
Corentin LE BARS

Le théorème d'impossibilité d'Abel
Une démonstration de Vladimir I. Arnold

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de Monsieur **Jacques FÉJOZ**



Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Troisième année (L3)

Table des matières

I	Les surfaces de Riemann	3
1	La surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt{z}$	3
2	La propriété de monodromie	7
3	Fonctions représentables par radicaux	9
II	Le théorème d'Abel	11
1	Le groupe de monodromie	12
2	Le groupe de monodromie des fonctions représentables par radicaux	13
3	Le théorème d'Abel	15

Introduction

Le théorème d'Abel, exprimant qu'une équation algébrique de degré supérieur ou égal à 5 ne peut être résolue par radicaux, est l'un des premiers théorèmes d'impossibilité. Pour Arnold (1937 - 2010), il s'agit de

"l'un des plus importants résultats d'impossibilité en mathématiques."

Cette importance est d'abord intrinsèque, de par l'étendue de ses conséquences directes, mais le cheminement emprunté pour la démonstration apporte lui aussi un intérêt remarquable. En effet, bien que nous nous intéresserons aux équations algébriques, et donc aux fonctions polynomiales, l'argument qui prouve l'impossibilité de la résolution par radicaux est de nature topologique. Aussi, le théorème reste vrai pour des fonctions disposant des mêmes points de branchement et de la même structure (au sens topologique) que les équations polynomiales. Plus généralement, ce théorème ouvre la voie à la théorie de la non résolubilité topologique, un champ qui s'est largement développé au XX^{ème} siècle et auquel on doit notamment des résultats similaires concernant les intégrales elliptiques.

L'objet de ce mémoire est de démontrer ce théorème en adoptant la démarche de Vladimir Arnold, et de comprendre en quoi cette perspective topologique est riche. Nous nous appuyerons très largement sur le livre de V.B. Alekseev¹, un ancien élève d'Arnold ayant réuni et mis en forme les éléments de démonstration que ce dernier avait donnés lors d'un cours en 1963.

Présentons maintenant plus formellement le problème. Nous nous intéressons aux solutions complexes d'une équation générique de la forme

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{1}$$

dans laquelle les coefficients de l'équation vérifient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $a_0 \neq 0$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, nous savons que l'équation (1) possède n solutions complexes. On dispose de formules explicites (et relativement simple) pour déterminer l'ensemble de ces solutions dans les cas où $n \leq 4$ ². Il est naturel de se demander si nous pouvons obtenir des formules similaires si $n \geq 5$, et la réponse est non en général. Il n'existe pas de formule "simple" pour déterminer les racines de l'équation générique (1). Plus précisément, nous allons démontrer le

Théorème d'Abel . *L'équation algébrique générique de degré supérieur ou égal à 5 n'est pas résoluble par radicaux.*

Autrement dit, il n'existe pas de formule exprimant les racines d'une telle équation en fonction de ses coefficients et d'un nombre fini des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, d'élevation à une puissance naturelle et d'extraction d'une racine de degré naturel.

L'approche d'Arnold pour prouver ce théorème est d'étudier les fonctions représentables par radicaux, et de leur donner une caractérisation topologique à partir de laquelle on peut déterminer certaines propriétés. Nous montrerons ensuite que les fonctions donnant les solutions d'une équation algébrique de degré 5 ne possèdent pas de telles propriétés, ce qui prouvera par la contraposée qu'elles ne peuvent être représentables par radicaux.

1. Alekseev, V.B, *Abel's theorem in problem and solutions*, 2004

2. A l'origine, les coefficients de l'équation algébrique étaient réels et on utilisa les nombres complexes pour résoudre le cas $n = 3$

I Les surfaces de Riemann

Dans tout ce qui suit, nous étudierons des fonctions définies sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes et à valeurs complexes. Comme dans le livre d'Alekseev, nous avons choisi de mener une approche intuitive du concept de surface de Riemann, fondée sur la construction de celle de la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$. En comprenant cette construction, on peut avoir une compréhension intuitive des surfaces de Riemann. Pour les définir formellement, il faudrait des outils supplémentaires de géométrie différentielle et algébrique, que nous ne pouvons introduire ici.

1 La surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt{z}$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des fonctions holomorphes (c'est-à-dire dérivables au sens complexe) ayant un comportement local sans ambiguïté, mais dont le comportement global est plus délicat à manipuler. C'est le cas notamment de la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt{z} \in \mathbb{C}$, et pour cause :

Proposition I.1. *Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour $\forall z, (f(z))^2 = z$ et qui soit continue.*

Preuve . Soit f une telle fonction, posons alors $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^{it})e^{-it/2} \in \mathbb{C}$. Alors la fonction g ainsi définie est continue et $\forall t, g(t)^2 = 1$, donc elle est constante égale à $\epsilon = \pm 1$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \epsilon e^{it/2}$. Mais $f(1) = f(e^{i0}) = f(e^{i2\pi}) \Rightarrow -\epsilon = \epsilon$, et donc il y a contradiction.

Tout l'objet des surfaces de Riemann est de pouvoir surmonter ce problème de continuité : on peut voir la surface de Riemann de \sqrt{z} comme une extension du corps des complexes sur laquelle la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ est continue.

Méthode de construction de la surface de Riemann par continuité.

Dans la suite, on notera C l'image d'une fonction continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Donnons-nous également une fonction holomorphe w . Supposons qu'une telle courbe parte d'un point z_0 et arrive à un point z_1 . Choisissons d'ores et déjà une des valeurs prises par la fonction w en z_0 en notons-là w_0 . Si le long de la courbe, nous choisissons les valeurs $w(z)$ prises par w de telle sorte que ces valeurs varient continûment, alors on peut trouver une valeur w_1 prise par w en z_1 de telle sorte que w soit continue sur C .

