Emma HUBERT

Une démonstration du théorème des nombres premiers

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de Monsieur **Jimmy LAMBOLEY**

Cycle **P**luridisciplinaire d'**E**tudes **S**upérieures
Troisième année (L3)

L'objectif de ce mémoire de recherche est de présenter le théorème des nombres premiers (Théorème 1.1) conjecturé par Gauss en 1792-1793 et démontré indépendamment par Hadamard et de la Vallée-Poussin en 1896, puis d'étudier une de ses démonstrations.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Le théorème des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\pi(x) = Card\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$, le nombre des nombres premiers inférieurs à x.
Le théorème appelé communément théorème des nombres premiers est le suivant :

Théorème 1.1. *Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \tag{1}$$

1.2 Historique

L'histoire de l'étude des nombres premiers commence dans la Grèce antique avec Euclide, 300 ans avant notre ère. Il est le premier à démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers. Depuis ce résultat, nombreux sont les mathématiciens qui ont tenté d'expliquer la répartition des nombres premiers, et de trouver une régularité ou des particularités dans cette répartition. Pendant plusieurs siècles, leurs conclusions se limitaient à une répartition anarchique des nombres premiers et à la décroissance de leur proportion.

Il faut attendre le XVIIIème siècle pour avoir une idée plus précise du comportement des nombres premiers. Le théorème des nombres premiers a été conjecturé par le mathématicien Gauss en 1792-1793. En 1852, le mathématicien russe Tchebytchev établit que, pour x suffisamment grand, le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ est compris entre $0.921x/\log(x)$ et $1.106x/\log(x)$. Ce résultat constitue un argument en faveur de la conjecture de Gauss, mais la démonstration rigoureuse du théorème sera effectuée en 1896, indépendamment par Hadamard et de la Vallée-Poussin, à l'aide de méthodes d'analyse complexe et en utilisant la fonction ζ de Riemann.

L'énoncé de ce théorème semblant porter essentiellement sur les nombres entiers, il parait étonnant de devoir faire appel à des résultats d'analyse complexe pour le démontrer. Ainsi, c'était un défi pour beaucoup de mathématiciens d'essayer de démontrer ce théorème de manière élémentaire. Pendant plusieurs années, au début du XXème siècle, une démonstration sans utiliser d'analyse complexe paraissait impossible, le mathématicien Hardy pensait par exemple que le théorème des nombres premiers faisait partie des énoncés dont la "profondeur" ne les rendait accessibles que par le biais de l'analyse complexe. Cependant, en 1949, Paul Erdos et Atle Selberg donnèrent chacun une démonstration élémentaire (mais loin d'être simple) du théorème des nombres premiers, qui n'exigeait aucun pré-requis d'analyse complexe. La démonstration que nous allons étudier dans ce mémoire de recherche a pour particularité l'utilisation des distributions tempérées et de la transformée de Fourier (se reporter à la section 1.4 pour plus de détails sur les particularités de cette démonstration).

1.3 Notations

Dans cette sous-section, on introduit des notations importantes qui seront utilisées tout au long de la démonstration.

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie sur le demi-plan ouvert $Re(s) > 1$ par la formule :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

Cette fonction joue un rôle très important dans toutes les démonstrations du théorème 1.1. Son lien avec les nombres premiers, qui n'est pourtant pas évident, sera démontré et exploité dans la section 3.

On note $\zeta_{\mathbb{P}}$ la série de Dirichlet sur le demi-plan ouvert $Re(s) > 1$ par :

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \tag{3}$$

Cette fonction est évidemment liée aux nombres premiers et nous verrons dans la section 3.2 la relation entre cette fonction et le log de la fonction ζ de Riemann (voir la proposition 3.3). L'étude de sa régularité et de son prolongement est le but de la section 3.

On note $l(t)$ la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$l(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t) \tag{4}$$

Cette notation n'a pour l'instant aucun sens puisque $\zeta_{\mathbb{P}}$ est définie pour $Re(s) > 1$. Nous démontrerons cependant sa bonne définition dans la section 3.3. On introduit la fonction $l(t)$ pour faire le lien entre les nombres premiers et la transformée de Fourier. Son étude fera l'objet des sections 4 et 5.

On travaillera beaucoup avec des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ et de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de Schwarz sur $\mathbb{R}$.

1.4 Les grandes étapes de la démonstration

La démonstration que nous allons étudier repose sur la fonction ζ de Riemann, ses propriétés, et la notion de transformée de Fourier d'une distribution tempérée. C'est une preuve "moderne" du théorème des nombres premiers dont les idées datent des années 1930. Comme la plupart des démonstrations du théorème des nombres premiers, elle se base sur l'expression de ζ comme produit eulérien. Comme les démonstrations originales de La Vallée Poussin et Hadamard, elle fait usage du prolongement méromorphe de ζ au demi plan ouvert $Re(s) > 0$, afin de pouvoir étudier la présence de zéros sur la droite $1 + i\mathbb{R}$. La particularité de cette démonstration est l'utilisation des distributions tempérées et de la transformée de Fourier.

