UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

MÉMOIRE DE RECHERCHE

Transience-récurrence de la marche aléatoire

Auteur:
Kris-viime NIKIEMA

Superviseur:
François SIMENHAUS

Mémoire d'initiation à la recherche dans le cadre du cycle pluridisciplinaire.

June 29, 2016

Contents

Introduction:

Dans le cadre du cycle pluridisciplinaire j'ai eu à réaliser un stage d'initiation à la recherche de quatre mois en probabilité et plus précisément sur les marches aléatoires.Une marche aléatoire est décrite par un processus stochastique en matière de probabilité. La modélisation et la compréhension d'un tel processus s'inscrivent pleinement dans le cadre de la physique, de l'économie. Le but de ce stage était de comprendre le lien entre les réseaux et les chaînes de Markov afin de déduire des critères de récurrence et de transience. Dans tout ce stage nous nous sommes limités au cas discret et au cas fini.

1 Chaînes de Markov homogènes, transience

Définitions:

Soit $(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité, (X_n) un processus à valeur dans M un espace discret.
On dit que (X_n) est une chaîne de Markov homogène si:

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x, y \in M \text{ on a } P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P(X_{p+1} = y|X_p = x).$$

Une matrice de transition sur M est une application Q: $M \times M \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout x$\in$ M $\sum_{y \in M} Q(x, y) = 1$.

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à valeurs dans M, la matrice de transition Q associée à (X_n) est la matrice carrée Q donnée par $Q(x, y) = P(X_1 = y|X_0 = x)$.
L'adjectif homogène sera dorénavant sous–entendu.
Notation:
On note $P_\mu(X_n = x)$, la probabilité que la chaîne de Markov ayant la loi μ au temps 0 et la matrice de transition Q soit en x au temps n. Les matrices de transitions sont utiles car elles permettent de déterminer la loi de X_n pour tout n dans $\mathbb{N}$ en connaissant la loi initial du système.

Propriété:

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q et soit μ la loi de X_0. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n a pour loi μQ^n.
Preuve:
$P_\mu(X_n = x) = \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}} P_\mu(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x)$
$= \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}} P_\mu(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) P_\mu(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1})$
$= \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}} P_\mu(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) Q(x_{n-1}, x)$
$= \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}} P_\mu(X_0 = x_0) Q(x_0, x_1) \ldots Q(x_{n-1}, x)$ (par récurrence immédiate).
$= \sum_{x_0} P_\mu(X_0 = x_0) \sum_{x_1, \ldots, x_{n-1}} Q(x_0, x_1) \ldots Q(x_{n-1}, x)$
$= \sum_{x_0} \mu(x_0) Q^n(x_0, x)$(formule des probabilités totales)
$= (\mu Q^n)(x)$.

Définitions:

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène sur M de matrice de transition Q. Soit x et y deux états de M.On dit que x communique avec y s'il existe des entiers k et m tel que $Q^k(x,y) > 0$ et $Q^m(y,x)$ >0 .
On dit que la chaîne est *irréductible* lorsque tout les états communiquent.

Soit x dans M, on pose $N_x = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{X_n=x}$ le nombre de retour en x .

Théorème(admis):

Sous P_x on a l'alternative suivante:
Soit $N_x = \infty$ presque sûrement dans ce cas on dit que x est **récurrent**
Soit $N_x < +\infty$ presque sûrement dans ce cas on dit que x est **transient**.

On note le temps d'atteinte de x $T_x = inf\,\{n \geq 1 : X_n = x\}$.

Corollaire(admis):

$P_x(N_x > n) = P_x(T_x < +\infty)^n$.
Ce qui nous permet de déduire que si $P_x(T_x < +\infty) = 1$ alors x est récurrent.

Propriété:

Deux états qui communiquent sont de même nature(tous deux récurrents ou tous deux transients).

