viscosité des Équations de Hamilton-Jacobi

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de Madame **Daniela Tonon**

05/07/2015

Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Troisième année (L3)

Table des matières

1 Introduction

1.1 Les équations

Les équations de Hamilton-Jacobi sont de la forme :

$$\partial_t u + H(t, x, \partial_x u, u) = 0$$

Ces équations apparaissent naturellement dans de nombreux domaines. En physique, en économie, ou encore en épidémiologie. Le lien entre ces équations et la théorie du control optimal est aussi une raison de leurs importance. Mais ce type d'équations ne nous permet pas d'espérer avoir des solutions classiques qui résolvent le problème partout. Ceci a amené Pierre-Louis Lions un mathématicien français, professeur à l'université Paris-Dauphine à développer avec son collègue Micheal G. Crandall la théorie des solutions de viscosités au début des années 1980. Ces solutions ont résolu beaucoup de difficultés et restent aujourd'hui au centre de domaines de recherche actifs.

1.2 Organisation du mémoire

Dans ce mémoire nous allons donc nous intéresser à l'équation :

$$\partial_t u + H(t, x, \partial_x u, u) = 0$$

où $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est le Hamiltonien : on fera des hypothèses de régularités différentes au long du mémoire. La condition initiale du problème se traduit par la donnée $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u(0, x) = u_0(x)$. Le travail fait, peut se généraliser en remplaçant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ par un domaine Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$, la condition initial u_0 définie sur $\partial\Omega$ et en prenant l'équation $H(x, \partial_x u, u) = 0$.

Nous verrons dans une premier temps pourquoi ce type de problème n'admet pas, en général, de solution classique sur tout l'ensemble de définition. Ensuite nous allons présenter des solutions moins régulières et nous verrons que les solutions de viscosité semblent être la bonne notion de solutions faibles pour ce problème. Dans la dernière partie du mémoire nous présenterons un problème classique du calcul des variations et étudierons le lien qu'il a avec les équations de Hamilton-Jacobi.

2 Pré-requis

Dans cette section nous présentons des résultats qui nous serons utiles plus tard. Commençons par le théorème de Rademacher :

Théorème 2.1 (Rademacher) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ($k = 1, 2, ...$) est lipschitzienne, alors f est différentiable presque partout.*

Preuve Admis. □

2.1 Introduction à l'analyse non lisse

Définition 2.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.*
L'ensemble des sur-dérivées de Fréchet de u en x est défini par :

$$D^- u(x) = \{p \in \mathbb{R}^n | \liminf_{y \to x} \tfrac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|} \geq 0\}$$

Et celui des sous-dérivées de Fréchet de u en x par :

$$D^+ u(x) = \{p \in \mathbb{R}^n | \limsup_{y \to x} \tfrac{u(y)-u(x)-p\cdot(y-x)}{|y-x|} \leq 0\}$$

La proposition suivante nous permettra, plus tard, de comprendre l'équivalence des différentes définitions des solutions de viscosité.

Proposition 2.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ et $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. On a les assertions suivantes :*

(i) $p \in D^+ u(x)$ si et seulement si il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\nabla\varphi(x) = p$ et $u - \varphi$ admet un maximum local en x.

(ii) $p \in D^- u(x)$ si et seulement si il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\nabla\varphi(x) = p$ et $u - \varphi$ admet un minimum local en x.

Preuve Prouvons (i) :

Supposons que $p \in D^+ u(x)$.
Soit $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante telle que :

- ► $\sigma(0) = 0$
- ► $\forall y \in \Omega,\ u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) + \sigma(|y - x|)|y - x|$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+,\ \phi(t) = \int_0^t \sigma(s)ds$
Ainsi ϕ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

- $\phi'(0) = \phi(0) = 0$
- $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \phi(t) \leq \sigma(t)t$

On pose alors pour tout $y \in \Omega, \varphi(y) = u(x) + p \cdot (y - x) + \phi(|y - x|)$. Donc $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\nabla\phi(x) = p$. Il reste donc à montrer que $u - \varphi$ admet un maximum local en x :

En effet,

$$\begin{aligned} u - \varphi)(y) &= u(y) - u(x) - p \cdot (y - x) - \phi(|y - x|) \\ &\leq u(y) - u(x) - p \cdot (y - x) - \sigma(|y - x|)|y - x| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Et comme $(u - \varphi)(x) = 0$, $u - \varphi$ admet bien un maximum local en x.

Inversement, s'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local en x. Prouvons que $p = \nabla\varphi(x) \in D^+u(x)$:

Pour y assez proche de x, $(u - \varphi)(y) \leq (u - \varphi)(x)$

$$\Leftrightarrow u(y) - u(x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

Ainsi :

$$\limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|y - x|} \leq \limsup_{y \to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - p \cdot (y - x)}{|y - x|} = 0$$

Pour démontrer (ii) on raisonne de la même manière. $\square$

Proposition 2.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ et $u \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$. On a les assertions suivantes :*

(i) Si u est différentiable au point x, alors :

$$D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\}$$

(ii) Si $D^+u(x)$ et $D^-u(x)$ sont tous les deux non nuls alors u est différentiable en x.

Remarque 2.1 *Cette dernière proposition nous sera utile pour justifier la définition des solutions de viscosité.*

Preuve Prouvons (i) :

On suppose que u est différentiable en x. Par définition, $\nabla u(x) \in D^+u(x) \cap D^-u(x)$. Soit $p \in D^*u(x)$ $(* \in \{+,-\})$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $u - \varphi$ admet un extremum local en x et $p = \nabla\varphi(x)$. Dans ce cas on a :

$$\nabla(u - \varphi)(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla u(x) = \nabla\varphi(x) = p$$

Ainsi, $D^*u(x)$ est réduit à $\{\nabla u(x)\}$, c'est ce qu'on voulait.
Maintenant, prouvons (ii) :

Supposons que $D^+u(x) \neq \emptyset$ et $D^-u(x) \neq \emptyset$. Ils existe donc φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = u(x)$ et telles que pour y assez proche de x on ait l'inégalité :

$$\varphi_1(y) \leq u(y) \leq \varphi_2(y) \tag{1}$$

Ainsi, $\varphi_2 - \varphi_1$ admet un minimum local en x et donc : $\nabla\varphi_2(x) = \nabla\varphi_1(x)$. D'autre part, par (1) et pour y assez proche de x, on a :

$$\frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(x)}{|y - x|} \leq \frac{u(y) - u(x)}{|y - x|} \leq \frac{\varphi_2(y) - \varphi_2(x)}{|y - x|}$$

Donc $\liminf\limits_{y \to x} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|} = \limsup\limits_{y \to x} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|} = \nabla\varphi_1(x)$. Ceci prouve que u est différentiable en x. $\square$

2.2 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition 2.2.1 *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ est uniformément équicontinue si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |x - y| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

On énonce le théorème d'Arzelà-Ascoli dans un cas particulier, celui qui nous intéressera dans la suite du mémoire :

Théorème 2.2 (Arzelà-Ascoli) *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, uniformément équicontinues et uniformément bornées. Alors il existe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$f_{\Phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{||\cdot||_\infty}{\longrightarrow}} f$$

sur tout compact de Ω.

Preuve Admis. □

Corollaire 2.1 *La fonction limite f du théorème précédent est continue.*

2.3 Définition des espaces de Sobolev

Définition 2.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient u et v dans $L^1_{loc}(\Omega)$ et α un multi-indice. On dit que v est la α^{eme} faible dérivée partielle et on note $D^\alpha u = v$, si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx$$

Remarque 2.2 *On peut prouver l'unicité de la dérivée au sens faible à un ensemble négligeable près en supposant v et v' deux dérivées α^{eme} au sens faible et appliquer la définition pour toute fonctions test φ.*

Définition 2.3.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, si :*

Pour tout multi-indice α de module plus petit que k, $D^\alpha u$ existe au sens faible et appartient à $L^p(\Omega)$.