Expliquons le raisonnement de cette démonstration dans les grandes lignes. Plutôt que d'étudier le comportement en l'infini de $\pi(x)$, on va étudier celui de la fonction $e^{-x}\pi(e^x)$. Le comportement de cette fonction est lié à la régularité de sa transformée de Fourier qui se trouve être très proche de la fonction $l(t)$ définie précédemment. Ceci explique que nous ayons besoin d'introduire et d'étudier les fonctions ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$ ainsi que de montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$.

La section suivante (section 2) contient les pré-requis concernant les distributions tempérées et la transformée de Fourier. Une partie de la démonstration étant uniquement basée sur ces deux concepts, il est conseillé au lecteur qui n'est pas familier avec ces notions de lire cette section. D'autre part, il est fortement conseillé au lecteur étranger à l'analyse complexe de se renseigner sur les fonctions holomorphes et les séries de Dirichlet avant de commencer l'apprentissage de cette démonstration.

Dans la section 3, on commencera par démontrer l'expression de la fonction ζ de Riemann comme produit eulérien : cette expression témoigne du lien entre la fonction et les nombres premiers et permet de mieux comprendre son utilisation au sein de la démonstration. Cette expression et sa régularité permettent d'étudier le lien entre le log de ζ et la série de Dirichlet $\zeta_{\mathbb{P}}$, afin de connaître le comportement de $\zeta_{\mathbb{P}}$. Grâce à ces résultats, on peut établir une proposition importante (la proposition 3.4) sur la régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ ainsi qu'une équivalence entre sa régularité et la non-annulation de la fonction ζ sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ (le corollaire 3.6). La proposition et l'équivalence seront utilisées par la suite dans la section 5.

La section 4 consiste à montrer que la fonction $l(t)/(1+2i\pi t)$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction bornée $e^{-x}\pi(e^x)$ (voir proposition 4.3). Autrement dit, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\frac{l(t)}{1+2i\pi t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx$$

Pour démontrer ce résultat, on introduira la mesure μ (section 4.1) et on étudiera sa transformée de Fourier (section 4.2). Ce résultat nous permettra de faire le lien entre la régularité des fonctions introduites dans la section 3 et le comportement en l'infini de $e^{-x}\pi(e^x)$ (section 4.3).

Le but de la section 5 est de montrer que la fonction $l(t) - \log 1/it$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (voir Théorème 5.1). Par la section 3, démontrer ce théorème revient à démontrer que la fonction ζ de Riemann ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$. Pour ce faire, nous allons utiliser les fonctions de type positif (voir section 5.1). La régularité de cette fonction sera utilisée dans la section 6.

La section 6 correspond à l'aboutissement de la démonstration. On démontre d'abord une version dite "lissée" du théorème des nombres premiers (section 6.1), en appliquant l'identité démontrée à la section 4.1 à une fonction particulière, et en étudiant son comportement à l'infini. On obtiendra l'identité suivante (proposition 6.1), pour toute fonction ψ transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et quand y tend vers l'infini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx = \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

Pour achever la démonstration du théorème des nombres premiers, on appliquera l'identité précédente à des approximations de δ (section 6.2).

2 Pré-requis : distributions tempérées et transformée de Fourier

Une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On ne détaille pas ici la caractérisation de la continuité d'une forme linéaire qui n'est utile que pour achever la démonstration de la proposition 4.2.

La transformation de Fourier d'une distribution tempérée T sera notée $\widehat{T}$. Lorsque T appartient à $L^1(\mathbb{R})$, c'est par définition la fonction continue définie par :

$$\widehat{T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)e^{-2\pi ixt}dx$$

En général, elle est définie par l'égalité :

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Cette égalité a un sens car, pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\widehat{\varphi}$ appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Nous utiliserons également le Lemme de Riemann-Lebesgue :

Lemme 2.1. *(Riemann-Lebesgue) La transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers zéro à l'infini.*

3 Le lien entre ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$

Le but de cette section est d'étudier la régularité de la fonction $\zeta_{\mathbb{P}}$, afin de montrer que le passage à la limite suivant est justifié, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1+it) = \lim_{\varepsilon \to 0} \zeta_{\mathbb{P}}(1+\varepsilon+it)$$

On pourra alors analyser la régularité locale de la fonction de t ainsi définie et démontrer l'équivalence suivante : Comme fonction de t, $\zeta_{\mathbb{P}}(1+it)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si la fonction ζ de Riemann ne possède pas de zéro sur la droite $1+i\mathbb{R}$.