Preuve:

(Tirée du polycopié de processus discret de Joseph LEHEC):
Soit x et y dans M tel que x et y communiquent, alors il existe k, l tels que $Q^k(x,y) > 0$ et $Q^l(y,x) > 0$.
On pose $\alpha = Q^l(y,x)Q^k(x,y)$ on sait que α est strictement positif. Sans perte de généralité montrons que si x est transient alors y est transient.
Remarquons que pour tout entier n:
$Q^{k+n+l}(x,x) \geq Q^k(x,y)Q^n(y,y)Q^l(y,x) = \alpha Q^n(y,y)$
Donc:
$\sum_{n\geq 0} Q^n(y,y) \leq \alpha^{-1} \sum_{n\geq 0} Q^{k+n+l}(x,x) \leq \alpha^{-1} \sum_{n\geq 0} Q^{k+n+l}(x,x)$
De ce fait si x est transient alors le membre de droite est fini, et donc y est aussi transient.
Par conséquent si la chaîne est irréductible, les états sont tous transients ou tous récurrents. On dit donc que la chaîne est transiente ou récurrente.

Définition:

On dit que μ est une mesure réversible lorsque pour tout x et y dans M:

$$\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x).$$

Ce qui revient à dire que $(X_0, ..., X_n) = (X_n, ..., X_0)$ en loi pour tout n dans $\mathbb{N}$.
Nous avons vu précédemment quelques résultats sur les chaînes de Markov qui nous serons utiles par la suite.Nous allons maintenant faire un parallèle entre les réseaux électriques et les chaînes de Markov afin de déterminer des critères de récurrence et de transience.

2 Analogie réseau,chaîne de Markov et critère de récurrence

Nous allons maintenant travailler sur $\mathbb{Z}^d$.

2.1 Analogie réseau et chaîne de Markov

On se donne un réseau électrique ($\mathbb{X}$,c) où $\mathbb{X}$ est constitué de l'ensemble des point(nœuds) et c est une fonction symétrique positive sur $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ qui relie les différents nœuds tel que:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \mu(x) := \sum_{y \in \mathbb{X}} c(x, y) < +\infty$$

et tel que pour tout x différent de y dans $\mathbb{X}$,il existe x=$z_1, z_2, ..., z_n = y$ dans $\mathbb{X}$ avec

$$\forall k \in [[1, n-1]], c(z_k, z_{k+1}) > 0.$$

c est plus communément appelé la conductance qui est en fait est une représentation de la capacité des corps à laisser passer le courant. On dit que deux nœuds x et y sont connectés lorsque c(x,y)>0.

$$\text{E:=}\{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} : c(x, y) > 0\}$$

La *résistance* entre deux nœuds connectés x et y est l'inverse de la conductance entre les deux nœuds R(x,y)=$\frac{1}{c(x,y)}$.
Le déplacement d'un électron sur le réseau est un processus aléatoire que l'on peut modéliser par une chaîne de Markov réversible (car c est une fonction symétrique)où l'espace des états est $\mathbb{X}$ et la matrice de transition Q dont le terme générique est: Q(x,y)=$\frac{c(x,y)}{\mu(x)}$ $\forall$ x,y $\in \mathbb{X}$.
Pour tout réseau $(\mathbb{X}, c)$ on associe une unique marche aléatoire ϵ.
On considère A=$\{a\}$ et B des sous ensembles disjoints de $\mathbb{X}$. En appliquant une tension 1 en $\{a\}$ et en appliquant une tension nulle en B on crée un potentiel électrique g(x) en chaque point x du réseau, et un courant électrique le d'intensité i(x,y) le long de chaque arête orientée (x, y). On appelle *potentiel* toutes fonctions à valeurs réelles sur $\mathbb{X}$.

Loi d'Ohm:

Le courant i associé à g est

$$\text{i: (x,y)} \in E \mapsto i(x, y) = \frac{g(x)-g(y)}{r(x,y)}.$$

Loi de Kirchoff:

Pour tout x dans $\mathbb{X}$

$$\sum_{y \in \mathbb{X}, (x,y) \in E} i(x, y) = 0, \text{ en d'autres termes,}$$
$$\forall x \in U, -L_x g = 0, \text{ pour tout potentiel g,}$$
$$\text{Lg: x} \in \mathbb{X} \mapsto L_x g := \sum_{y \in \mathbb{X}} \frac{c(x,y)}{\mu(x)}(g(y) - g(x)).$$

Définitions:

Le *gradient* de g sur E est une fonction antisymétrique réel à valeur sur E :

$$\nabla g : e \in E \mapsto \nabla_e g := g(e_+) - g(e_-) \in \mathbb{R}.$$

La *divergence* de g sur E est une fonction à valeur réel définis:

$$\text{div}g\text{: x}\in E \mapsto div_x g := \sum_{e\in E,\, e_-=x} g(e) \in \mathbb{R}.$$

Nous allons maintenant définir les notions de bord.
On appelle *bord* de $\mathbb{X}$ l'ensemble:

$$\partial\mathbb{X} := \{e = (e_-, e_+) \in E : e_- \in \mathbb{X}, e_+ \notin \mathbb{X}\}.$$

On appelle *flux* (flow) toute fonction antisymétrique à valeur réelle sur E. Le courant i=-c∇f associé à tout potentiel f est un flux par la loi d'Ohm.