La norme de cet espace est :

$$|u| = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & si\ 1 \le p < \infty \\ \max_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u|_\infty & si\ p = \infty \end{cases}$$

2.4 Transformée de Legendre

Définition 2.4.1 *Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$L \text{ est convexe et } \frac{L(q)}{|q|} \underset{|q|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{2}$$

On définit la transformée de Legendre par :

$$L^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}}(q \cdot p - L(q))$$

Exemple 2.1 *On prend par exemple* $L(q) = \frac{1}{2}q^2$ *pour tout* $q \in \mathbb{R}$*. Dans ce cas,*

$$L^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}}(qp - \frac{1}{2}q^2)$$

et par une étude de fonction le maximum est atteint pour $q = p$*, ainsi :*

$$L^*(p) = \frac{1}{2}p^2$$

Proposition 2.3 *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse* (2)*,*

(i) L^* *est convexe et vérifie* $\frac{L(q)}{|q|} \underset{|q|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

(ii) $L^{**} = L$

Preuve (i) : Prouvons dans un premier temps que L^* est convexe. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $]0,1[$. Par définition de L^*, on a :

$$\begin{aligned}
L^*(tx + (1-t)y) &= \sup\{(tx + (1-t)y) \cdot q - L(q) | q \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \sup\{tx \cdot q - tL(q) + (1-t)y \cdot q - (1-t)L(q) | q \in \mathbb{R}^n\} \\
&\leq \sup\{tx \cdot q - tL(q) | q \in \mathbb{R}^n\} + \sup\{(1-t)y \cdot q - (1-t)L(q) | q \in \mathbb{R}^n\} \\
&\leq tL^*(x) + (1-t)L^*(y)
\end{aligned}$$

Et comme le choix de x, y et t est arbitraire L^* est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant on va prouver que L^* est super linéaire. Pour tout $M > 0$ et $p \in \mathbb{R}^n$ par définition de L^*,

$$L^*(p) \geq M\frac{p}{|p|} \cdot p - L\left(M\frac{p}{|p|}\right) \geq M|p| - \max\{L(q)|\ |q| = M\}$$
$$\Leftrightarrow \frac{L^*(p)}{|p|} \geq M - \frac{\max\{L(q)|\ |q| = M\}}{|p|}$$

Et donc : $\liminf \frac{L^*(p)}{|p|} \geq M$ pour tout $M > 0$, on en déduit donc le résultat.

(ii) : On va montrer l'égalité par double inégalités. En reprenant la définition de L^*, pour tout q et p dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$q \cdot p - L^*(p) \leq L(q)$$

Et en prenant le suprémum sur les p on aboutit à $L^{**}(q) \leq L(q)$ pour tout q. On a donc une première inégalité.

Pour prouver l'inégalité inverse, on choisit q dans $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in D^-L(q)$. On choisit $\hat{q} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$L^*(p) = \hat{q} \cdot p - L(\hat{q})$$

En effet le suprêmum est atteint au vu de l'hypothèse (2). Et comme $p \in D^-L(q)$ et que L est convexe,

$$L(q) \leq L(\hat{q}) - p \cdot (\hat{q} - p) = q \cdot p - L^*(p)$$

Et en prenant le suprêmum sur les p on obtient que pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, $L(q) \leq L^{**}(q)$, d'où $L = L^{**}$ sur $\mathbb{R}^n$. □

Remarque 2.3 *Bien qu'on demande ici que la fonction L soit convexe pour définir sa transformée de Legendre ce n'est pas une hypothèse nécessaire pour prouver que L^* est convexe et de plus on a toujours le résultat $L^{**} \leq L$.*

3 Les difficultés liées aux équations

3.1 Méthodes des caractéristiques

3.1.1 Dans le cas général de notre problème

Considérons le problème :

$$\partial_t u + H(t, x, \partial_x u, u) = 0 \tag{3}$$

Avec $u = u(t, x)$, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u(0, x) = u_0(x)$ où u_0 est connue.

La méthode des caractéristiques consiste à établir un système d'équations qui par sa résolution permettra de reconstruire une solution u. L'idée de cette méthode est de partir d'un point du bord $(0, x(0))$ où $x(0) \in \mathbb{R}^n$, car on a la connaissance de u au temps 0 où elle vaut u_0, et de construire une trajectoire appelée caractéristique sur laquelle on peut calculer la valeur de la solution. Cette méthode permet d'obtenir dans certains cas une solution classique de classe $\mathcal{C}^2$ dans la mesure où le choix de $x(0)$ est arbitraire.

Supposons que u et H sont $\mathcal{C}^2$. Considérons une paramétrisation $x(t)$ et posons :

$$z(t) = u(t, x(t)) \quad \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$p(t) = \partial_x u(t, x(t)) \quad \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

En dérivant (4) et (5) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} z' &= \partial_t u + \partial_x u \cdot x' \\ &= -H(t,x,p,z) + p \cdot x' \qquad \text{par (3)} \end{aligned}$$

$$p' = \partial_{tx} u + \partial_{xx} u \cdot x'$$

Maintenant dérivons (3) par rapport à x pour obtenir :

$$\partial_{xt} u + \partial_x H(t,x,\partial_x u, u) + \partial_p H(t,x,\partial_x u, u)\partial_{xx} u + \partial_z H(t,x,\partial_x u, u)\partial_x u = 0 \qquad (6)$$

Puis en posant $x' = \partial_p H(t,x,p,z)$ et en prenant en compte notre paramétrisation, (6) se réécrit :

$$p' + \partial_x H(t,x,p,z) + \partial_z H(t,x,p,z)p = 0$$

On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x' = \partial_p H(t,x,p,z) \\ p' = -\partial_x H(t,x,p,z) - \partial_z H(t,x,p,z)p \\ z' = -H(t,x,p,z) + p\partial_p H(t,x,p,z) \end{cases}$$

On remarque que si H ne prend pas en paramètre u les deux premières équations du système forment un système Hamiltonien.

3.1.2 Dans un cas simple

Nous allons montrer dans cette sous partie que, même dans le cas particulier où H ne dépend que de $\partial_x u$, la méthode des caractéristiques ne permet pas de construire u globalement et donc il faudra définir une classe convenable de solutions faibles pour résoudre le problème sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.
Le système caractéristique obtenu dans la dernière sous partie se réduit ici à :

$$\begin{cases} x' = \partial_p H(p) \\ p' = 0 \\ z' = -H(p) + p\partial_p H(p) \end{cases}$$

Ainsi on peut exprimer x, p et z :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \partial_p H(p(t))t \\ p(t) = \partial_x u_0(x(0)) \\ z(t) = (p(t)\partial_p H(p(t)) - H(p(t)))t + u_0(x(0)) \end{cases} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = x(0) + \partial_p H(\partial_x u_0(x(0)))t \\ p(t) = \partial_x u_0(x(0)) \\ z(t) = (\partial_x u_0(x(0))\partial_p H(\partial_x u_0(x(0))) - H(\partial_x u_0(x(0))))t + u_0(x(0)) \end{cases} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

Et donc pour un temps donné, la valeur de $x(t)$, $p(t)$ et $z(t)$ ne dépend que des conditions initiales u_0 et du point du bord choisi $x(0)$. Pour mettre en évidence cette dépendance, on remplace $x(t)$, $p(t)$ et $z(t)$ par $X(t, x_0)$, $Y(t, x_0)$, $Z(t, x_0)$ pour obtenir :

$$\begin{cases} X(t, x_0) = x_0 + \partial_p H(\partial_x u_0(x_0))t \\ P(t, x_0) = \partial_x u_0(x_0) \\ Z(t, x_0) = (\partial_x u_0(x_0)\partial_p H(\partial_x u_0(x_0)) - H(\partial_x u_0(x_0)))t + u_0(x_0) \end{cases} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