Pour démontrer ces résultats, on commencera par démontrer l'expression de la fonction ζ de Riemann comme produit eulérien et étudier sa régularité. On introduira alors la fonction $g(s) = \log \zeta(s) - \zeta_{\mathbb{P}}(s)$. L'étude de la régularité de la fonction g ainsi définie nous donnera les information voulues sur $\zeta_{\mathbb{P}}$.

3.1 Le développement de ζ en produit eulérien

Dans beaucoup de démonstrations du théorème des nombres premiers, la fonction ζ de Riemann est utilisée, et on peut, à première vue, s'interroger sur la justification de cette utilisation. En effet, la fonction ζ de Riemann ne semble pas être en relation avec les nombres premiers. Cependant, on va montrer dans cette section que :

Théorème 3.1. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$, on a :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{5}$$

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$. Pour tout nombre premier p, on a le développement en série absolument convergente suivant :

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

car, pour $x \in]0,1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Soit N un entier, on note $\mathcal{E}(N)$ l'ensemble des entiers positifs dont les diviseurs premiers valent au plus N. En passant au produit sur les nombres premiers inférieurs à N et en sachant que tout entier strictement positif admet une unique décomposition en facteurs premiers (théorème fondamental de l'arithmétique), on obtient :

$$\prod_{p \in \mathbb{P},\, p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s}$$

Comme $\{1, ..., N\} \subset \mathcal{E}(N)$, il en découle que :

$$\begin{aligned}
\left|\zeta(s) - \prod_{p\in\mathbb{P},\, p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\in\mathcal{E}(N)}\frac{1}{n^s}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\leq N}\frac{1}{n^s}\right| \\
&\leq \left|\sum_{n>N}\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n>N}\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n^{Re(s)}}
\end{aligned}$$

On obtient bien le résultat souhaité en faisant tendre N vers l'infini. □

Le but étant d'étudier l'existence de zéros de ζ sur la droite $1 + i\mathbb{R}$, il est nécessaire de la prolonger, au moins sur un voisinage de la droite $1 + i\mathbb{R}$:

Proposition 3.2. *La fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$, holomorphe en dehors de 1, et admettant en 1 un pôle simple, de résidu 1.*

Autrement dit, $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$, a priori définie et holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1$, admet un prolongement holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$. On considère l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} x^{-s}dx$$

Le calcul de cette intégrale nous donne : $\dfrac{1}{s-1}$.

D'autre part,

$$\zeta(s) - \int_1^{+\infty} x^{-s}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}dx\right)$$

On pose $\varphi_n(s) := n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}dx = \int_n^{n+1}\left(n^{-s} - x^{-s}\right)dx$. On obtient :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(s)$$

où φ_n est holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$.

De plus, on peut montrer que φ_n est bornée sur le même demi-plan :
On note f la fonction :

$$f : t \in [n, n+1] \mapsto n^{-s} - t^{-s}$$

On a :

$$|\varphi_n(s)| \quad \leq \sup_{t\in[n,n+1]}\left|n^{-s} - t^{-s}\right| \quad = \sup_{t\in[n,n+1]}|f(t)| \quad = \sup_{t\in[n,n+1]}|f(t) - f(n)|$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on peut écrire, pour tout $t \in [n, n+1]$:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(n)| &\leq \sup_{x\in[n,t]}|f'(x)|\,(t-n) \quad \leq \sup_{x\in[n,n+1]}|f'(x)|\,(t-n) \\
&\leq \sup_{x\in[n,n+1]}|f'(x)| \quad \leq \sup_{x\in[n,n+1]}\left|\frac{s}{t^{s+1}}\right| \\
&\leq \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le résultat suivant :

$$|\varphi_n(s)| \quad \leq \quad \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)$ converge normalement sur tout compact du demi-plan $Re(s) > 0$ et y définit une fonction holomorphe, d'où la proposition 3.2. □

3.2 La série de Dirichlet $\zeta_{\mathbb{P}}$

Étudions maintenant la série de Dirichlet $\zeta_{\mathbb{P}}$: c'est une fonction holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1$. Pour étudier la régularité de cette fonction sur la droite $1 + i\mathbb{R}$, il est commode de s'intéresser à la fonction suivante, définie pour tout $s \in]1, +\infty[$:

$$g(s) = \log \zeta(s) - \zeta_{\mathbb{P}}(s)$$

En effet, cette fonction met en relation $\log \zeta$ et $\zeta_{\mathbb{P}}$, et fait donc le lien entre les zéros de ζ et la régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$.