Définition 1. *On dit alors que $w(z_1)$ est définie par continuité le long de la courbe C .*

Cependant, cette définition peut ne pas être unique. En effet, pour $w(z) = \sqrt{z}$, l'unicité est perdue si la courbe passe par le point 0 car les deux images possibles de la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ se confondent en un seul point. Cette considération confère au point $z = 0$ une importance spécifique dans l'étude de cette fonction. En fait, c'est parce que la fonction \sqrt{z} n'est pas analytique en 0, et c'est pourquoi on ne peut appliquer le principe du prolongement analytique qui implique l'unicité sur le reste du plan.

Proposition I.2. *Soit C un lacet (i.e. une courbe fermée) sur le plan complexe. Si la valeur de \sqrt{z} au point final de C définie par continuité est égale à sa valeur au point initial, alors C tourne autour de 0 un nombre pair de fois.*

Preuve . La première chose à remarquer est que si la variation de l'argument le long de la courbe C est égal à ϕ , alors la variation de l'argument de l'image de C par $w(z) = \sqrt{z}$ est $\phi/2$.

Puis, en notant $w_0(t)$ l'image continue de w le long de C , et puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on a $w_0(1) = \pm w_0(0)$. Mais $w_0(1) = w_0(0) \Leftrightarrow$ la variation de $w_0(t)$ est égale à $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui est équivalent à ce que la variation de γ soit égale à $4k\pi$ par la remarque précédente. Cela équivaut exactement à ce que la courbe tourne autour de 0 un nombre pair de fois.

Remarque 1. On retiendra que si on interdit aux courbes de tourner autour de 0 , par exemple en faisant une coupure du plan complexe entre 0 et $-\infty$, alors les valeurs prises par $w(z) = \sqrt{z}$ sont définies de manière unique une fois donnée la valeur du point initial.

On peut ainsi, sur \mathbb{C} privé de la coupure, décomposer la fonction à plusieurs valeurs \sqrt{z} en deux fonctions continues à une seule valeur ${}_1\sqrt{z}$ et ${}_2\sqrt{z}$ ³.

Définition 2. Ces fonctions sont appelées les déterminations (ou branches) de la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$.

Remarque 2. Si on définit par continuité la valeur de $w(z_1) = \sqrt{z_1}$ le long d'une courbe C ne traversant pas la coupure et partant de z_0 , alors $w(z_0)$ et $w(z_1)$ appartiennent à la même détermination. Inversement, si la courbe C traverse la coupure une fois, $w(z_0)$ et $w(z_1)$ appartiennent à deux déterminations différentes.

Grâce à cette étude préliminaire sur la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$, on peut construire la surface de Riemann. Pour cela, on duplique \mathbb{C} en deux copies, que l'on appellera des *feuilles* et sur lesquelles on fait la même coupure $[0, -\infty]$ (dont on rappelle qu'elle signifie qu'on ne peut tourner autour de 0 sans changer de détermination). Ces deux feuilles correspondent au deux déterminations de la fonction : sur la feuille 1, $\sqrt{z} = {}_1\sqrt{z}$ et sur la feuille 2, $\sqrt{z} = {}_2\sqrt{z}$. Ensuite, on veut coller les deux feuilles de sorte qu'en parcourant la surface, la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ soit continue et définie de manière univoque. Par la remarque 2, on peut procéder de cette manière : coller la partie haute de la feuille 1 avec la partie basse de la feuille 2, et coller la partie basse de la feuille 1 avec la partie haute de la feuille 2. On obtient la surface de Riemann présentée sur la figure 2.

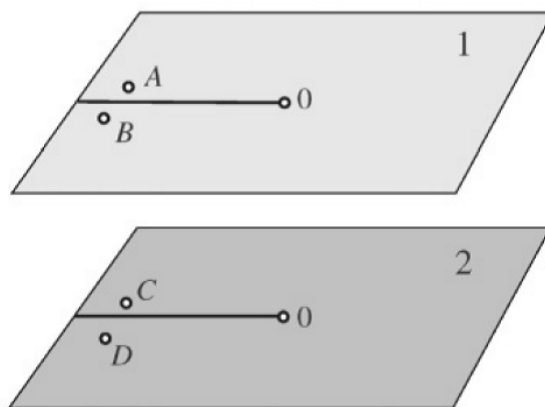


FIGURE 1 – Les deux copies de \mathbb{C} et leurs coupures partant de 0 .

On retiendra dans cette construction le caractère central du point 0 . En effet, si un courbe continue tourne autour de tout autre point z_0 (avec un rayon suffisamment

3. Par exemple, ${}_1\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et ${}_2\sqrt{\rho e^{i\theta}} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$

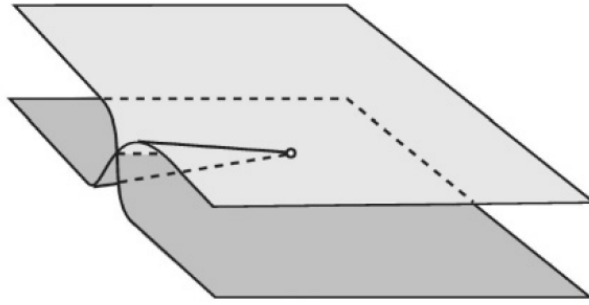


FIGURE 2 – Surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt{z}$.

petit), alors la variation de l'argument de γ sera 0, et donc la variation de la fonction $w(z) = \sqrt{z}$ sera également de 0. Par la remarque 2, la courbe C restera sur la même feuille (c'est-à-dire appartiendra à la même détermination). On peut généraliser cette caractéristique.