On aimerait reconstruire u à partir de ce système. Par définition de Z, $Z(t, x_0) = u(t, X(t, x_0))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Fixons $t \in \mathbb{R}_+$, le but est alors d'inverser l'application : $h_t : y \in \mathbb{R}^n \mapsto X(t, y)$ car en faisant cela on pourra donner une expression de u au temps t :

$$u(t, y) = Z(t, h_t^{-1}(y)) \tag{7}$$

Si ce n'est pas possible, alors u ne peut pas être différentiable partout car si c'était le cas la dérivée partielle de u par rapport à x serait bien définie. Or en reconstruisant celle-ci grâce à P on obtient :

$$\partial_x u(t, y) = P(t, h_t^{-1}(y))$$

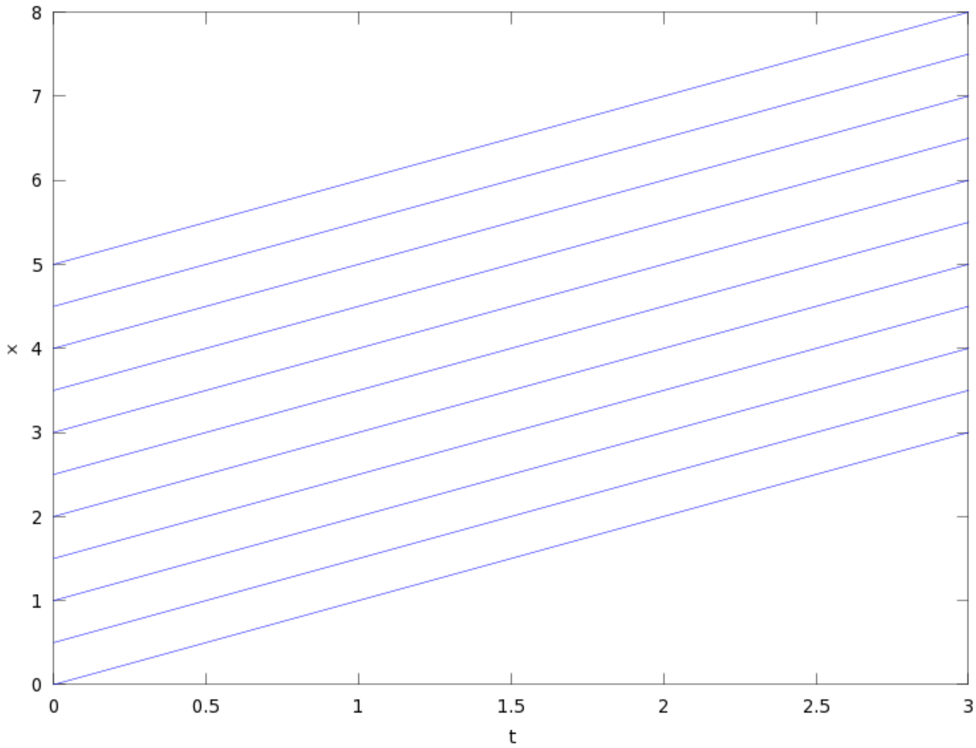
qui ne peut pas être définie si h_t n'est pas inversible.

On va prendre une série d'exemples pour comprendre ces formules.

Exemple 3.1 *Prenons l'exemple où* $u_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto kx$ $(k \in \mathbb{R})$ *et* $H : p \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}p^2$ *alors le système est le suivant :*

$$\begin{cases} X(t,y) = y + kt \\ P(t,y) = k & (\forall t \in \mathbb{R}_+) \\ Z(t,y) = \frac{1}{2}k^2 t + kx_0 \end{cases}$$

Et on remarque que les caractéristiques ne se croisent pas (le dessin est fait pour $k = 1$*) :*



Et donc, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $h_t^{-1}(x) = x - kt$. *On peut donc en déduire la valeur de u :*

$$u(t,x) = k\left(x - \frac{kt}{2}\right)$$

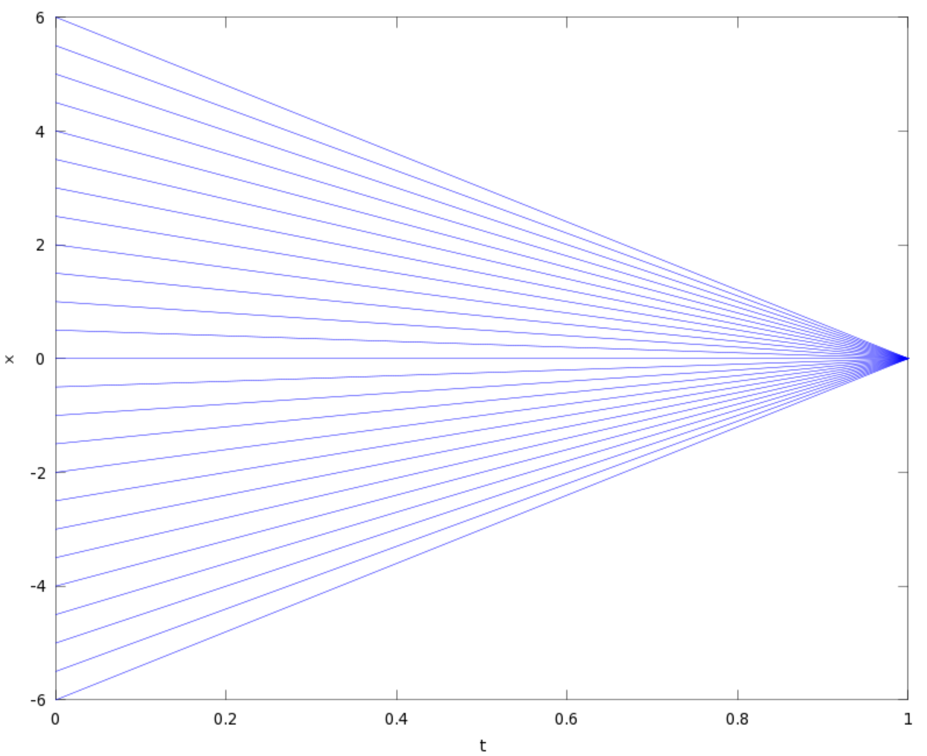
Exemple 3.2 *Maintenant, prenons* $u_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ *et* $H : p \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}p^2$ *alors le système devient :*

$$\begin{cases} X(t,y) = y - yt \\ P(t,y) = -y & (\forall t \in \mathbb{R}_+) \\ Z(t,y) = \frac{1}{2}y^2 t - \frac{1}{2}y^2 \end{cases}$$

Ainsi $h_t^{-1}(x) = \frac{x}{1-t}$ *pour* $t \in [0,1[$ *et donc si on reconstruit u à partir de Z et* h_t^{-1}*, on obtient :*

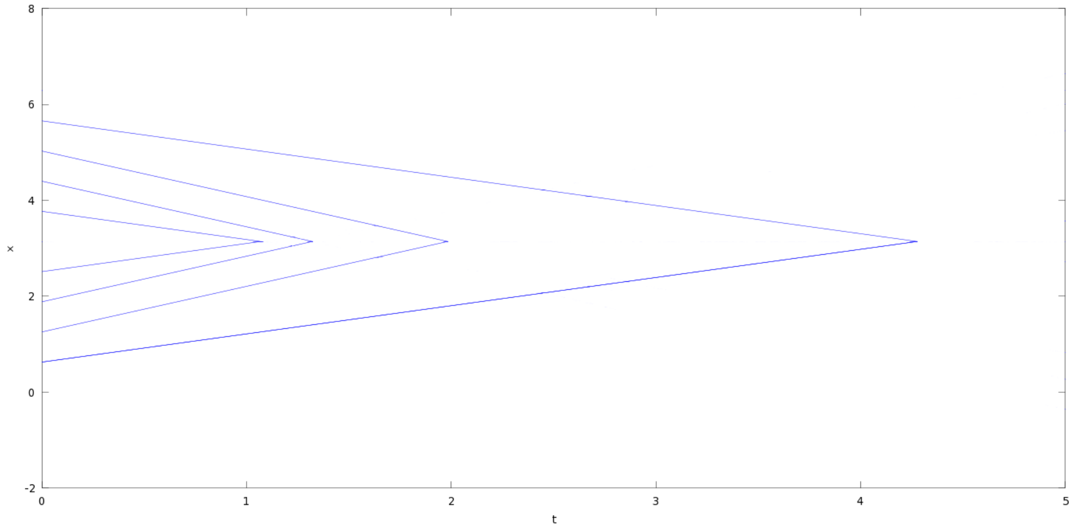
$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{tx^2}{(1-t)^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-t)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{x^2}{t-1}
\end{aligned}
$$

Et on voit qu'au point $(1,0)$ *on a la perte de continuité de u et donc de dérivabilité. En fait les caractéristiques se croisent en ce point :*



En 0 *l'application* h_1 *définie plus haut ne peut pas être inversée car on a* $h_1^{-1}(0) = \mathbb{R}$.