Proposition 3.3. *La fonction g ainsi définie se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1/2$, et bornée sur tout demi-plan $Re(s) > \rho$ pour $\rho > 1/2$.*

Démonstration. Grâce à l'expression de ζ en produit eulérien, on peut réécrire g de la manière suivante, pour tout $s \in]1, +\infty[$:

$$g(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[- \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) - \frac{1}{p^s} \right]$$

On désigne ici par log la détermination principale du logarithme sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1.

La limite d'une série de fonctions holomorphes qui convergent normalement sur tout compact est holomorphe. Donc, pour établir la proposition, il suffit de montrer que le membre de droite converge normalement sur tout demi-plan $Re(s) > \rho$ pour tout $\rho > 1/2$.

$u \mapsto \log(1-u) + u$ est une fonction holomorphe pour u appartenant au disque ouvert $\dot{D}(0, 1)$, qui est nulle en 0, et sa dérivée aussi. Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathbb{C}$,

$$|u| \leq 2^{-1/2} \Rightarrow |log(1-u) + u| \leq C\,|u|^2$$

Or, étant donné $\rho \in]1/2, +\infty[$, pour tout s tel que $Re(s) \geq \rho$ et pour tout $p \in \mathbb{P}$, on a :

$$\left| \frac{1}{p^s} \right| \leq p^{-\rho} \leq 2^{-1/2}$$

Donc, en appliquant le résultat précédent, on obtient :

$$\left| log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{p^s} \right| \leq C \frac{1}{|p^s|^2} \leq C p^{-2\rho}$$

On sait que $2\rho > 1$, ce qui prouve bien la convergence normale, et donc la proposition. □

3.3 Conséquences

Maintenant que nous avons étudié la régularité de ζ et de g, on peut aisément conclure sur la régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$, en utilisant la valuation.

Pour $s_0 \in \mathbb{C}$, on définit n la valuation de ζ en s_0 par :

$$\begin{cases} n = -1 & \text{si } s_0 = 1 \\ n = 0 & \text{si } s_0 \neq 1 \text{ et } \zeta(s_0) \neq 0 \\ n \geq 1 & \text{si } s_0 \neq 1 \text{ et } \zeta(s_0) = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.4. *Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s_0) = 1$. Soit n la valuation de ζ en s_0. On considère la fonction holomorphe sur $Re(s) > 1$:*

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$$

Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de s_0.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$. On a :

$$\exp\left(\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)\right) = (s - s_0)^{-n} \zeta(s) \exp(-g(s))$$

Par les deux propositions précédentes sur la régularité de ζ et de g, cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur un voisinage ouvert de s_0. La fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}^*$ étant surjective et holomorphe, on peut, sur un disque ouvert de centre s_0 et de rayon $r > 0$, écrire ce prolongement $\exp \varphi(s)$. On a donc, pour $s \in \dot{D}(s_0, r)$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\exp\left(\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)\right) = \exp \varphi(s)$$

D'où :

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0) - \varphi(s) = 2i\pi m(s)$$

La fonction $s \mapsto m(s)$ est continue sur le connexe $C = \{s \in \dot{D}(s_0, r) \mid Re(s) > 1\}$ et à valeur dans $\mathbb{Z}$ donc constante sur C. On a ainsi, pour $s \in C$:

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0) = \varphi(s) + 2i\pi m$$

On en conclut que la fonction $\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de s_0. ☐

En appliquant immédiatement cette proposition à un $s_0 = 1 + it$ tel que s_0 ne soit pas un zéro de ζ (on a donc $n = 0$) et à $s = 1 + \varepsilon + it$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on remarque que l'on peut étudier la limite de $\zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + it)$ quand ε tend vers 0^+.

On définit ainsi la fonction de t :

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it) = \lim_{\varepsilon \to 0} \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + it)$$

Par la proposition précédente et selon les différentes valeurs de n, on peut étudier sa régularité locale, ce qui sera utile dans la section 5 :

Corollaire 3.5. *1. Comme fonction de t, $t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1+it)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^* \setminus \{t_0 \in \mathbb{R}^* \mid \zeta(1+it_0) = 0\}$.*

2. La fonction $t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1+it) - \log 1/it$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de t au voisinage de zéro.

3. Si ζ admet un zéro d'ordre n en $1+it_0$ pour $t_0 \in \mathbb{R}^*$, alors, la fonction $t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1+it) + n\log\left(\frac{1}{i(t-t_0)}\right)$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de t sur un voisinage de t_0.

Démonstration. 1. En prenant $s_0 = 1+it_0$, tel que $\zeta(s_0) \neq 0$, on a $n = 0$ et donc $\zeta_{\mathbb{P}}(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $1+it_0$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^* \setminus \{t_0 \in \mathbb{R}^* \mid \zeta(1+it_0) = 0\}$. Ainsi, comme fonction de t, $\zeta_{\mathbb{P}}(1+it)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert.