Définition 3. *Étant donnée une fonctions holomorphe w , un point de branchement z_0 de la fonction w est un point tel que tout lacet contenant z_0 peut faire passer d'une détermination de la fonction à une autre (ce qui correspond au passage d'une feuille à l'autre).*

Dans la construction de la surface de Riemann que nous avons faite, nous avons choisi de faire une coupure de 0 à $-\infty$ mais ce choix est arbitraire. On retiendra donc que les particularités topologiques (intrinsèques) de la fonction $w(z) = \sqrt{z}$ sont données par :

- le point de branchement 0 ;
- le nombre de déterminations (de feuilles) de la fonction ;
- la manière dont on passe de l'une à l'autre (par un tour autour des points de branchement ou en traversant les coupures effectuées).

On peut ainsi résumer la surface de Riemann par la donnée de ce que l'on appellera son *schéma*.

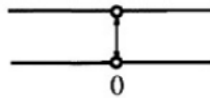


FIGURE 3 – Schéma de la surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt{z}$.

Le schéma 3 nous indique que :

- $z = 0$ est un point de branchement : si on fait un tour autour, on passe d'une feuille à l'autre ;
- la flèche indique que le passage d'une feuille à l'autre se fait non seulement en tournant autour de 0, mais aussi en traversant la coupure qu'on a faite à partir du point 0.

Dans la suite, on gardera en tête ce procédé et on le généralisera pour déterminer les surfaces de Riemann de fonctions plus compliquées.

Les surfaces de Riemann de fonctions plus élaborées

Considérons maintenant la fonction $w : z \mapsto \sqrt[n]{z}$. On peut déjà faire les remarques suivantes :

Remarque 3. Si la variation de l'argument d'une courbe C sur le plan complexe est égale à ϕ , alors la variation de l'argument le long de l'image de cette courbe par la fonction w sera de ϕ/n .

De plus, seul le point $z = 0$ est un point de branchement. Donc après avoir fait la coupure de 0 à l'infini (dans n'importe quelle direction), la fonction w apparaît comme décomposable en n déterminations : par la remarque précédente, il faut n tours autour de 0 pour revenir à la même détermination.

On aura donc le schéma représenté par la figure 4

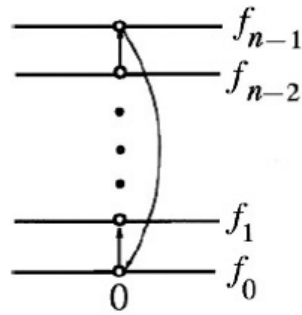


FIGURE 4 – Schéma de la surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt[n]{z}$.

Pour un n quelconque, la surface de Riemann étant malaisée à dessiner, on en donne une représentation pour le cas $n = 3$ à la figure 5.

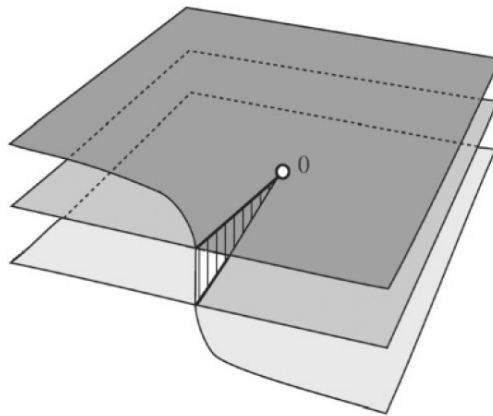


FIGURE 5 – Surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt[3]{z}$.

Considérons maintenant la fonction $w : z \mapsto \sqrt{z^2}$. Cette fonction possède deux déterminations définies sur le plan complexe : $w_0(z) = z$ et $w_1(z) = -z$.

Lorsqu'on suit une courbe faisant un tour autour de 0, la variation de l'image de cette courbe est de 2π , donc on restera sur la même détermination. Ainsi 0 n'est-il pas un point de branchement.

Cependant, lorsqu'on suit une courbe allant de z_0 , d'image w_0 , à z_1 passant par le point 0, on ne peut plus définir de manière unique la valeur du point $w_1 = w(z_1)$ car en 0 les deux déterminations prennent la même valeur.

Définition 4. *Si à cause du passage sur un point z_0 , on ne peut plus définir par continuité de manière unique la valeur en z_1 de la fonction w , mais que z_0 n'est pas un point de branchement, alors z_0 est un point de non unicité de la fonction w .*

Lors de la construction de surfaces de Riemann, nous n'avons pas besoin de faire de coupure partant des points de non unicité, mais ils doivent être évités lorsque l'on trace des courbes pour définir des déterminations par continuité. On aura donc la surface représentée par la figure 6 :

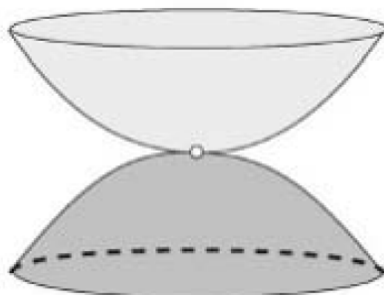


FIGURE 6 – Surface de Riemann de $z \mapsto \sqrt{z^2}$.

Le schéma de la fonction consisterait en deux feuilles disjointes.

Remarque 4. Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions qui pouvaient être décomposées en déterminations continues, de telles sortes que si on fixait une détermination sur un point, alors on pouvait définir de manière unique par continuité tous les autres points du plan complexe par une courbe arbitraire ne passant pas par les points de branchements ou de non unicité. Nous allons voir que c'est le cas de toutes les fonctions représentables par radicaux, ainsi que de toutes les fonctions algébriques⁴. Nous allons formaliser cette caractéristique.