Exemple 3.3 *Un même phénomène se produit lorsqu'on garde le même Hamiltonien mais en changeant la condition initiale* $u_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto -cos(x)$. *Les caractéristiques se croisent mais cette fois en des temps différents :*



Par la périodicité de cos ce dessin va apparaitre sur tous les intervalles du type $[0, 2\pi] + 2k\pi$*, on se restreint donc à* $[0, 2\pi]$*. Le système est le suivant :*

$$\begin{cases} X(t, y) = y + sin(y)t \\ P(t, y) = sin(y) \\ Z(t, y) = \frac{t}{2} sin^2(y) - cos(y) \end{cases} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

Ainsi on remarque que les singularités apparaissent sur la droite $x = \pi$*. Soit* $\delta \in]0, \pi[$*. Les caractéristiques partant du point* $(0, \pi + \delta)$ *et* $(0, \pi - \delta)$ *se croisent au temps* $\hat{t} = \frac{\delta}{sin(\pi - \delta)}$ *où* $X(\hat{t}, \pi - \delta) = X(\hat{t}, \pi + \delta) = \pi$*. On ne peut donc pas inverser* h_t*. On peut néanmoins calculer* $Z(\hat{t}, \pi - \delta)$ *et* $Z(\hat{t}, \pi + \delta)$ *et voir que ces quantités sont égales. Donc on pourrait quand même poser* $u(\hat{t}, \pi) = Z(\hat{t}, \pi - \delta)$*. Cependant* $P(\hat{t}, \pi - \delta) = -P(\hat{t}, \pi + \delta)$ *et ceci pose un vrai problème.*

On ne peut donc pas déduire ici de solution classique sur tout l'espace du problème. Une manière possible d'obtenir une telle solution serait de se restreindre à un intervalle qui garantit que les caractéristiques ne se croisent pas : par exemple en considérant que les $x \in [\pi, 2\pi]$ *ou de manière symétrique que les* $x \in [0, \pi]$*.*

Dans ces deux derniers exemples on voit que la méthode des caractéristiques ne permet pas de reconstruire une solution classique sur tout l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ puisqu'on a la perte de dérivabilité en certains points. Dans le cas plus général (3) on ne peut alors pas espérer que de telles solutions existent sur ce même espace. Il est donc nécessaire de définir une notion de solutions plus faibles qui seront définies globalement et qui concorderont avec les solutions classiques lorsque celles-ci peuvent être définies globalement : par exemple lorsqu'on se place dans $\mathbb{R}$ et que le Hamiltonien H est affine, il y a l'existence d'une solution globale de classe C^2

(car dans ce cas les caractéristiques ne se croisent pas).

3.2 Solutions définies presque partout

Une alternative à ce problème est de définir une classe de solutions faibles : celles qui résolvent l'équation presque partout. Mais cette définition n'assure pas l'unicité de la solution. En effet, le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2 = 0 \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

admet plusieurs solutions qui résolvent le problème presque partout mais qui ne sont pas égales presque partout. La fonction constante égale à 0 en est une. Mais aussi toutes les fonctions u définies pour $a > 0$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, u(t,x) = \begin{cases} 0 & si\ |x| \geq at \\ a|x| - a^2 t & sinon \end{cases}$$

Cette définition crée une classe de fonctions qui contient les solutions classiques du problème mais qui n'admet pas assez de contraintes pour assurer l'unicité de la solution. Ce défaut nous oblige à donner une autre définition de solutions faibles.

4 Les Solutions de viscosité

Le bon concept est celui des solutions de viscosité qui, comme on va le voir, assure l'existence et l'unicité de telles solutions sous des conditions raisonnables. Il y a plusieurs définitions équivalentes pour ces solutions et pour comprendre le lien entre ces définitions, on fera références aux notions d'analyse non lisse vues en section 2.

4.1 Définitions

Considérons l'équation :

$$\partial_t u + H(t, x, \partial_x u, u) = 0 \tag{8}$$

Avec pour condition initiale $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Donc, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(0, \cdot) = u_0$ et $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 4.1 *Pour ce qui suit on choisira* $p \in D^* u(t,x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(* \in \{+,-\})$ *que l'on décomposera comme* $p = (p_1, p_2)$ *avec* $p_1 \in \mathbb{R}$ *et* $p_2 \in \mathbb{R}^n$. *Formellement* p_1 *correspond à la dérivée partielle par rapport au temps et* p_2 *celle par rapport à* x.

Définition 4.1.1 *Soit* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(i) On dit que u est une sous-solution de viscosité pour (8) *si :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \forall (p_1,p_2) \in D^+u(t,x), \quad p_1 + H(t,x,p_2,u(t,x)) \leq 0 \tag{9}$$

(ii) On dit que u est une sur-solution de viscosité pour (8) *si :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \forall (p_1,p_2) \in D^-u(t,x), \quad p_1 + H(t,x,p_2,u(t,x)) \geq 0 \tag{10}$$

(iii) u est une solution de viscosité si elle vérifie à la fois (9) *et* (10)

Définition 4.1.2 *Soit* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(i) On dit que u est une sous-solution de viscosité pour (8) *si pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *on a :*

$u - \varphi$ *admet un maximum local en* (t,x) *un point de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ *alors*

$$\partial_t \varphi(t,x) + H(t,x,\partial_x \varphi(t,x), u(t,x)) \leq 0 \tag{11}$$

(ii) On dit que u est une sur-solution de viscosité pour (8) *si pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *on a :*

$u - \varphi$ *admet un minimum local en* (t,x) *un point de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ *alors*

$$\partial_t \varphi(t,x) + H(t,x,\partial_x \varphi(t,x), u(t,x)) \geq 0 \tag{12}$$

(iii) u est une solution de viscosité si elle vérifie à la fois (11) *et* (12)

Remarque 4.2 *Les deux définitions énoncées sont équivalentes au vue de la Proposition 2.1.*

Remarque 4.3 *Si une solution de viscosité est différentiable en* (t,x) *alors elle vérifie exactement* (8) *en ce point par la Proposition 2.2.*

Dans la suite on va montrer des résultats d'existence et d'unicité dans le cas où $H = H(t,x,p)$. Le problème (8) devient donc :

$$\begin{cases} \partial_t u + H(t,x,\partial_x u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases} \tag{13}$$

4.2 Existence des solutions de viscosité

Dans cette section nous allons présenter la méthode dite de *vanishing viscosity* qui est à l'origine du nom des solutions de viscosité et qui en garantit l'existence.

Comme on l'a vu, le problème (13) n'admet pas en général des solutions classiques. Fixons $\varepsilon > 0$ et ajoutons un terme à notre équation qui va nous permettre de la régulariser :

$$\partial_t u_\varepsilon + H(t,x,\partial_x u_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon \tag{14}$$

Δu_ε désigne le Laplacien de u_ε. Avec des conditions initiales régulières, ce problème admet une solution $\mathcal{C}^2$. L'objectif de cette méthode est de faire tendre $\varepsilon \to 0$ et espérer qu'il existe u limite de cette suite de fonctions qui sera une solution au moins de viscosité pour notre problème. On aimerait en fait que cette convergence se fasse de manière uniforme sur tout compact car dans ce cas on a un résultat d'existence :

Théorème 4.1 *Soient* $(\Phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs convergents vers 0 et* $(u_{\Phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* $\mathcal{C}^2$ *solution de* (14) *pour* $\varepsilon = \Phi(n)$*, telle qu'il existe u :*

$$u_{\Phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} u$$

sur tout compact.