2. En prenant $s_0 = 1$ et $s = 1+it$, on a $n = -1$ et

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n\log(s-s_0) = \zeta_{\mathbb{P}}(1+it) - \log\left(\frac{1}{it}\right)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $s_0 = 1$, donc se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de t au voisinage de 0.

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $s_0 = 1+it_0$ soit un zéro d'ordre n de ζ. En prenant $s = 1+it$, on a :

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n\log(s-s_0) = \zeta_{\mathbb{P}}(1+it) + n\log\left(\frac{1}{i(t-t_0)}\right)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de $s_0 = 1+it_0$, donc se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de t sur un voisinage de t_0.

$\square$

On déduit, de cette discussion et des propositions précédentes, l'équivalence suivante, qui sera très utile dans la section 5 :

Corollaire 3.6. *Comme fonction de t, $\zeta_{\mathbb{P}}(1+it)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ si et seulement si la fonction ζ de Riemann ne possède pas de zéro sur la droite $1+i\mathbb{R}$.*

4 $\zeta_{\mathbb{P}}$ et transformée de Fourier

Afin de comprendre le lien entre la répartition des nombres premiers et les propriétés des fonctions ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$, il est commode d'introduire la transformée de Fourier d'une distribution. En effet, si l'on raisonne de manière informelle, on peut se dire que le comportement à l'infini de la fonction $\pi(x)$ est lié à la régularité de sa transformée de Fourier inverse, par le lemme de Riemann-Lebesgue. Le but de cette section est d'établir que la fonction $l(t)/(1+2i\pi t)$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction bornée $e^{-x}\pi(e^x)$. Autrement dit, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\frac{l(t)}{1+2i\pi t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx$$

Pour démontrer ce résultat, on va introduire la mesure positive suivante et étudier sa transformée de Fourier.

$$\mu := \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\delta_{\log p}$$

4.1 Les propriétés de la mesure μ

La mesure positive μ est clairement en relation avec les nombres premiers. Avant d'étudier sa transformée de Fourier, il est utile de remarquer les propriétés suivantes :

Proposition 4.1. *1. Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\varepsilon} d\mu(x) < +\infty$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > 0$, la fonction $\left(x \mapsto e^{-\lambda x}\right)$ est μ-intégrable et on a l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} d\mu(x) = \zeta_{\mathbb{P}}(1+\lambda) \tag{6}$$

3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y-x) d\mu(x) = \pi(e^y) \tag{7}$$

Démonstration. 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\varepsilon} d\mu(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (\log p)^{-1-\varepsilon} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\varepsilon}} < +\infty$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} d\mu(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} e^{-\lambda \log p} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\lambda}}$$

Cette somme est finie et vaut $\zeta_{\mathbb{P}}(1+\lambda)$. Sachant que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|e^{-\lambda x}\right| = e^{-Re(\lambda) x}$, le résultat est aussi valable pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > 0$.

3. On trouve le résultat par un calcul du même type que les deux précédents.

□

Intuitivement, l'identité (6) nous indique que la transformée de Fourier de μ semble être la fonction $(t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1+2i\pi t))$.

On introduit la fonction $g : x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Sa convolée avec μ nous donne la fonction $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$. Ainsi, l'identité (7) nous laisse à penser que la transformée de Fourier de $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$ est le produit de $\widehat{g}$ avec $\widehat{\mu}$, c'est à dire la fonction :

$$\left(t \mapsto \frac{\zeta_{\mathbb{P}}(1+2i\pi t)}{1+2i\pi t}\right)$$

Les sections suivantes vont consister à démontrer précisément ces intuitions.

4.2 La transformée de Fourier de μ

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2. *La distribution $\widehat{\mu}$, transformée de Fourier de μ, coïncide avec la distribution associée à la fonction $l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $l(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)$.*

Autrement dit, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)d\mu(x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\widehat{\varphi}(\log p)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On définit μ_ε et l_ε par :

$$\mu_\varepsilon = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\delta_{\log p} \quad \text{et} \quad l_\varepsilon = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + 2i\pi t)$$

On commence par montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\widehat{\mu_\varepsilon} = l_\varepsilon$. On sait que :

$$\widehat{\varphi}(\log p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t\cdot\log p}\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} p^{-2i\pi t}\varphi(t)dt$$

En utilisant Fubini, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)d\mu(t) &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\widehat{\varphi}(\log p) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1-\varepsilon-2i\pi t}\varphi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + 2i\pi t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile, lorsqu'on est familier avec la métrique de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, de voir que lorsque ε tend vers 0_+, μ_ε tend vers μ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et l_ε tend vers l dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ce qui nous donne le résultat souhaité. □