2 La propriété de monodromie

Nous n'avons vu que des fonctions pour lesquelles il était possible de tracer la surface de Riemann associée. Une question naturelle serait de se demander si une telle construction est toujours possible, et nous allons voir que si nous munissons nos fonctions d'une certaine propriété -la propriété de monodromie- alors on peut s'assurer de cette possibilité. On se donne maintenant une fonction $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Pour l'instant, considérons deux

4. Une fonction w est dite algébrique si elle exprime les racines d'une équation de la forme

$$a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0 \quad (2)$$

en fonction du paramètre z , et où les a_i sont des fonctions polynomiales. On utilise sans démonstration que toutes les fonctions algébriques sont analytiques.

courbes C_1 et C_2 joignant toutes deux les points z_0 et z_1 et ne passant par aucun point de non unicité ou de branchements. On suppose de plus que l'on peut déformer continûment la courbe C_1 en la courbe C_2 sans qu'aucune des courbes intermédiaires (durant la déformation) ne passe par un point de branchement ou de non unicité, comme sur la figure 7.

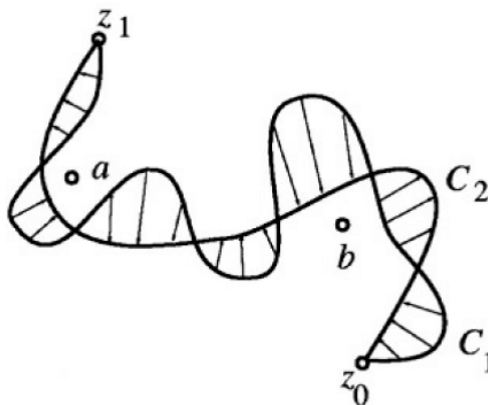


FIGURE 7 – Déformation de la courbe C_1 en la courbe C_2 , où a et b sont des points de branchements.

Définition 5. On dit que la fonction w vérifie la propriété de monodromie si la valeur $w(z_1)$ est définie par continuité de manière unique que l'on ait suivi C_1 ou C_2 .

Intuitivement, cette propriété est synonyme de bon comportement de la fonction autour de ses singularités.

Proposition I.3. Supposons qu'une fonction $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ possède la propriété de monodromie. Si on réalise les coupures sur le plan complexe à partir des points de branchement et allant à l'infini de sorte que ces coupures n'intersectent pas, alors w est décomposable en déterminations continues.

Preuve . On se rapportera à la figure 8. Supposons que C_1 et C_2 sont deux courbes

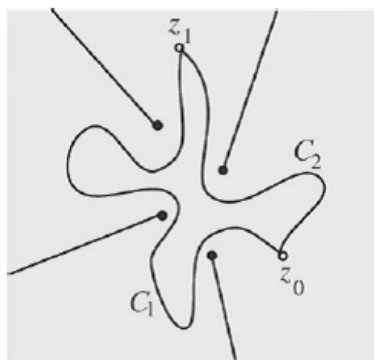


FIGURE 8 – Déformation de la courbe C_1 en la courbe C_2 , où a et b sont des points de branchements

continues ne traversant pas de points de branchements ni de points de non unicité. Par la propriété de monodromie, $w(z_1)$ est défini de manière unique par continuité le long d'une courbe arbitraire, ce qui permet de définir une détermination à partir de la donnée de $w(z_0)$.

Proposition I.4. *Considérons toujours une fonction munie de la propriété de monodromie et possédant un nombre fini de points de branchements. Si on passe d'un point à un autre en traversant une coupure, alors on passe d'une détermination à une autre, indépendamment du point de passage sur la coupure.*

Preuve . Cf figure 9. On veut prouver que si l'on passe de la i ème à la j ème détermination

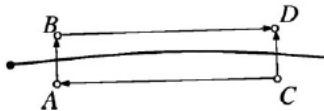


FIGURE 9 – On peut déformer continûment la courbe CABD en la courbe CD, sans passer par des points de branchement.

par le passage AB, alors il en est de même si on suit le chemin CD. Puisque la fonction w a un nombre fini de branchements, on peut se ramener au cas où il n'y a aucun point de branchement dans la région CABDC. Alors, par propriété de monodromie, et puisqu'on peut déformer continûment la courbe CABD en la courbe CD sans passer par des points de branchement, la valeur de w au point D est définie de manière unique le long des courbes CD et CABD. Puisqu'en suivant le chemin CABD on emprunte le passage AB, alors on passe de la i ème à la j ème détermination. Il en est donc de même pour le passage CD.

Par les deux propriétés précédentes, si une fonction possède la propriété de monodromie, alors on peut tracer sa surface de Riemann. En effet, par un tour autour d'un point de branchement, on traverse une coupure et donc on change de détermination : cela correspond aux passages exprimés par les flèches sur nos schémas de surface de Riemann. Nous avons donc prouvé que pour comprendre la structure d'une telle surface, il suffit de connaître les points de branchement et de définir les passages entre les branches correspondant à des rotations autour de ces points.

Remarque 5. Toutes les fonctions que nous considérons possèdent la propriété de monodromie. En fait, c'est même le cas de toutes les fonctions analytiques, mais nous ne prouvons pas ce point car il faudrait nous munir d'outils conséquents d'analyse complexe.

3 Fonctions représentables par radicaux

Analysons maintenant plus en profondeur les fonctions qui nous intéressent, c'est-à-dire celles que l'on pourra utiliser pour la construction des solutions de l'équation algébrique (1).

