

---

Guilhem DUPUIS

**Modélisation du trafic routier**  
Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards

---

**Mémoire d'initiation à la recherche**  
Sous la direction de Madame **Daniela TONON**

*Juin 2016*



Cycle Pluridisciplinaire d'Études Supérieures  
Troisième année (L3)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Motivations . . . . .	2
1.2	Le modèle LWR . . . . .	2
<b>2</b>	<b>La méthode des caractéristiques</b>	<b>3</b>
2.1	Présentation de la méthode . . . . .	3
2.2	Applications . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Les solutions au sens faible</b>	<b>7</b>
3.1	Problèmes de discontinuité . . . . .	7
3.2	Condition de Rankine-Hugoniot, condition d'entropie . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Références</b>	<b>9</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Motivations

Nous allons voir dans ce mémoire un premier modèle mathématique destiné à étudier le trafic routier. Il s'agit d'un enjeu important pour le développement de réseaux de circulation car mieux comprendre le phénomène en question permettrait d'optimiser ces infrastructures. Notamment, on cherche à réduire l'encombrement des routes, le risque d'accidents et la pollution. Le modèle étudié a été développé par M.J. Lighthill, G.B. Whitham et P.I. Richards pendant les années 1950.

Dans le cadre de mémoire, nous nous considérons une route empruntée par des voitures, mais bien évidemment les résultats énoncés restent valides dans d'autres conditions, comme par exemple la circulation de piétons.

L'étude de ce modèle mathématique m'a amené à me pencher sur le domaine des Équations aux Dérivées Partielles, et plus précisément sur les outils de résolution de ces équations. Je me suis particulièrement concentré sur la *méthode des caractéristiques*, qui est détaillée dans la suite de ce mémoire. Ensuite, j'ai découvert que ces équations n'admettaient pas toujours une solution au sens classique et il a donc fallu définir une notion plus faible de solution.

## 1.2 Le modèle LWR

Plusieurs approches permettent de décrire l'évolution du trafic sur une route, notamment on fait une distinction selon le point de vue adopté, microscopique ou macroscopique. Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards fait partie de ces derniers car le flot de véhicules est ici considéré comme un milieu continu. On s'intéresse alors à la densité de véhicules  $\rho(x, t)$  le long de la route, qui est à la fois une fonction du temps et de l'espace, et pour cela nous utiliserons des équations issues de la mécanique des fluides.

Nous noterons  $v(x, t)$  et  $q(x, t)$  respectivement la vitesse moyenne et le flux de véhicules en un point et un instant donné. Ces deux grandeurs sont liées par la relation  $q = \rho v$ .

**Hypothèses** Dans ce modèle, on considère une route unidimensionnelle et de longueur infinie, et nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas d'intersections le long de la route. Ainsi, le nombre de voitures sur la route est constant.
- Il n'y a pas de dépassement possible.
- La vitesse moyenne  $v$  dépend uniquement de la densité de véhicules  $\rho$ . On suppose de plus que :

$$v(\rho) = v_m \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right)$$

où  $v_m$  et  $\rho_m$  sont des constantes. Ainsi,  $v_m$  est une vitesse maximale qui ne peut pas être dépassée et  $\rho_m$  correspond à la situation où la route est saturée (est la

vitesse est nulle dans ce cas). De plus, conformément à l'expérience, la vitesse moyenne décroît quand la densité de véhicules augmente.

Les deux premières hypothèses justifient la loi de conservation suivante :

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0$$

Par ailleurs, comme  $q = \rho v$ , la troisième hypothèse permet d'écrire :

$$q(\rho)_x = \rho_t + q'(\rho)\rho_x = \rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x$$

Ainsi, l'équation de conservation devient :

$$\boxed{\rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x = 0} \quad (1)$$

Enfin, on associe cette équation à la condition initiale suivante :

$$\rho(x, 0) = g(x)$$

## 2 La méthode des caractéristiques

### 2.1 Présentation de la méthode

La méthode des caractéristiques fait partie des outils utilisés pour étudier les équations aux dérivées partielles. Pour calculer la densité de véhicules  $\rho$  en un point  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , l'idée est de relier ce point  $(x, t)$  à un point  $(x_0, 0)$  par une courbe le long de laquelle  $\rho$  est constante - une *caractéristique*. Ainsi, on obtiendra  $\rho(x, t) = \rho(x_0, 0) = g(x_0)$ . On procédant de cette façon pour tous les points  $(x, t)$  on peut complètement déterminer  $\rho$  et le problème est alors résolu.