4.3 La fonction $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$ comme transformée de Fourier

Intuitivement, on aimerait appliquer la proposition précédente à une certaine fonction φ telle que $\widehat{\varphi}(x) = e^x\mathbf{1}_{]-\infty,y]}(x)$. Ce n'est malheureusement pas possible car, $\widehat{\varphi}$ n'étant pas régulière, φ ne peut pas appartenir à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Par la remarque sur l'identité (7), on peut cependant démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.3. *La distribution définie par la fonction $t \mapsto (1+2i\pi t)^{-1}l(t)$ a pour transformée inverse la fonction $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$. Autrement dit, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\frac{l(t)}{1 + 2i\pi t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t}$$

ψ est aussi une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Par un simple calcul de transformée de Fourier, on trouve que $x \mapsto e^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x)$ est la transformée de Fourier de $f_0 : t \mapsto 1/(1+2i\pi t)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(x) &= (\widehat{f_0 \cdot \varphi})(x) = \widehat{f_0} * \widehat{\varphi}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f_0}(x-y)\widehat{\varphi}(y)dy \\
&= e^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(y)\widehat{\varphi}(y)dy
\end{aligned}$$

En appliquant la proposition 4.2 à la fonction ψ, on obtient, par Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(t)}{1+2i\pi t}\varphi(t)dt &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\widehat{\psi}(\log p) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\mathbf{1}_{[\log p,+\infty[}(y)\widehat{\varphi}(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\widehat{\varphi}(y)\sum_{p\in\mathbb{P}} \mathbf{1}_{[\log p,+\infty[}(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\pi(e^y)\widehat{\varphi}(y)dy
\end{aligned}$$

ce qui justifie la proposition. □

Le comportement en l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée est contrôlée par sa régularité locale. Ainsi, la proposition précédente nous incite à étudier la régularité locale de l pour déterminer le comportement asymptotique de π.

5 Régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur $1+i\mathbb{R}$ et fonctions de type positif

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant, qui nous servira pour étudier le comportement asymptotique de π dans la section 6.

Théorème 5.1. *La fonction $t \mapsto l(t) - \log\left(\frac{1}{it}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Par le corollaire 3.5, on sait que $t \mapsto l(t) - \log(1/it)$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Ainsi, nous devons juste montrer que $l(t) - \log(1/it)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Le terme en log étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par le corollaire 3.6, montrer que l est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ revient à montrer que la fonction ζ de Riemann ne s'annule pas sur la droite $1+i\mathbb{R}$.

Pour ce faire, nous allons utiliser des fonctions de type positif issues de différentes constructions.

5.1 Fonctions de type positif

Définition 5.2. *Une fonction de type positif est une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$.*

Par la proposition 4.2, on a immédiatement le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$, on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(t)\varphi(t)dt \geq 0$$

Démonstration. La proposition 4.2 nous donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(t)\varphi(t)dt = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\widehat{\varphi}(\log p)$$

ce qui est positif car φ est de type positif et les nombres premiers sont positifs. $\square$

Pour la suite, il est utile d'étudier différentes constructions de fonctions de type positif :

1. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on pose $\tilde{\rho}(x) = \overline{\rho(-x)}$. On a alors $\rho * \tilde{\rho} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\widehat{\rho * \tilde{\rho}}(x) \geq 0$.
2. Soient $(a_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$T = \sum_{k=1}^{N} \delta_{a_k} \quad \text{et} \quad \tilde{T} = \sum_{k=1}^{N} \delta_{-a_k}$$

   On peut montrer que si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et de type positif, alors la fonction suivante est elle aussi à support compact et de type positif.

$$T * \tilde{T} * \rho : x \to \sum_{1\leq k,l\leq N} \rho(x + a_l - a_k)$$

3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et de type positif, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il en va de même pour :

$$\varphi_\lambda := \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)$$

5.2 Démonstration du théorème 5.1

On reprend le lemme 5.3 en remplaçant φ, la fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ de type positif, par $T * \tilde{T} * \varphi_\lambda$ qui est aussi de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et de type positif, d'après les constructions (2) et (3). On obtient alors le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N$. Soit $\lambda > 0$. On a :*

$$\sum_{1\leq k,l\leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} l(t + a_k - a_l)\varphi_\lambda(t)dt \geq 0$$

Le comportement asymptotique lorsque λ tend vers 0 de chacune des ces intégrales est déterminé par l'ordre du zéro ou du pôle de ζ en $1 + i(a_k - a_l)$. On a en effet le lemme suivant :

Lemme 5.5. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n(a)$ la valuation de ζ en $1 + ia$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, lorsque λ tend vers 0_+ :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(t + a)\varphi_\lambda(t)dt = -n(a)\log(\lambda^{-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(t)dt + O(1)$$

La démonstration de ce lemme repose sur le corollaire 3.5. En effet, il nous permet d'écrire, sur un voisinage de a :

$$l(t) = -n(a) \log \frac{1}{i(t-a)} + f(t-a)$$

où f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en intégrant la fonction $t \mapsto l(t+a)\varphi_\lambda(t)$ sur $\mathbb{R}$ (ce qui est possible car φ_λ est à support compact dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$), on obtient le résultat.