Définition 6. *On dit d'une fonction qu'elle est représentable par radicaux si elle peut s'écrire en termes des fonctions $f(z) = z$ et des fonctions constantes $g(z) = a, a \in \mathbb{C}$ par les moyens d'un nombre fini des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, d'élevation à une puissance naturelle et d'extraction d'une racine d'ordre naturel.*

Exemple. $f(z) = \left(\sqrt[3]{\sqrt{z} + 3z^2} - \frac{3}{\sqrt{z^3}} \right)^2$

Surfaces de Riemann des fonctions représentables par radicaux

Proposition I.5. *Notons h une fonction représentable par radicaux et C une courbe reliant z_0 et z_1 , ne passant pas par les points en lesquels h n'est pas définie. Si l'une des*

valeurs de h en z_0 est choisie, notons-la w_0 , alors il existe au moins une image continue de C par h .

De plus, si C ne passe pas par les points de branchement ou de non unicité de la courbe, alors h peut être définie par continuité de manière unique le long de C .

Preuve . Il suffit de montrer que ces propriétés sont satisfaites par nos fonctions $f(z) = z$ et $g(z) = a$, et qu'elles se conservent lors des opérations autorisées dans la définition 6. Remarquons d'abord que si $h(z) = z$, l'image de C par h est C , donc la proposition est vraie. De même si $h(z) = a$, la courbe est contractée en un point, et donc la propriété reste vraie.

Supposons maintenant que les fonctions f et g possèdent la propriété, et étudions $h = f + g$. On aura tout d'abord $w_0 = f_0 + g_0$, où f_0 est l'une des valeurs de f en z_0 et g_0 est l'une des valeurs de g en z_0 . Puisque f et g possèdent la propriété de monodromie, il existe deux images continues $C' = f(C)$ et $C'' = g(C)$ d'équations paramétriques $w'(t)$ et $w''(t)$, partant respectivement en f_0 et g_0 . Alors la courbe définie par $w_0(t) = w'(t) + w''(t)$ convient en tant que somme de fonctions continues et vérifiant $w_0(0) = f_0 + g_0$. On prouvera de la même manière la validité de l'assertion pour les cas $h(z) = f(z) - g(z)$, $h(z) = f(z).g(z)$, $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$.

Faisons maintenant le cas où $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$. Par définition de cette fonction, on aura $w_0^n = \tau_0$, où τ_0 est l'une des valeurs de $f(z_0)$. L'application peut être considérée comme la composition de deux applications, et nous savons par hypothèse qu'il existe au moins une image continue C' de C par f , d'équation paramétrique $\tau(t)$. Notons maintenant $\phi(t) = \arg(\tau(t))$ et $r(t) = |\tau(t)|$. On aura donc $\tau(t) = r(t) \exp(i\phi(t))$, et puisque f vérifie l'assertion, on peut supposer ϕ continue. Notons alors $\rho(t)$ l'unique valeur positive réelle de la fonction $\sqrt[n]{r(t)}$. Alors ρ est une fonction continue et les n images continues de la courbe $\tau(t)$ sont données par les équations paramétriques

$$w_k(t) = \rho(t) \exp\left(i\left(\frac{\phi(t) + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, \dots, n - 1.$$

L'une de ces équations paramétriques commencera en τ_0 car elles prennent en 0 toutes les valeurs possibles de $\sqrt[n]{\tau_0}$. Cette dernière, en tant que fonction continue de t , convient, et on a même l'unicité si ρ ne s'annule pas, ce qui correspondrait à ne pas passer par un point de branchement de h .

Remarque 6. Il découle de cette propriété et de la remarque 5 qu'on peut tracer les surfaces de Riemann des fonctions représentables par radicaux.

Schéma des fonctions représentables par radicaux

Notons $h(z) = f(z) + g(z)$, et supposons que $f_i, i = 1, \dots, n$ et $g_j, j = 1, \dots, m$ sont les déterminations de f et g . Alors les déterminations de h seront les $h_{ij} = f_i + g_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

On a donc une méthode pour construire les schémas de fonctions du type $h(z) = f(z) + g(z)$: on trace les schémas des fonctions f et g , puis si en z_0 on passe de la détermination f_{i_1} à f_{i_2} et g_{j_1} , à g_{j_2} , alors en z_0 on passera de la détermination $h_{i_1j_1}$ à la détermination $h_{i_2j_2}$.

Exemple. Schéma de Riemann de la fonction $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$. On se rapportera aux schémas de Riemann des fonctions $z \mapsto \sqrt{z}$ et $z \mapsto \sqrt[3]{z}$ donnés sur la figure 4. On aura donc le schéma de la figure 10.

Cependant, il peut arriver que certaines déterminations h_{ij} coïncident. Le cas échéant, on regroupe les feuilles correspondant à ces déterminations.

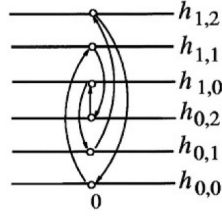


FIGURE 10 – Schéma de Riemann de la fonction $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$

Exemple. Schéma de la fonction $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z}$. Avec des notations intuitives, on aura que $h_{1,0} = h_{0,1} = 0$ (on somme deux déterminations opposées). On aura donc le schéma suivant

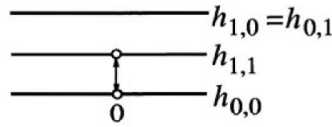


FIGURE 11 – Schéma de Riemann de la fonction $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z}$

La construction du schéma d'une fonction du type $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ est légèrement plus délicate. En effet, à chaque détermination f_i de la fonction f correspondent ce qu'on pourrait appeler un bouquet⁵ de n déterminations $f_{i,k}$ de telle sorte que

$$\forall k = 1, \dots, n, f_{i,k} = f_{i,0} \exp(i2k\pi/n)$$

Donc, si une courbe fait une rotation autour d'un point de branchement z_0 de f , faisant passer de la détermination f_i à f_j , alors on passe du bouquet correspondant à f_i au bouquet correspondant à f_j .