Fonction harmonique:

On dit que le potentiel électrique g est *harmonique* hors de $\{a\} \cup B$, lorsque :

$$\begin{cases} g(x) &= \sum_y Q(x,y)g(y) \text{ si x } \notin \{a\} \cup B \\ g(a) &= 1 \\ g(x) &= 0 \text{ si x} \in B \end{cases}$$

Problème de Dirichlet:

U:=$\mathbb{X}\backslash(\{a\} \cup B)$
Le problème de Dirichlet est le suivant: on dispose dans le réseau ($\mathbb{X}$,c) d'une fonction f :U$\rightarrow \mathbb{R}$ et on recherche V une fonction harmonique sur U tel que V(x)=f(x) pour tout x dans $\{a\} \cup B$.
Dans la suite nous admettrons l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.
En prenant f=1_a, g est l'unique solution associée au problème de Dirichlet avec condition au bord U. On appelle g le potentielle d'équilibre(qui satisfait la loi d'Ohm et de Kirchoff).
Dans la suite du mémoire nous allons poser V:=g.
On suppose toujours que :

$$\{a\} \cap B = \varnothing \text{ et } \forall x \in \mathbb{X}, P_x(t_{\{a\}\cup B} < +\infty) = 1$$

avec P la loi de la marche aléatoire ϵ associé au réseau.

Propriété:

$$\text{V: } x \in \mathbb{X} \mapsto P_x(t_a < t_B).$$

Preuve:

$P_a(t_a < t_B)$=1 et V(a) =1, $P_x(t_a < t_B)$=0 et V(x)=0 pour tout x dans B .
Donc V(x)=$P_x(t_a < t_B)$ pour tout x dans $\{a\} \cup B$.
Soit x dans U:
$\sum_y i(x,y)$=0 par la loi de Kirchoff.
$\sum_y i(x,y)$=$\sum_y [(V(x) - V(y)]c(x,y)$
=$V(x)\mu(x) - \mu(x)\sum_y V(y)Q(x,y)$
=$\mu(x)[V(x) - \sum_y V(y)Q(x,y)]$.
Et donc $V(x) = \sum_y V(y)Q(x,y)$ car $\mu(x)$ est >0.
La fonction V est bien harmonique,ce qui conclut la preuve.

$$V_{a,B} : x \in \mathbb{X} \mapsto P_x(t_a < t_B).$$

Par la loi d'Ohm:

$$i = -c\nabla V = -(V_a - V_B)c\nabla V_{a,B}$$

2.2 Quelques propriétés et critère de récurrence:

Propriété:

$$\boxed{div_a i = \mu(a)P_a(t_a^+ > t_B^+)}$$

Preuve:

$div_a i = -\mu(a)L_a V$
=$(V_a - V_B)\mu(a)(-L_a V_{a,B})$
=$\mu(a)\sum_{y\in\mathbb{X}} Q(a,y)[P_a(t_a < t_B) + P_y(t_B < t_a)]$
=$\mu(a)\sum_{y\in\mathbb{X}} Q(a,y)[1 - P_y(t_a < t_B)]$
=$\mu(a)\sum_{y\in\mathbb{X}} Q(a,y)P_y(t_a > t_B)$
=$\mu(a)P_a(t_a^+ > t_B^+)$
avec, pour tout S $\subset \mathbb{X}$,

$$t_S^+ := min\,\{n > 0 : \epsilon(n) \in S\}$$

De même

$$div_b i = \mu(b)P_a(t_B^+ > t_a^+)$$

On a donc :

$$C_{aB} := div_a i = \mu(a)P_a(t_a^+ > t_B^+)$$

2.3 Énergie dissipée dans un réseau électrique :

L'énergie dissipé par unité de temps dans un réseau électrique ($\mathbb{X}$,c) avec un potentiel V est:

$$E(V) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} c(x,y)[V(x) - V(y)]^2$$