Alors u est une solution de viscosité du problème (13).

Remarque 4.4 *Dans la pratique on peut souvent se ramener à ces hypothèses en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli. Nous reviendrons sur cette remarque en fin de paragraphe.*

Nous allons commencer par énoncer et prouver un lemme qui nous sera utile dans la preuve du théorème :

Lemme 4.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convergent uniformément vers u, alors il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \\ u_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \\ u_n - \varphi \text{ admet un maximum local en } x_n, \text{ pour tout } n \text{ à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Preuve On se place dans les hypothèses du lemme. Comme $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x, pour $\rho > 0$ assez petit, il existe $\varepsilon_\rho > 0$ telle que :

$$|x - y| = \rho \Rightarrow u(y) - \varphi(y) + \varepsilon_\rho < u(x) - \varphi(x)$$

Et par l'uniforme convergence de u_n vers u, il existe $N_\rho \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \geqslant N_\rho, \forall z \in \Omega, |u_n(z) - u(z)| < \frac{\varepsilon_\rho}{4}$$

On en conclut en utilisant les deux inégalités que :

$$|x - y| = \rho \Rightarrow u_n(y) - \varphi(y) + \frac{\varepsilon_\rho}{2} < u_n(x) - \varphi(x)$$

Ainsi on en conclut que $u_n - \varphi$ admet un maximum local x_n sur $\overline{B(x, \rho)}$. Et ceci est vrai pour tout $n > N_\rho$. D'autre part, comme ρ est arbitrairement petit on a $x_n \to x$ et par l'uniforme convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u, on a : $u_n(x_n) \to u(x)$.

Preuve (du Théorème) On veut montrer que pour $\varphi \in \mathcal{C}^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local en (t, x) on ait :

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, \partial_x \varphi(t, x)) \leq 0 \tag{15}$$

On se restreint au cas où $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t, x) puisqu'en posant pour tout $(s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\xi(s, y) = \varphi(s, y) + |y - x|^2 + |s - t|^2$, on a que $u - \xi$ admet un maximum local strict en (t, x). De plus, $\partial_x \xi(t, x) = \partial_x \varphi(t, x)$ et $\partial_t \xi(t, x) = \partial_t \varphi(t, x)$ ainsi ξ satisfait (15) si et seulement si φ aussi. Donc dans la suite de la preuve on suppose que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t, x).

Dans un premier temps on suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^2$:

Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_{\Phi(n)}$ converge vers u uniformément sur tout compact, on se restreint à $\overline{B((t,x),\varepsilon)}$ pour avoir la convergence uniforme. On peut donc appliquer le lemme précédent et donc il existe $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} (t_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (t,x) \\ u_{\Phi(n)}(t_n, x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(t,x) \\ u_{\Phi(n)} - \varphi \text{ admet un maximum local en } (t_n, x_n)\text{, à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Ainsi, $\partial_\star u_{\Phi(n)}(t_n, x_n) = \partial_\star \varphi(t_n, x_n)$ où $\star \in \{t, x\}$ et
$\Delta u_{\Phi(n)}(t_n, x_n) \leq \Delta\varphi(t_n, x_n)$. De plus comme $u_{\Phi(n)}$ résout (14) on obtient :

$$\partial_t \varphi(t_n, x_n) + H(t_n, x_n, \partial_x \varphi(t_n, x_n)) \leq \Phi(n)\Delta\varphi(t_n, x_n)$$

Et en faisant tendre $n \to +\infty$ et par continuité de H on en conclut (15) mais seulement pour $\varphi \in \mathcal{C}^2$. Il reste alors à étendre ce résultat pour $\varphi \in \mathcal{C}^1$:

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t, x). Je considère une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^2$ convergent uniformément vers φ sur tout compact et telle que leurs dérivées convergent aussi uniformément sur tout compact vers la dérivée de φ. En faisant la même restriction que toute à l'heure et par le lemme précédent, il existe $(t_n^{'}, x_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} (t_n^{'}, x_n^{'}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (t,x) \\ \varphi_n(t_n^{'}, x_n^{'}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,x) \\ u - \varphi_n \text{ admet un maximum local en } (t_n^{'}, x_n^{'}) \text{ à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

On conclut donc par la première partie qu'à partir d'un certain rang :

$$\partial_t \varphi_n(t_n^{'}, x_n^{'}) + H(t_n^{'}, x_n^{'}, \partial_x \varphi_n(t_n^{'}, x_n^{'})) \leq 0$$

Et donc à la limite, par le convergence uniforme et la continuité de H, on en conclut (15).

On peut raisonner de la même manière pour obtenir l'inégalité inverse et en déduire que u est bien une solution de viscosité. $\square$

Remarque 4.5 *Pour justifier l'existence d'une suite de fonctions $\mathcal{C}^2$ telle qu'elle converge uniformément vers une fonction u et telle que la suite des dérivées converge uniformément vers la dérivée de u on fait appel au produit de convolution et aux suites régularisantes.*

En fait, on va admettre cela, la méthode dite de *vanishing viscosity* permet de construire une suite de fonction uniformément bornée et uniformément équicontinue indexée par ε. Donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli, il est possible d'en extraire une suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction u et par le Théorème 4.1 cette limite est une solution de viscosité. On a donc bien l'existence d'au moins une solution de viscosité du problème.

4.3 Unicité des solutions de viscosité

Nous allons dans cette partie présenter un résultat d'unicité des solutions de viscosité. Dans un premier temps on va le montrer dans le cas où $H = H(x,p)$ et ensuite étendre ce résultat où $H = H(t,x,p)$.

Théorème 4.2 *Supposons que le Hamiltonien H satisfait les conditions de continuité de Lipschitz :*

$$\begin{cases} |H(x,p) - H(x,q)| \leq C|p-q| \\ |H(x,p) - H(y,p)| \leq C|x-y|(1+|p|) \end{cases} \quad (C > 0)$$

Alors, il existe au plus une solution de viscosité uniformément continue et bornée du problème (13).

Remarque 4.6 *Le résultat précédent va être montré dans le cas où* (t,x) *vit dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *pour rester dans le cadre des équations de Hamilton-Jacobi traitées dans ce mémoire. Mais on peut en fait restreindre la preuve à l'ensemble* $[0,T] \times \overline{B(\overline{x},\varepsilon)}$ *pour* $(T,\overline{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$*. En effet la condition initiale au temps 0 suffit à garantir l'unicité de telles solutions.*

Remarque 4.7 *En résumé, grâce à ce théorème on a l'unicité des solutions de viscosité uniformément continues et bornées. Et par la section précédente on a l'existence de solutions de viscosité seulement continues. Donc pour que les deux résultats concordent parfaitement il faudrait l'unicité des solutions de viscosité continues.*

Corollaire 4.1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, il existe au plus une solution de viscosité continue du problème* (13).

Preuve (du Théorème) On suppose qu'il existe deux solutions de viscosité uniformément continues et bornées du problème (13) différentes, u et $\overline{u}$. On va dans un premier temps montrer que $u \leq \overline{u}$ par l'absurde : on suppose qu'il existe $(t^*,x^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, telle que $u(t^*,x^*) > \overline{u}(t^*,x^*)$.
Etape 1 :
On pose $\sigma := \sup\{u(t,x) - \overline{u}(t,x) | (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\} > 0$. Soit $(\varepsilon, \lambda) \in]0,1[^2$, on pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall (t,s) \in [0,T]^2, \Phi(t,s,x,y) := u(t,x) - \overline{u}(s,y) - \lambda(t+s) - \frac{1}{\varepsilon^2}(|x-y|^2 + (t-s)^2) - \varepsilon(|x|^2 + |y|^2)$$

Et comme u et $\overline{u}$ sont bornées, il existe (t_0, s_0, x_0, y_0) telle que :

$$\Phi(t_0, s_0, x_0, y_0) = \max\{\Phi(t,s,x,y) | (t,s,x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2\}$$

Etape 2 :

On a :

$$\Phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geqslant \sup\{\Phi(t,t,x,x) | (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\} \tag{16}$$