Parallèlement, supposons qu'on se déplace sur une courbe ne traversant pas de point de branchement ni de point de non unicité de la fonction $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$, et que le long de cette courbe on passe de la détermination $f_{i,s}$ à la détermination $f_{j,r}$. Alors par une même courbe, on passerait de la détermination $f_{i,s+k}$ à la détermination $f_{j,r+k}$ si on partait de la détermination $f_{i,s+k}$ (les sommes $r+k$ et $s+k$ étant calculées modulo n). Notons cette propriété la propriété (P).

Donc, si on fixe l'action d'une rotation autour d'un point de branchement pour une des déterminations appartenant à un certain bouquet, alors on impose les changements produits si la donnée d'origine avait été dans un autre bouquet.

Même si ces méthodes ne sont pas claires sans pratique, il n'est pas nécessaire de les connaître : il s'agit simplement de savoir que l'on peut de manière efficace construire et expliciter la surface de Riemann de toute fonction représentable par radicaux. Ce n'est plus un résultat théorique d'existence, mais bien la possibilité de représenter une telle surface.

II Le théorème d'Abel

Nous avons maintenant les outils pour démontrer le théorème d'Abel. Si nous avons formalisé et simplifié la structure des fonctions complexes que nous avons étudiées, c'est

5. Nous utilisons ce terme sans prétention d'universalité : c'est la traduction littérale de "bunch", terme employé dans le livre d'Alekseev.

pour pouvoir faire correspondre à chacune une structure de groupe. Nous ne ferons pas ici les rappels de base sur la théorie des groupes.

1 Le groupe de monodromie

Rappelons que tout l'objet de la construction des surfaces de Riemann consistait à se pourvoir d'une surface sur laquelle il n'y a pas d'ambiguïté de définition de la fonction : si une courbe part d'une feuille et ne traverse aucun point de branchement ni de non unicité, alors en se donnant une détermination à l'origine de la courbe, on définit de manière unique la détermination à l'arrivée. Ceci implique qu'en partant de deux déterminations distinctes, on arrive à deux déterminations distinctes. Puisqu'on travaille sur des fonctions possédant un nombre fini de points de branchements et sur lesquelles on peut construire des surfaces de Riemann, on peut numéroter les déterminations (et donc les feuilles). Une courbe donnée enverra donc de manière bijective l'ensemble des feuilles de la fonction considérée (qu'on notera dorénavant w) sur lui-même. C'est ainsi qu'on voit apparaître une structure de groupe de permutations.

Exemple. Schéma de $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$. On renvoie le lecteur au schéma de Riemann qu'on avait construit sur la figure 10. Le groupe des permutations du schéma de la surface de Riemann de la fonction sera le groupe généré par l'élément du groupe des permutations à 6 éléments de \mathcal{S}_6 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (16)(12)(14)(13)(15)$

Remarque 7. Un tel groupe sera un sous-groupe de \mathcal{S}_6 . La numérotation des feuilles n'importe pas car on travaille à isomorphisme près (en numérotant différemment, on obtiendrait deux sous-groupes isomorphes).

Parallèlement, soit z_0 un point du plan complexe de telle sorte que z_0 ne soit ni un point de branchement ni un point de non unicité de la fonction w . Si on fixe la valeur $w(z_0) := w_0$ d'une détermination w_i en ce point, et qu'on considère une courbe C fermée ne passant par aucun point de branchement ni de non unicité, alors la valeur à l'arrivée, correspondant à une détermination w_j sera définie de manière unique. Si on était parti d'une autre détermination, on serait arrivé à une autre détermination (dans le cas contraire, en parcourant la courbe dans le sens inverse on perd l'unicité). Si on considère toutes les courbes continues fermées issues de z_0 , on voit ici aussi apparaître une structure de groupe (à chaque courbe on associe une permutation, et l'ensemble de ces permutations est le générateur du groupe qui nous intéresse). On appellera ce groupe le *groupe des permutations des valeurs $w(z_0)$* .

Proposition II.1. *Soit G_1 le groupe des permutations des valeurs $w(z_0)$ et G_2 le groupe des permutations d'un schéma de Riemann de w . Alors G_1 et G_2 sont isomorphes.*

Preuve . Notons $z_i, i = 1, \dots, s$ les points de branchements de la fonction, et faisons correspondre les n valeurs $w_i, i = 1, \dots, n$ de w en z_0 aux n feuilles dans le schéma de Riemann de w . Ainsi, on peut associer à chaque permutation des valeurs $w(z_0)$ une permutation des feuilles. Montrons que sous cette correspondance les groupes coïncident.

Notons g une permutation des valeurs associée au lacet continu C issu de z_0 traversant (dans cet ordre) les coupures issues de $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_m}$. Supposons qu'une rotation autour du point z_i correspond à une permutation des feuilles g_i , alors à la permutation g on associe la permutation des feuilles $g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot g_{i_{m-1}}^{\sigma_{m-1}} \cdot \dots \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$, où $\sigma_i = 1$ si la traversée se fait dans le sens trigonométrique et -1 sinon. Il vient donc que $g = g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot g_{i_{m-1}}^{\sigma_{m-1}} \cdot \dots \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$ et donc $g \in G_2$.