**Remarque 1.** *Pour des cas plus généraux, la fonction peut ne pas être constante le long des caractéristiques. On transforme alors l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires qui donnent respectivement la trajectoire des caractéristiques et l'évolution de la fonction le long des caractéristiques.*

On cherche l'équation  $x(t)$  de la caractéristique partant d'un point  $(x_0, 0)$ . On a :

$$\forall t \geq 0, \rho(x(t), t) = g(x_0)$$

D'où, en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \rho_x(x(t), t)x'(t) + \rho_t(x(t), t) = 0 \quad (2)$$

Par ailleurs, l'équation (1) nous donne :

$$\rho_t(x(t), t) + q'(g(x_0))\rho_x(x(t), t) = 0 \quad (3)$$

Ainsi on obtient (3) - (2) :

$$\rho_x(x(t), t) [x'(t) - q'(g(x_0))] = 0$$

En supposant  $\rho_x(x(t), t) \neq 0$  on en déduit que  $x'(t) = q'(g(x_0))$ . Puisque  $x(0) = x_0$ , on trouve :

$$x(t) = q'(g(x_0)) t + x_0$$

On remarque que les caractéristiques sont ici des droites de pente  $q'(g(x_0))$ . Cette valeur dépend *a fortiori* de  $x_0$  et nous verrons plus tard ce qu'il advient si des caractéristiques se coupent.

Nous pouvons à présent établir une formule générale pour la densité  $\rho$ . Étant donné un point de coordonnées  $(x, t)$ , il suffit de remonter la caractéristique jusqu'à  $t = 0$  pour avoir accès à  $\rho(x, t)$ . La caractéristique coupe l'axe horizontal en  $(x_0, 0)$  avec  $x_0 = x - q'(g(x_0)) t$ .

On a finalement :

$$\rho(x, t) = g(x - q'(g(x_0)) t)$$

Ainsi, on a bien une solution à notre problème initial. Nous allons appliquer cette méthode à plusieurs cas particuliers qui correspondent chacun à des situations sur la route.

## 2.2 Applications

**Feu tricolore** On suppose qu'un feu tricolore situé en  $x = 0$  est rouge tant que  $t \leq 0$  et la route en face est libre. Ainsi, la condition initiale est :

$$g(x) = \begin{cases} \rho_m & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On veut établir comment évolue la densité de voitures  $\rho$  après que le feu devienne vert à  $t = 0$ .

On se souvient que  $q'(\rho) = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)$ . Donc la pente des caractéristiques est donnée par :

$$q'(g(x_0)) = \begin{cases} -v_m & \text{si } x_0 \leq 0 \\ v_m & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$$

On cherche à déterminer ce qui se passe dans la région délimitée par les droites d'équation  $x = v_m t$  et  $x = -v_m t$  où ne passe aucune caractéristique. Pour résoudre ce problème de discontinuité, on approche notre condition initiale qui présente un saut en 0 par une fonction  $g_\epsilon$  continue :

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \rho_m & \text{si } x \leq 0 \\ \rho_m \left(1 - \frac{x}{\epsilon}\right) & \text{si } 0 < x < \epsilon \\ 0 & \text{si } x \geq \epsilon \end{cases}$$

Pour chaque  $\epsilon$ , le problème est à présent bien défini.