On peut fixer ε et λ assez petit pour avoir :

$$\sup\{\Phi(t,t,x,x) | (t,x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2\} \geqslant \frac{\sigma}{2} \tag{17}$$

D'autre part, $\Phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \Phi(0,0,0,0)$, d'où :

$$\overline{u}(0,0) - u(0,0) + u(t_0, x_0) - \overline{u}(s_0, y_0) \geq \lambda(t_0 + s_0) + \frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2) + \varepsilon(|x_0|^2 + |y_0|^2) \tag{18}$$

Maintenant en faisant tendre ε vers 0 et par l'inégalité (18) on en déduit :

$$\begin{cases} |x_0 - y_0| = O(\varepsilon) \\ |t_0 - s_0| = O(\varepsilon) \end{cases} \quad (\textit{quand } \varepsilon \to 0) \tag{19}$$

De même,

$$\begin{cases} \varepsilon |x_0|^2 = O(1) \\ \varepsilon |y_0|^2 = O(1) \end{cases} \quad (\textit{quand } \varepsilon \to 0)$$

D'où,

$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{2}} |x_0| = O(1) \\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} |y_0| = O(1) \end{cases} \quad (\textit{quand } \varepsilon \to 0)$$

Donc $\varepsilon^{\frac{1}{2}}(|x_0| + |y_0|) = O(1)$, ainsi :

$$\varepsilon(|x_0| + |y_0|) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \tag{20}$$

Etape 3 :

Comme $\Phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \Phi(t_0, t_0, x_0, x_0)$, on a :

$$u(t_0, x_0) - \overline{u}(s_0, y_0) - \lambda(t_0 + s_0) - \frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2) - \varepsilon(|x_0|^2 + |y_0|^2)$$
$$\geq u(t_0, x_0) - \overline{u}(t_0, x_0) - 2\lambda t_0 - 2\varepsilon |x_0|^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{u}(t_0, x_0) - \overline{u}(s_0, y_0) + \varepsilon(x_0 + y_0) \cdot (x_0 - y_0)$$
$$\geq \frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2) \tag{21}$$

Et en prenant en compte (19) et (20) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire, on déduit de (21) que $\varepsilon(x_0 + y_0) \cdot (x_0 - y_0) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, par uniforme continuité de $\overline{u}$ on a $\overline{u}(x_0, t_0) - \overline{u}(y_0, s_0) \to 0$. Donc :

$$\begin{cases} |x_0 - y_0| = o(\varepsilon) \\ |t_0 - s_0| = o(\varepsilon) \end{cases}$$

Etape 4 :

On note ω le module de continuité de u et $\overline{\omega}$ celui de $\overline{u}$. On a donc $\omega(r) \to 0$ quand $r \to 0$ (de même pour $\overline{\omega}$) et par (16) et (17) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} &\leq \Phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \\ &\leq u(t_0, x_0) - \overline{u}(s_0, y_0) \\ &= u(t_0, x_0) - u(0, x_0) + u(0, x_0) - \overline{u}(0, x_0) \\ &\quad + \overline{u}(0, x_0) - \overline{u}(t_0, x_0) + \overline{u}(t_0, x_0) - \overline{u}(s_0, y_0) \\ &\leqslant \omega(t_0) + \overline{\omega}(t_0) + \overline{\omega}(o(\varepsilon)) + 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour ε assez petit on déduit que $\frac{\sigma}{4} \leqslant \omega(t_0) + \overline{\omega}(t_0)$ et donc il existe $0 < \mu < t_0$. On raisonne de la même manière pour obtenir $0 < \mu < s_0$ quitte à réduire μ. Cela prouve que $t_0 > 0$ et que $s_0 > 0$.

Etape 5 :

Considérons la fonction $h : (t, x) \mapsto \Phi(t, s_0, x, y_0)$. On sait qu'elle admet un maximum en (t_0, x_0). Maintenant on pose $v = u - h$. On peut remarquer que v est

$\mathcal{C}^1$ et que $u - v$ admet un maximum en (t_0, x_0). De plus, comme $t_0 > 0$ et que u est une solution, en particulier une sous-solution, de viscosité du problème (13) , on en déduit :

$$\partial_t v(t_0, x_0) + H(x_0, \partial_x v(t_0, x_0)) \leq 0$$

D'où :

$$\lambda + 2\frac{t_0 - s_0}{\varepsilon^2} + H(x_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) \leq 0 \tag{22}$$

On refait maintenant strictement le même raisonnement en considérant $\overline{h}$: $(s, y) \mapsto -\Phi(t_0, s, x_0, y)$ qui admet un minimum en (s_0, y_0). On pose $\overline{v} = \overline{u} - \overline{h}$ et comme tout à l'heure, comme $\overline{u}$ est une solution, en particulier une sur-solution, de viscosité on en déduit que :

$$0 \leq -\lambda + 2\frac{t_0 - s_0}{\varepsilon^2} + H(y_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon y_0) \tag{23}$$

Etape 6 :

Au vu des relations (22) et (23), on a :

$$2\lambda \leq H(y_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon y_0) - H(x_0, \frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0)$$

Et donc par hypothèse sur H,

$$\lambda \leq C\varepsilon(|x_0| + |y_0|) + C|x_0 - y_0|(1 + \frac{|x_0 - y_0|}{\varepsilon^2} + \varepsilon(|x_0| + |y_0|))$$

Et la quantité de droite converge vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ donc on aboutit à la contradiction $0 < \lambda = 0$ ainsi $u \leq \overline{u}$. On prouve alors l'inégalité inverse en inversant le rôle de u et $\overline{u}$. Et donc $u = \overline{u}$. $\square$

Remarque 4.8 *Dans la preuve nous avons utilisé que le fait que u est sous-solution de viscosité et $\overline{u}$ est sur-solution de viscosité pour conclure que $u \leq \overline{u}$ quand ils ont la même condition initiale : la preuve repose sur un principe de comparaison.*

Remarque 4.9 *On peut facilement généraliser cette preuve au cas où $H = H(t, x, p)$. Il suffit au départ de prendre l'hypothèse : $|H(t, x, p) - H(t, y, p)| \leq C(|x - y| + |t - s|)(1 + |p|)$ et reprendre la preuve précédente.*

Preuve (du Corollaire) Supposons qu'il existe deux solutions de viscosité u et $\overline{u}$ continues et différentes du même problème alors il existe $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ telle que $u(t, x) \neq \overline{u}(t, x)$ on peut donc appliquer le théorème d'unicité en considérant l'ensemble $[0, T] \times \overline{B(x, \varepsilon)}$ avec T assez grand , puisque sur cet ensemble u et $\overline{u}$ sont uniformément continues et bornées, et aboutir à une contradiction. $\square$

5 Cas dans le calcul des variations

Maintenant que nous sommes familiers avec les solutions de viscosité, nous allons nous intéresser au problème du calcul des variations et au lien entre ce problème et les équations de Hamilton-Jacobi. Posons proprement le problème :

Soient T $\in]0, +\infty]$, $Q_T :=]0, T[\times\mathbb{R}^n$. On suppose donnés $L : \overline{Q_T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de coût appelé aussi le Lagrangien et $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ le coût initial. Le but du problème est de minimiser la quantité suivante :

$$J_t[y] = \int_0^t L(s, y(s), y'(s))ds + u_0(y(0))$$

Sous les "trajectoires admissibles" ou les "arcs admissibles" :

$$\mathcal{A}(t, x) = \{y \ \in \ W^{1,1}([0, t], \overline{Q_T} \times \mathbb{R}^n)|y(t) = x\}$$

On définit la fonction valeur $u(t, x) = \inf\{J_t[y]|y \in \mathcal{A}(t, x)\}$ pour tout $(t, x) \in \overline{Q_T} \times \mathbb{R}^n$

On va énoncer un théorème important en programmation dynamique.