Inversement, étant donné un élément $g = g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot g_{i_{m-1}}^{\sigma_{m-1}} \cdot \dots \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$, on associe facilement une courbe. Voir la figure 12

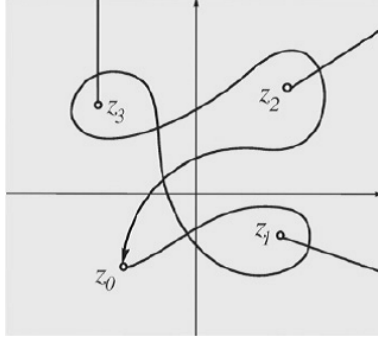


FIGURE 12 – Exemple de courbe (et donc permutation dans G_1) correspondant à l'élément $g = g_2^{-1} \cdot g_3 \cdot g_1^{-1}$ de G_2 .

En conséquence, et puisque le choix du point z_0 était arbitraire, ces deux groupes représentent un seul et même groupe, qui porte en quelque sorte l'information topologique de la fonction. On a ainsi "codé" la structure topologique de la fonction en données algébriques.

Définition 7. On appelle ce groupe le groupe de monodromie de la fonction.

2 Le groupe de monodromie des fonctions représentables par radicaux

Il s'agit maintenant de montrer qu'il y avait un intérêt à transformer l'étude analytique de la fonction en étude algébrique. Et en effet, les groupes de monodromie ont une spécificité : ils sont résolubles.

Afin de consacrer le plus d'espace aux surfaces de Riemann, l'objet véritablement fondamental de ce mémoire, nous ne pouvons rappeler tous les résultats de base de la théorie des groupes. Insistons simplement sur le commutant :

Définition 8. On définit le commutant d'un groupe comme l'ensemble des commutateurs de ce groupe : $K(G) = \{aba^{-1}b^{-1} ; a, b \in G\}$.

Remarque 8. Les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$ "mesurent" le degré de non commutativité d'un groupe : $K(G) = 1_G \Leftrightarrow G$ est abélien.

Remarque 9. Il est facile de montrer que le commutant d'un groupe est un sous-groupe. C'est même un sous-groupe distingué dans G : $\forall g \in G, gK(G)g^{-1} = K(G)$.

Puisque $K(G)$ est un groupe, on peut considérer $K(K(G))$, puis $K(K(K(G))) := K_3(G) \dots$ Nous travaillons avec des groupes finis, et puisqu'il n'y a pas de suite strictement décroissante dans \mathbb{N} , cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

Définition 9. On dit que le groupe G est résoluble si la suite $(K_n(G))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire en $\{1_G\}$.

Les lemmes qui suivent vont nous permettre de montrer que les groupes de monodromie des fonctions représentables par radicaux ont la propriété remarquable d'être résoluble.

Lemme 1. Soit $h(z) = f(z) + g(z)$, $h(z) = f(z) - g(z)$, $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ ou $h(z) = f(z)/g(z)$, alors si F et G représentent les groupes de monodromie de f et g , le groupe de monodromie de h est un sous-groupe de $F \times G$.

Preuve . On utilise les résultats trouvés pour la construction des surfaces de Riemann des fonctions représentables par radicaux. Si z_0 est un point de branchement et supposons qu'une rotation autour de z_0 correspond à des permutations g_1 et g_2 pour f et g , et donc à un changement de détermination $h_{i_1 j_1} \rightarrow h_{i_2 j_2}$. Les permutations $i_1 \rightarrow i_2$ et $j_1 \rightarrow j_2$ sont faites indépendamment, donc un tour autour de z_0 correspond à la donnée d'une paire $(g_1, g_2) \in F \times G$. Ces paires engendrent un sous-groupe de $F \times G$

Lemme 2. *Si le groupe de monodromie de f et g sont résolubles, alors le groupe de monodromie de $h(z) = f(z) + g(z)$, $h(z) = f(z) - g(z)$, $h(z) = f(z).g(z)$ et $h(z) = f(z)/g(z)$ sont résolubles.*

Preuve . On utilise que si F et G sont résolubles, alors $F \times G$ est résoluble et que les sous-groupes d'un groupe résoluble sont résolubles.

Encore une fois, le cas où $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ est légèrement plus délicat.

Lemme 3. *Soit H le groupe de permutation du schéma de Riemann associé à la fonction $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$, et F celui associé à f , construits avec les mêmes coupures. Alors il existe un homomorphisme surjectif $\phi : H \rightarrow F$.*

Preuve . On renvoie le lecteur à la construction de la surface de Riemann de la fonction $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$, on avait vu qu'on pouvait faire correspondre à chaque détermination de f un bouquet de déterminations pour h . On rappelle aussi que les permutations des déterminations de h peuvent s'effectuer au sein d'un bouquet ou entre plusieurs bouquets. Il reste donc à identifier les permutations des feuilles de f avec les permutations des bouquets de h . Ainsi, le sous-groupe des permutations des paquets de h est isomorphe aux permutations de f .

Lemme 4. *Le noyau d'un tel homomorphisme est commutatif.*

Preuve . On étudie donc ici les permutations qui envoient chaque bouquet sur lui-même. Numérotons les feuilles d'un bouquet par $f_{i,k}(z) = f_{i,0}(z) \exp(2ik\pi/n)$. Soient $g_1, g_2 \in \text{Ker}\phi$. Alors ces permutations permutent les feuilles de manière cyclique. Il reste à utiliser la propriété (P), et à dire que la somme modulo n est commutative.