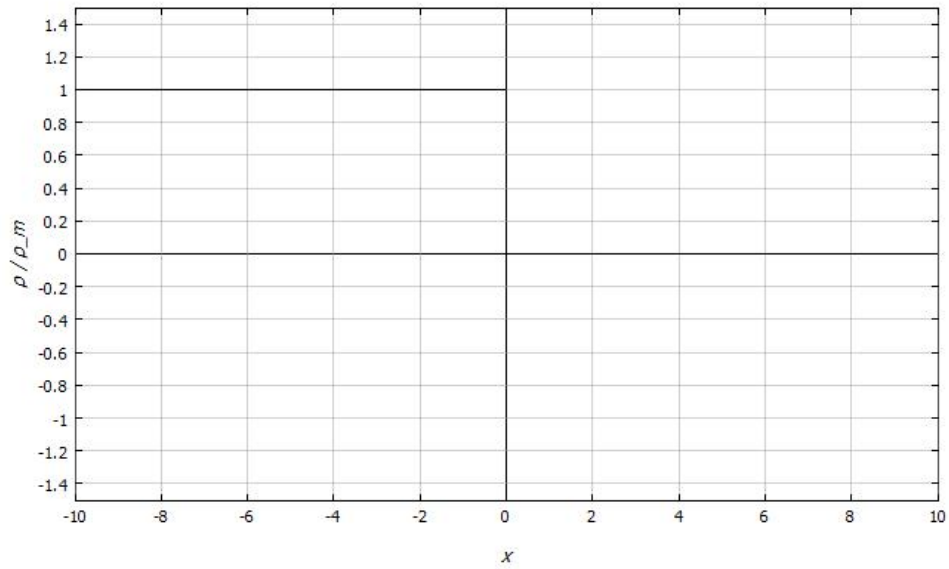


FIGURE 1 – Condition initiale  $g(x)$

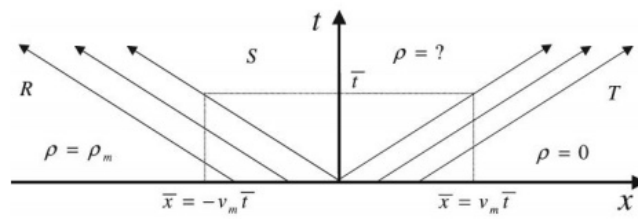


FIGURE 2 – Caractéristiques pour le problème du Feu vert

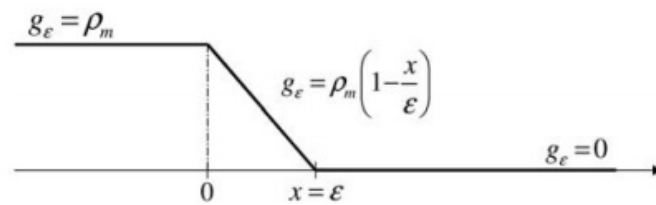


FIGURE 3 – Condition initiale approchée  $g_\epsilon(x)$

L'équation des caractéristiques dans la région comprise entre  $-v_m t$  et  $v_m t$  est :

$$x(t) = -v_m \left( 1 - \frac{2x_0}{\epsilon} \right)$$

On peut calculer la solution correspondante  $\rho_\epsilon$  :

$$\rho_\epsilon = \rho_m \left( 1 - \frac{x + v_m t}{2v_m t + \epsilon} \right)$$

Puis, en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient une solution convenable pour le problème initial :

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_m & \text{si } x \leq -v_m t \\ \frac{\rho_m}{2} \left( 1 - \frac{x}{v_m t} \right) & \text{si } -v_m t < x < v_m t \\ 0 & \text{si } x \geq v_m t \end{cases}$$

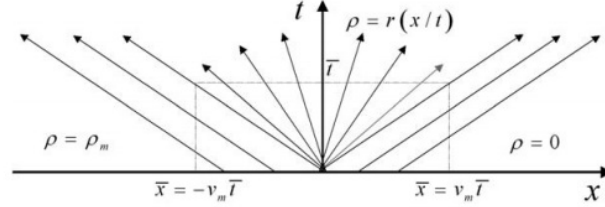


FIGURE 4 – Caractéristiques quand  $\epsilon$  tend vers 0

On vérifie bien que cette solution vérifie l'équation (1) : il s'agit d'une *onde de raréfaction*.