Théorème 5.1 (Principe de programmation dynamique) *Soit* $(t, x) \in Q_T$ *et* $y \in \mathcal{A}(t, x)$. *Alors :*

$$\forall \hat{t} \in [0, t], u(t, x) \leq \int_{\hat{t}}^t L(s, y(s), y'(s))ds + u(\hat{t}, y(\hat{t})) \tag{24}$$

De plus y *est optimale si et seulement si il y a égalité dans* (24) *pour tout* $\hat{t} \in [0, t]$.

Preuve Fixons $\hat{t}$ dans $[0, t]$. Soit $y \in \mathcal{A}(t, x)$ et $z \in W^{1,1}([0, \hat{t}])$ telle que $z(\hat{t}) = y(\hat{t})$ alors la concaténation :

$$\Gamma(s) = \begin{cases} z(s) \ si \ s \in [0, \hat{t}] \\ y(s) \ si \ s \in]\hat{t}, t] \end{cases}$$

est dans $\mathcal{A}(t, x)$. Ainsi on a :

$$u(t, x) \leq \int_{\hat{t}}^t L(s, y(s), y'(s))ds + \int_0^{\hat{t}} L(s, z(s), z'(s))ds + u_0(z(0))$$

Et comme ceci est vrai quelque soit $z \in \mathcal{A}(\hat{t}, y(\hat{t}))$. On obtient :

$$u(t, x) \leq \int_{\hat{t}}^t L(s, y(s), y'(s))ds + u(\hat{t}, y(\hat{t}))$$

C'est ce qu'on voulait. Maintenant prouvons l'équivalence.

S'il y a égalité dans (24) il suffit de prendre $\hat{t} = 0$ et conclure que y est optimale. Inversement si y est optimale alors :

$$u(t,x) = \int_0^t L(s, y(s), y'(s))ds + u_0(y(0)) \leq \int_{\hat{t}}^t L(s, z(s), z'(s))ds + u(\hat{t}, z(\hat{t}))$$

Pour tout $z \in \mathcal{A}(t,x)$ grâce à (24). En prenant $z = y$ sur $[\hat{t}, t]$ on obtient :

$$J_{\hat{t}}[y] \leq u(\hat{t}, y(\hat{t}))$$

Et par définition de u cette inégalité nous donne l'égalité. □

Nous allons dans la suite étudier ce problème dans un cadre plus restreint.

5.1 Formule de Hopf-Lax

Ici on se place dans le cas où $L(t,x,q) = L(q)$ et où $T = +\infty$. D'autre part on fait les hypothèses suivantes :

$$L \textit{ est convexe et } \frac{L(q)}{|q|} \longrightarrow +\infty \qquad (\textit{quand } |q| \longrightarrow +\infty) \tag{25}$$

$$u_0 \textit{ est lipschitzienne} \tag{26}$$

Théorème 5.2 (Formule de Hopf-Lax) *On montre que sous ces hypothèses, u est de la forme :*

$$u(t,x) = \min_y \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y) \right\} \tag{27}$$

Remarque 5.1 *Ici on arrive à exprimer u car on va prouver que certaines droites sont des trajectoires optimales.*

Preuve Soit (t,x) fixé dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Par hypothèse sur L et comme u_0 est lipschitzienne, le minimum est bien défini. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, on va montrer ce résultat par doubles inégalités :

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On pose $\Gamma(s) = y + \frac{s}{t}(x-y)$ pour tout $s \in [0,t]$ alors $\Gamma \in \mathcal{A}(t,x)$ et par définition de u,

$$u(t,x) \leq J_t[\Gamma] = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y)$$

Et comme ceci est vrai pour tout y, on a la première inégalité.
Inversement, soit $\Gamma \in \mathcal{A}(t,x)$. Comme L est convexe, en appliquant l'inégalité de Jensen on a :

$$L\left(\frac{x-\Gamma(0)}{t}\right) = L\left(\frac{1}{t}\int_0^t \Gamma^{'}(s)ds\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^t L(\Gamma^{'}(s))ds$$

$$\Leftrightarrow tL\left(\frac{x-\Gamma(0)}{t}\right) + u_0(\Gamma(0)) \leq J_t[\Gamma]$$

Et en prenant l'infinimum sur $\mathcal{A}(t,x)$ on en déduit le résultat. □

Exemple 5.1 *Si $L(q) = \frac{1}{2}q^2$ et $u_0(z) = z$ alors la formule de Hopf-Lax nous donne :*

$$u(t,x) = \min\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{x-y}{t}\right)^2 + y | y \in \mathbb{R}\right\}$$

Et pour x et t fixés, une étude de fonction nous montre que le minimum est atteint pour $y = x - t$, ainsi :

$$u(t,x) = x - \frac{t}{2}$$

Théorème 5.3 *Sous les hypothèses* (25) *et* (26)*, u est lipschitzienne.*

Preuve Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$. La formule de Hopf-Lax nous donne :

$$u(t,x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y)\right\}$$

En particulier,

$$u(t,x) \leq tL(0) + u_0(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(t,x) - u_0(x)}{t} \leq L(0) \tag{28}$$

Maintenant soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u(t,x) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(t,x) - u_0(y)}{t} = L\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; L\left(\frac{x-y}{t}\right) = \frac{u(t,x)-u_0(x)}{t} + \frac{u_0(x)-u_0(y)}{t}$$

Donc par (28) et comme u_0 est lipschitzienne, en notant K sa constante de lipschitz, on a :

$$L\left(\frac{x-y}{t}\right) \leq L(0) + K\frac{|x-y|}{t} \tag{29}$$

De plus comme K est fixé, l'hypothèse (25) implique qu'il existe $R > 0$ telle que :

$$\forall q \in \overline{\overline{B(0,R)}^c}, L(q) \geq L(0) + K|q|$$

Ainsi, au vu de (29) on a $\left(\frac{x-y}{t}\right) \in \overline{B(0,R)}$.

Maintenant, soit $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ et soit $\hat{y}$ tel que :

$$\frac{x-y}{t} = \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\hat{t}}$$

$$\Leftrightarrow \; \hat{y} = \hat{x} - \frac{\hat{t}}{t}(y-x)$$

La formule de Hopf-Lax implique l'inégalité suivante :

$$u(\hat{t},\hat{x}) - u(t,x) \leq \hat{t}L\left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\hat{t}}\right) + u_0(\hat{y}) - tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - u_0(y)$$

$$\Leftrightarrow u(\hat{t},\hat{x}) - u(t,x) \leq (\hat{t}-t)L\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(\hat{y}) - u_0(y)$$

et donc :

$$u(\hat{t},\hat{x}) - u(t,x) \leq \max\{L(z)|z \in \overline{B(0,R)}\}|\hat{t}-t| + K|\hat{y}-y|$$

Et en inversant le rôle joué par $(\hat{x},\hat{t},\hat{y})$ et (x,t,y) on en déduit :

$$|u(\hat{t},\hat{x}) - u(t,x)| \leq \max\{L(z)|z \in \overline{B(0,R)}\}|\hat{t}-t| + K|\hat{y}-y|$$

Et comme le choix de $(x,\hat{x},t,\hat{t})$ est arbitraire, on en déduit que u est lipschitzienne. □

Remarque 5.2 *Par le théorème de Rademacher on en conclut que u est dérivable presque partout.*

Exemple 5.2 *Par l'exemple 5.1, pour* $u_0(x) = x$ *et* $L(p) = \frac{1}{2}p^2$ *la formule de Hopf-Lax donne* $u(t,x) = x - \frac{t}{2}$. *De plus, on a vu que* $L^* = L$ *dans ce cas. Et maintenant intéressons nous au problème :*

$$\begin{cases} \partial_t w + H(\partial_x w) = 0 \\ w(0,\cdot) = u_0 \end{cases} \tag{30}$$

où $H = L^*$ *et comme* u_0 *est affine on peut reconstruire la solution du problème grâce à la méthode des caractéristiques. Par l'exemple 3.1 la solution reconstruite est* $w(t,x) = x - \frac{t}{2}$. *On remarque alors que* $w = u$.

On peut en fait trouver un lien entre la formule de Hopf-Lax et les solutions de viscosité du problème (30).