Lemme 5. *Si F , le groupe de monodromie de f est résoluble, alors le groupe de monodromie de $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ est résoluble.*

Preuve . On utilisera sans démonstration que si $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme, alors $\Psi : G_1/\text{ker}(\phi) \rightarrow G_2$ est un isomorphisme⁶. On aura donc ici que $\Psi : H/\text{ker}(\phi) \rightarrow F$ est un isomorphisme.

Or F est résoluble. Puisque $\Psi^{-1}(K(F)) = K(H/\text{ker}(\phi))$ (par surjectivité du morphisme Ψ^{-1}), puis que $\Psi^{-1}(K_n(F)) = K_n(H/\text{ker}(\phi))$, on a que $H/\text{ker}(\phi)$ est résoluble. Or $\text{ker}(\phi)$ est résoluble (puisque commutatif), donc H est résoluble.

En effet, considérons l'homomorphisme canonique $\Phi : H \rightarrow H/\text{ker}(\phi)$. On aura que $\Phi(K_n(H)) = K_n(H/\text{ker}(\phi))$. Puisque $H/\text{ker}(\phi)$ est résoluble, il existe un rang r tel que $\Phi(K_r(H)) = K_r(H/\text{ker}(\phi)) = \{E\}$ (où $\{E\}$ représente la classe de d'équivalence du neutre) et donc $K_r(H)$ est contenu dans le sous-groupe commutatif $\text{ker}(\phi)$, ce qui permet de conclure.

Nous avons donc le résultat fondamental intermédiaire suivant :

Théorème 6. *Si la fonction $w(z)$ est représentable par radicaux, alors son groupe de monodromie est résoluble.*

6. c'est la propriété universelle des groupes quotients.

Preuve . Il suffit d'utiliser les lemmes précédents et le fait que les groupes de monodromie des fonctions $f(z) = z$ et $g(z) = a$ sont $\{1_G\}$, donc sont résolubles.

Remarque 10. On pourrait même montrer que les groupes de monodromie des opérateurs analytiques (utilisation de $f(z) = \sin z$, $f(z) = \exp z \dots$) sont aussi résolubles, même si ceux-ci ne sont pas forcément finis.

3 Le théorème d'Abel

Considérons maintenant l'équation

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0 \quad (3)$$

et étudions la fonction w qui à z associe l'ensemble des solutions de (3). Par le théorème de Gauss-D'Alembert, l'équation 3 possède exactement 5 racines. L'analyse de cette équation n'ayant pas un grand intérêt théorique, nous garderons en tête les résultats suivants, relativement simples à démontrer :

- pour $z = \pm 16$ ou $z = \pm 38$ l'équation (3) possède 4 racines distinctes et pour tous les autres complexes, l'équation possède 5 racines distinctes.
- La fonction w peut être définie par continuité le long de courbes continues. Si de plus, la courbe C évite les points de non unicité et les points de branchements, alors w est défini par continuité de manière unique.
- La fonction w étant une fonction algébrique, elle possède la propriété de monodromie. On peut donc tracer sa surface de Riemann.
- Les points $z = \pm 16$ et $z = \pm 38$ sont des points de branchement.

Les différents schémas de Riemann que l'on peut obtenir pour w sont représentés sur la figure 13 :

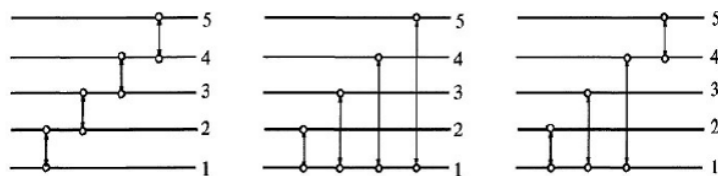


FIGURE 13 – Schéma de Riemann de la fonction algébrique w

Proposition II.2. *Le groupe de monodromie de w coïncide avec \mathcal{S}_5 .*

Preuve . Les groupes de permutations associés aux trois schémas de Riemann que nous avons représenté en 13 contiennent les transpositions élémentaires (12), (23), (34), et (45). Pour le premier des trois, ceux-ci sont explicitement représentés. Pour le second et le troisième, remarquons que (23) = (12)(13)(12) et que (34) = (13)(14)(23). Enfin, (45) est présent dans le troisième schéma et est obtenu dans le second par (45) = (14)(15)(14).

Ainsi le groupe de monodromie de la fonction w est-il généré par les transpositions élémentaires (12), (23), (34) et (45). Or ces transpositions génèrent toutes les permutations à cinq éléments. Donc le groupe de monodromie de w coïncide avec \mathcal{S}_5 .

Le lemme suivant permettra de démontrer immédiatement le théorème d'Abel⁷ :

Lemme algébrique. *Le groupe \mathcal{S}_5 n'est pas résoluble.*

7. On n'en fera pas la démonstration car cela nous éloignerait des points essentiels du mémoire mais nous renvoyons le lecteur à la preuve faite dans le livre d'Alekseev, et qui relève d'un réel intérêt géométrique.

On peut maintenant prouver le

Théorème d'Abel . *L'équation algébrique générique de degré supérieur ou égal à 5 n'est pas résoluble par radicaux.*

Preuve . Tout d'abord, par le lemme 3, la fonction w n'est pas représentable par radicaux. En effet, le cas échéant, son groupe de monodromie serait soluble. Puis, il advient que l'équation (1) pour $n = 5$ n'est pas résoluble par radicaux.

Enfin, en considérant l'équation

$$(3w^5 - 25w^3 + 60w - z)w^{n-5} = 0 \quad (4)$$

on a immédiatement que l'équation générique (1) pour $n \geq 5$ ne peut être représentable par radicaux.