**Embouteillage** On considère cette fois une situation où un encombrement apparaît sur la route. Le profil de la densité initiale est donné par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m & \text{si } x \leq 0 \\ \rho_m & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a  $q'(g(x_0)) = \begin{cases} \frac{3}{4}v_m & \text{si } x_0 \leq 0 \\ -v_m & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$ . Les caractéristiques sont donc données par :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}v_m t + x_0 & \text{si } x_0 \leq 0 \\ -v_m t + x_0 & \text{si } x_0 > 0 \end{cases}$$

Les caractéristiques vont donc se rencontrer au niveau d'une *courbe de choc* correspondant à une discontinuité de  $\rho$ . Avant cette courbe, le trafic n'est pas perturbé et la densité est toujours égale à  $\rho_m/8$  et après le trafic est saturé et la densité vaut  $\rho_m$ . L'équation de cette courbe de choc est  $x(t) = \frac{-1}{8}v_m t$  : c'est la vitesse à laquelle se propage le

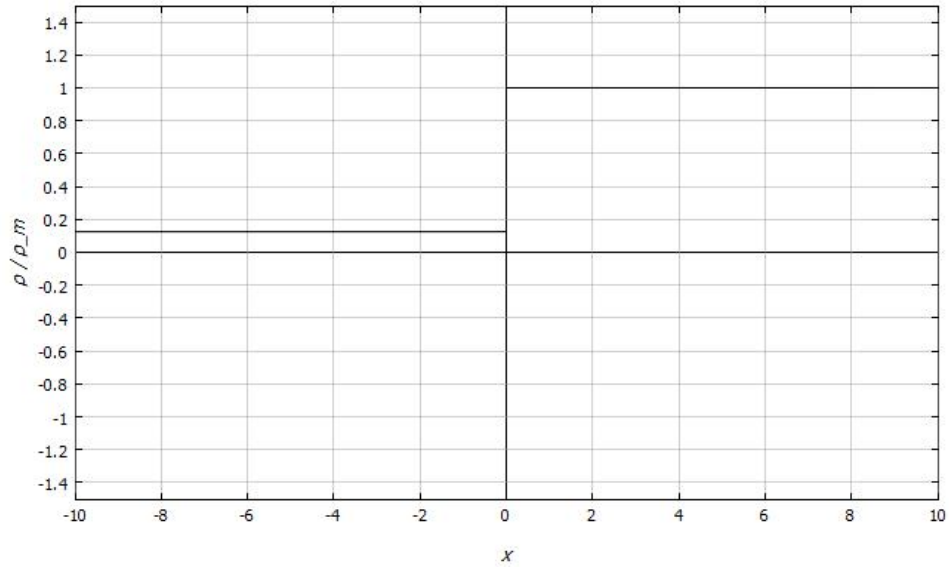


FIGURE 5 – Condition initiale  $g(x)$

choc en arrière. Ainsi la solution au problème est :

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m & \text{si } x \leq \frac{-1}{8}v_m t \\ \rho_m & \text{si } x > \frac{-1}{8}v_m t \end{cases}$$

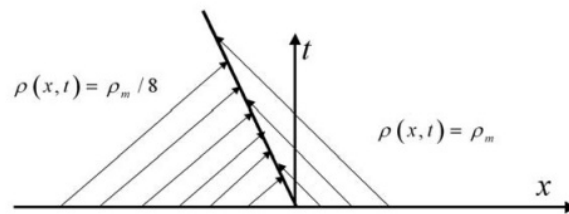


FIGURE 6 – Onde de choc pour un embouteillage

### 3 Les solutions au sens faible

#### 3.1 Problèmes de discontinuité

On a observé plus tôt qu'avec une condition initiale présentant une discontinuité la solution sera irrégulière. En fait, cela peut même arriver avec une condition initiale continue, si des caractéristiques finissent par se couper. On va chercher à présent à définir des solutions dans un sens plus faible afin de justifier qu'une fonction discontinue puisse être solution à notre problème.



Commençons par considérer  $u$ , une fonction  $\mathcal{C}^1$ , qui soit solution à notre problème (au sens classique). Soit  $v$  une fonction test, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact.