5.2 Formule de Hopf-Lax comme solution de viscosité

Lemme 5.1 *Soit* $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$. *La fonction valeur évaluée en* (t,x), $u(t,x)$, *est en fait égale pour tout* $\hat{t} \in [0,t]$ *à :*

$$u(t,x) = \min\left\{(t-\hat{t})L\left(\frac{x-y}{t-\hat{t}}\right) + u(\hat{t},y) | y \in \mathbb{R}^n\right\}$$

Preuve Par le principe de programmation dynamique, on a pour une trajectoire optimale $y \in \mathcal{A}(t,x)$:

$$\forall \hat{t} \in [0,t], u(t,x) = \int_{\hat{t}}^{t} L(y'(s))ds + u(\hat{t}, y(\hat{t}))$$

Par la formule de Hopf-Lax la trajectoire optimale y est connue (Cf preuve de la formule de Hopf-Lax). En s'appuyant sur la preuve de la formule de Hopf-Lax et en considérant $\hat{t}$ comme temps initial et $u(\hat{t},\cdot)$ la fonction de cout initial (qui est lipschitzienne) en reprenant le preuve de la formule de Hopf-Lax, on en déduit :

$$u(t,x) = \min\left\{(t-\hat{t})L\left(\frac{x-y}{t-\hat{t}}\right) + u(\hat{t},y) | y \in \mathbb{R}^n\right\}$$

C'est le résultat. □

Théorème 5.4 *Sous les hypothèses* (25) *et* (26) *et avec le Hamiltonien* $H = L^*$, *u est une solution de viscosité du problème :*

$$\partial_t u + H(\partial_x u) = 0 \tag{31}$$

avec pour condition initiale $u(0,\cdot) = u_0$.

Preuve 1) L'étude préliminaire de u nous permet d'affirmer que $u(0,\cdot) = u_0$ et que u est lipschitzienne.

2) Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que $u - v$ admet un maximum local en $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$. Comme on veut prouver que u est un solution de viscosité, il faut montrer que

$$\partial_t v(t_0, x_0) + H(\partial_x v(t_0, x_0)) \leq 0$$

Par le lemme précédent, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, t_0], u(t_0, x_0) \leq (t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + u(t, x) \tag{32}$$

D'autre part, $u - v$ admet un maximum local en (t_0, x_0) donc pour (t, x) assez proche de (t_0, x_0). On a :

$$u(t, x) - v(t, x) \leq u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0)$$

Donc par (32), on obtient pour $t < t_0$ et (t, x) proche de (t_0, x_0) :

$$v(t_0, x_0) - v(t, x) \leq (t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) \tag{33}$$

Maintenant posons $h = t_0 - t$ et $x = x_0 - hq$ ($q \in \mathbb{R}^n$). Avec ces notations on réécrit (33) :

$$v(t_0, x_0) - v(t_0 - h, x_0 - hq) \leq hL(q)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h}(v(t_0, x_0) - v(t_0 - h, x_0 - hq)) \leq L(q)$$

En faisant tendre $h \to 0$, on obtient :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \partial_t v(t_0, x_0) + \partial_x v(t_0, x_0) \cdot q - L(q) \leq 0$$

Donc en prenant le suprémum sur les q,

$$\partial_t v(t_0, x_0) + H(\partial_x v(t_0, x_0)) \leq 0$$

3) Maintenant supposons qu'il existe $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que $u - v$ admet un minimum local en $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$. On veut alors prouver :

$$0 \leq \partial_t v(t_0, x_0) + H(\partial_x v(t_0, x_0))$$

Procédons par l'absurde, on suppose donc que $\partial_t v(t_0, x_0) + L^*(\partial_x v(t_0, x_0)) < 0$. Ainsi pour (t, x) assez proche de (t_0, x_0) il existe $\varepsilon > 0$ telle que :

$$\partial_t v(t,x) + L^*(\partial_x v(t,x)) < -\varepsilon < 0 \tag{34}$$

Et par définition de la transformée de Legendre,

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \partial_t v(t,x) + \partial_x v(t,x) \cdot q - L(q) < -\varepsilon$$

D'autre part, par le lemme 4.1 pour tout $s \in [0, t_0[$,

$$u(t_0, x_0) = \min \left\{ (t_0 - s) L \left(\frac{x_0 - y}{t_0 - s} \right) + u(s,y) | y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Et comme le minimum est bien atteint, il existe $\hat{y}$ dépendant de s telle que :

$$u(t_0, x_0) = (t_0 - s) L \left(\frac{x_0 - \hat{y}}{t_0 - s} \right) + u(s, \hat{y}) \tag{35}$$

De plus, calculons :

$$v(t_0, x_0) - v(s, \hat{y}) = \int_0^1 \partial_r v(t_0 + (r-1)h, r x_0 + (1-r)\hat{y}) dr$$

avec $h = t_0 - s$. Donc :

$$\begin{aligned} v(t_0, x_0) - v(s, \hat{y}) &= \int_0^1 \partial_t v(t_0 + (r-1)h, r x_0 + (1-r)\hat{y}) h \\ &\quad + \partial_x v(t_0 + (r-1)h, s x_0 + (1-r)\hat{y}) \cdot (x_0 - \hat{y}) dr \\ &= h \int_0^1 \partial_t v(t_0 + (r-1)h, r x_0 + (1-r)\hat{y}) \\ &\quad + \partial_x v(t_0 + (r-1)h, r x_0 + (1-r)\hat{y}) \cdot q \; dr \end{aligned}$$

où $q = \frac{x_0 - \hat{y}}{h}$. De plus, en suivant les caractéristiques, $\hat{y} \to x_0$ quand $s \to t_0$. Ainsi pour s suffisamment proche de t_0 on peut appliquer (34) et obtenir :

$$v(t_0, x_0) - v(s, \hat{y}) \leq h L \left(\frac{x_0 - \hat{y}}{h} \right) - \varepsilon h$$

Et par (35) on obtient :

$$v(t_0, x_0) - v(s, \hat{y}) \leq u(t_0, x_0) - u(s, \hat{y}) - \varepsilon (t_0 - s)$$

et ceci contredit le fait que $u - v$ admet un minimum local en (t_0, x_0). $\square$

Remarque 5.3 *Par le théorème précédent et comme u est dérivable presque partout on en conclut que u résout* (31) *presque partout.*

Exemple 5.3 *Dans le cas où* $u_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto -cos(x)$ *et* $L : p \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{1}{2}p^2$ *alors par le théorème précédent,*

$$u(t,x) = \min\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{x-y}{t}\right)^2 - cos(y)|y \in \mathbb{R}\right\}$$

est l'unique solution de viscosité du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 = 0 \\ u(0,x) = -cos(x) \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

On ne le fait pas mais on pourrait vérifier que u n'est pas dérivable pour tous les points (s, π) $(s \in \mathbb{R}_+^*)$. *Donc ce problème n'admet pas de solution classique et donc la méthode des caractéristiques ne peut pas aboutir comme on l'a vu dans l'exemple 3.3.*

6 Conclusion

Nous avons dans ce mémoire montré dans un premier temps qu'il était difficile et même impossible de construire une solution classique d'un problème faisant intervenir une équation de Hamilton-Jacobi. Par la suite, nous avons vu quelle notion de solution faible était adaptée : les solutions de viscosité, pour lesquelles nous avons des résultats d'existence et d'unicité. De plus nous avons prouvé que cette notion concorde avec les solutions classiques quand celles ci existent. On a même sous certaines hypothèses que les solutions de viscosité sont dérivables presque partout comme le montre la dernière partie du mémoire. Ainsi on a une relation d'inclusion qui apparait : l'ensemble des solutions qui résolvent le problème presque partout contient l'ensemble des solutions de viscosité qui lui même contient l'ensemble des solutions classiques du problème.

Finalement, la théorie des solutions de viscosité nous permet d'approcher des problèmes avec d'autres outils, parfois, plus adaptés et ainsi mieux les comprendre.

7 Bibliographie

[1] Partial Differential Equations (Lawrence C. Evans)

[2] Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control (Piermarco Cannarsa and Carlo Sinestrari)

[3] Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems (Alberto Bressan)