Ainsi, par les deux derniers lemmes, en prenant une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle et de type positif, son intégrale sur $\mathbb{R}$ est strictement positive et on a, lorsque λ tend vers 0_+ :

$$-\sum_{1 \leq k,l \leq N} n(a_k - a_l) \log(\lambda^{-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(t)dt + O(1) \geq 0$$

L'intégrale de φ_λ est en fait égale à l'intégrale de φ donc ne dépend pas de λ et est positive. De plus, le terme en log tend vers $+\infty$ quand $\lambda \to 0_+$. Il en découle donc l'inégalité suivante :

$$-\sum_{1 \leq k,l \leq N} n(a_k - a_l) \geq 0$$

On peut alors particulariser à $N = 3$ et $(a_1, a_2, a_3) = (-a, 0, a)$ pour $a \in \mathbb{R}^*$. On obtient ainsi que $n(a) = 0$, et ce pour tout $a \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, la fonction ζ de Riemann ne s'annule pas sur la droite $Re(s) = 1$. On a donc démontré le Théorème 5.1.

6 Aboutissement de la démonstration

Dans cette dernière section, nous allons achever la démonstration du théorème des nombres premiers. Pour ce faire, on commencera par démontrer la version "lissée" du théorème à l'aide des résultats des sections 4 et 5. L'identité que nous allons démontrer sera ensuite utilisée pour des fonctions qui sont des approximations de la masse de Dirac, et nous achèverons ainsi la démonstration du théorème des nombres premiers.

6.1 Version "lissée" du théorème des nombres premiers

Dans cette sous-section, le but est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.1. *Pour toute fonction ψ transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, lorsque y tend vers $+\infty$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

En appliquant cette identité à des fonctions qui sont des approximations de la masse de Dirac, on pourra aboutir au théorème des nombres premiers.

Pour démontrer cette proposition, on va utiliser les grands résultats des sections 4 et 5.

Observons tout d'abord que pour toute ψ transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $(x \mapsto \psi(x-y))$ est la transformée de Fourier de $\big(t \mapsto e^{2i\pi ty}\varphi(t)\big)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{e^{2i\pi y \cdot}\varphi(\cdot)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi yt}\varphi(t)e^{-2i\pi t\xi}dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2i\pi t(\xi-y)}dt \\ &= \widehat{\varphi}(\xi-y) = \psi(\xi-y)\end{aligned}$$

Reprenons le résultat de la proposition 4.3 et appliquons-le aux fonctions précédentes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(t)}{1+2i\pi t}\varphi(t)e^{2i\pi ty}dt$$

Pour montrer la proposition 6.1, il suffit donc de montrer que, lorsque y tend vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(t)}{1+2i\pi t}\varphi(t)e^{2i\pi ty}dt = \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

On peut séparer l'intégrale de gauche en deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[l(t) - \log\left(\frac{1}{it}\right)\right] \frac{\varphi(t)}{1+2i\pi t}e^{2i\pi ty}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{it}\right) \frac{\varphi(t)}{1+2i\pi t}e^{2i\pi ty}dt$$

La première intégrale est en $o(1/y)$ car c'est la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact : en effet, φ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et la fonction $(t \mapsto [l(t) - \log(1/it)])$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par la section 5.

Il suffit donc d'étudier la seconde intégrale, c'est à dire de montrer que :

Lemme 6.2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, pour $y \to +\infty$:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left(\frac{1}{it}\right) f(t)e^{2i\pi ty}dt = \frac{1}{y}f(0) + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

Démonstration. Pour montrer le Lemme 6.2, nous admettrons que la transformée de Fourier inverse de la distribution tempérée $\dfrac{d}{dt}\left(\log\left(\dfrac{1}{it}\right)\right)$ est la fonction $-2i\pi\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