Puisque  $u_t + q(u)_x = 0$  on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u_t + q(u)_x) v \, dx \, dt = 0$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (uv_t + q(u)v_x) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} g(x)v(x, 0) \, dx = 0 \quad (4)$$

Ainsi, une fonction  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est solution au sens classique si et seulement si l'équation précédente est vérifiée.

**Définition 3.1.** *On dira qu'une fonction  $u$ , sans condition de régularité, est une **solution faible** pour notre problème si l'équation (4) est vérifiée pour toute fonction test  $v$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.*

Cette définition est justifiée quelle que soit la régularité de  $u$ , car à présent les dérivées ne portent plus sur  $u$  mais sur  $v$  qui est suffisamment régulière.

### 3.2 Condition de Rankine-Hugoniot, condition d'entropie

Avec cette définition plus faible de solution, l'unicité n'est plus garantie. Nous allons établir deux critères permettant de déterminer si une fonction peut être solution, et si elle a bien une signification physique.

**Condition de Rankine-Hugoniot** Si une fonction  $u$  présente une discontinuité le long d'une courbe  $C$ , dans quel cas peut-on interpréter  $u$  comme une solution avec un choc? On peut dériver de la définition précédente la *condition de Rankine-Hugoniot* qui lie la valeur de la densité et du flux de véhicules de part et d'autre de  $C$  ainsi que l'équation de cette courbe de choc pour que  $u$  soit solution :

$$q(u_g) - q(u_d) = \dot{x}(u_g - u_d)$$

où :

- $u_g$  et  $u_d$  sont les valeurs de  $u$  à gauche et à droite de  $C$
- $\dot{x}$  est la pente de  $C$  (où bien la dérivée de son équation paramétrique  $x(t)$  si ce n'est pas une droite)

**Condition d'entropie** Lorsque plusieurs solutions sont compatibles avec l'équation de départ, il faut ensuite déterminer laquelle décrit le mieux l'évolution de notre problème. Lorsque  $q$  est uniformément convexe, alors la *condition d'entropie* est vérifiée si :

$$\exists E \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, y > 0, t > 0 \text{ on a : } u(x + y, t) - u(x, ) \leq \frac{E}{t}y$$

On a alors en particulier, si  $x$  est un point de discontinuité :

$$u_g(x, t) < u_d(x, t)$$

Donc, si  $q$  est strictement convexe, on obtient :

$$q'(u_g) < \frac{q(u_g) - q(u_d)}{u_g - u_d} < q'(u_d)$$

Et la condition de Rankine-Hugoniot nous donne alors l'inégalité suivante le long de la courbe de choc :

$$q'(u_g) < \dot{x}(t) < q'(u_d)$$

Une solution vérifiant cette condition aura alors une signification physique et nous la choisirons comme solution à notre problème. L'interprétation géométrique que l'on peut en faire est que les caractéristiques peuvent intersecter la courbe de choc mais pas émerger de cette courbe (dans ce cas là on ne pourrait pas remonter le temps).

## 4 Conclusion

Ce mémoire présente un aspect très concret des mathématiques que sont les Équations aux Dérivées Partielles. En permettant de relier les variations d'une fonctions selon ses différentes variables, ces équations sont au cœur d'un grand nombre de problèmes de mathématiques appliquées et les modèles reposant sur de telles équations sont abondants en physique, en biologie, en économie ou en chimie.

Les outils de résolution d'Équations aux Dérivées Partielles sont variés et leur utilisation dépend du type d'équation considérée. Ici, nous avons étudié une équation de conservation et c'est la méthode des caractéristiques qui a été préférée. Après nous être penché sur cette démarche de résolution, nous avons travaillé sur une définition plus faible de solutions, permettant de justifier que des fonctions irrégulières soient solutions à notre problème.

## 5 Références

- [1] *Partial Differential Equations*, LAWRENCE C. EVANS
- [2] *Partial Differential Equations in action*, SANDRO SALSA, 2008
- [3] *On Kinematic Waves - II - A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads*, M.J. LIGHTHILL, G.B. WHITHAM, 1955

**Note :** Les Figures 2, 3, 4 et 6 sont issues de l'ouvrage de Salsa, [2].