Établissons trois résultats qui, en les combinant, nous donneront le résultat du lemme 6.2 :

$$2i\pi y \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\log\left(\frac{1}{it}\right) f(t)\right)(y) = -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d}{dt}\left(\log\frac{1}{it}\right) f(t) + \left(\log\frac{1}{it}\right) f'(t)\right)(y)$$

$$\lim_{|y|\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\log\frac{1}{it}\right) f'(t)\right)(y) = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d}{dt}\left(\log\frac{1}{it}\right) f(t)\right) = 2i\pi f(0)$$

Ainsi, on a par ces trois résultats,

$$2i\pi y \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\log\left(\frac{1}{it}\right)f(t)\right)(y) = 2i\pi f(0) + o(1)$$

$$\text{c'est à dire} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left(\log\left(\frac{1}{it}\right)f(t)\right)(y) = \frac{1}{y}f(0) + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

On a ainsi démontré le lemme 6.2

□

La proposition 6.1 découle immédiatement du lemme 6.2.

6.2 De la version "lissée" du théorème au théorème

Le but de cette sous-section est d'achever la démonstration du théorème des nombres premiers. Pour ce faire, nous allons appliquer la proposition 6.1 à des fonctions qui sont des approximations de la masse de Dirac, afin de montrer que

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\pi(e^y)}{e^y}y = 1$$

Ainsi, on aura démontré le théorème des nombres premiers.

Soit ψ_1 une fonction à valeurs positives, transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_1(t)dt = 1$$

On pose ensuite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ψ_λ qui satisfait aux mêmes conditions que ψ_1.

$$\psi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\psi_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

On remarque d'autre part que

$$\lim_{\lambda\to0^+} \int_{|t|\geq\varepsilon} \psi_\lambda(t)dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda\to0^+} \int_{|t|\geq\varepsilon} |t|\psi_\lambda(t)dt = 0 \tag{8}$$

On reprend la proposition 6.1 en l'appliquant à ψ_λ. On a la suite d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx &\geq \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx \\
&\geq \frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi_\lambda(x-y)dx \\
&= \frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_\lambda(x)dx \\
&\geq \frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}}(1-\varepsilon)
\end{aligned}$$

En effet, la première inégalité vient de la positivité, la deuxième de la croissance des fonction $x \mapsto \pi(x)$ et $x \mapsto e^x$, et la dernière de la remarque (8) pour un λ suffisamment petit.

En revenant à la proposition 6.1, on obtient :

$$\frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}}(1-\varepsilon) \leq \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

Ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il nous montre bien que :

$$\limsup_{y \to +\infty} \frac{\pi(e^y)}{e^y} y \leq 1$$

En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq 0$,

$$\pi(e^x) \leq M \frac{e^x}{x+1}$$

Grâce à cette remarque et aux mêmes genre d'inégalités, on peut achever la démonstration du théorème des nombres premiers, en montrant que :

$$\liminf_{y \to +\infty} \frac{\pi(e^y)}{e^y} y \geq 1$$

Notons tout d'abord que $\pi(e^x) = 0$ pour $x \leq 0$. Ainsi, par le Théorème 6.1 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx &= \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^{+\infty} \right) \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx \\ &= \left(\int_{0}^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^{+\infty} \right) \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx \end{aligned}$$

Cherchons une majoration pour chacune des trois intégrales :

1. Pour la première intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{y-\varepsilon} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx &\leq \int_0^{y-\varepsilon} \frac{M}{x+1} \psi_\lambda(x-y) dx \\ &\leq M \int_0^{y-\varepsilon} \frac{y-x+1}{y+1} \psi_\lambda(x-y) dx \\ &\leq \frac{M}{y+1} \int_{-y}^{-\varepsilon} (1+|t|) \psi_\lambda(t) dt \\ &\leq \frac{M}{y+1} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (1+|t|) \psi_\lambda(t) dt \\ &\leq \frac{M\varepsilon}{y} \end{aligned}$$

   pour λ suffisamment petit, grâce à l'identité (8).

2. Pour la seconde intégrale, on a :

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx \leq \frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda(t) dt = \frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}}$$

3. Enfin, pour la dernière intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_{y+\varepsilon}^{+\infty} \psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx &\leq \int_{y+\varepsilon}^{+\infty} \frac{M}{x+1}\psi_\lambda(x-y)dx \\ &\leq \frac{M}{y}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \psi_\lambda(t)dt \\ &\leq \frac{M\varepsilon}{y}\end{aligned}$$

pour λ suffisamment petit.

Ainsi, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx \leq \frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} + \frac{2M\varepsilon}{y}$$

Donc, par la Proposition 6.1, on obtient :

$$\frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} + \frac{2M\varepsilon}{y} \geq \frac{1}{y}\int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x)dx + o\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

Ce qui nous donne bien :

$$\liminf_{y\to+\infty} \frac{\pi(e^y)}{e^y}y \geq 1$$

et donc le théorème des nombres premiers.