Posons E(V):=C(a,B)

Propriété:

$$\boxed{C(a,B) = C_{aB}}$$

Preuve:

C(a,B)=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} c(x,y)[V(x) - V(y)]^2$
=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(x,y)[V(x) - V(y)]$
=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(x,y)V(x) - \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(x,y)V(y)$
=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(x,y)V(x) + \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(y,x)V(y)$(car i est une fonction antisymétrique)
=$\sum_{x,y \in E} i(x,y)V(x)$
=$\sum_{x \in E} V(x) \sum_{y \in E} i(x,y)$
Or $\sum_{y \in E} i(x,y)$ vaut 0 en dehors de $\{a\} \cup B$ et V(x) vaut 1 sur $\{a\}$ et 0 sur B.
Nous avons donc C(a,B)=$div_a i$.

2.4 Principe de Dirichlet:

$E(V) = min\{E(f);$ f potentiel tel que f(a)=1 et f(x)=0 $\forall x \in B\}$ le minimum est atteint pour f=V.

Preuve:

On écrit f sous la forme: f=V+h. On a h(a)=0 et h(x)=0 pour tout x dans B.
E(f)=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} c(x,y)[f(x) - f(y)]^2$
=$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} c(x,y)[V(x) - V(y) + h(x) - h(y)]^2$
=$\frac{1}{2}[\sum_{x,y \in E} c(x,y)[V(x)-V(y)]^2+\sum_{x,y \in E} c(x,y)[h(x)-h(y)]^2+\sum_{x,y \in E} c(x,y)[h(x)-h(y)](V(x)-V(y))]$
=E(V)+E(h)+$\sum_{x,y \in E} c(x,y)[h(x) - h(y)][(V(x) - V(y))]$
=E(V)+E(h)+$\sum_{x,y \in E} i(x,y)[h(x) - h(y)]$
=E(v)+E(h)+2$\times \frac{1}{2} \sum_{x,y \in E} i(x,y)[h(x) - h(y)]$
=E(v)+E(h)+2$\times \sum_{x,y \in E} i(x,y)h(x)$
=E(v)+E(h)+2$\times \sum_{x \in E} div_x i h(x)$.
Or h est nulle sur $A \cup B$ et i a une divergence nulle en dehors de $A \cup B$.

Finalement nous avons: E(f)=E(V)+E(h) et donc E(f)$\geq$E(V).

2.5 Règles sur les conductances:

1) $C_{a,B}$est une fonction croissante de $(c(x,y))_{x,y}$
2) $C_{a,B}$ est une fonction croissante du nombre d'arête du réseau.
3) Dans un réseau parallèle,la conductance dans le circuit est égal à la somme des conductances individuelles.
4) Dans un réseau en série,la résistance du circuit est la somme des résistances individuelles.

Preuve:

1) Le résultat découle du principe de Dirichlet en effet si:
$c_2(x,y) \geq c_1$(x,y)alors
min $\{E_2(f);$ f potentiel tel que f(a)=1 et f(x)=0 sur B$\} \geq$ min $\{E_1(f);$ f potentiel tel que f(a)=1 et f(x)=0 sur B$\}$
avec $E_i(f) = \sum_{x,y \in E} c_i(x,y)[f(x) - f(y)]^2$.
2) Est une conséquence immédiate de 1).
3) Appelons c_1 et c_2 les conductances sur le réseau:
E(V)= $c_2(V_b - V_a)^2 + c_1(V_a - V_b)^2$ avec V(a)=1 et V(b)=0.
Et donc

$$\boxed{C_{a,B} = c_2 + c_1}.$$

De ce fait le réseau peut être simplifier à un réseau équivalent où la conductance est $c_2 + c_1$.
4) a ———— c ———— b on appelle c_1 la conductance entre a et c et c_2 celle entre b et c.
E(V)=$c_2(V_b - V_c)^2 + c_1(V_a - V_c)^2$
On a V(c)=$\frac{c_1}{c_1+c_2}V_a + \frac{c_2}{c_1+c_2}V_B$ car V est solution du problème de Dirichlet comme nous l'avions montré précédemment.
E(V)=$c_1(1 - \frac{c_1}{c_1+c_2})^2 + c_2(\frac{c_2}{c_1+c_2})^2$
=$\frac{c_1 c_2^2 + c_2 c_1^2}{(c_1+c_2)^2}$
$\frac{1}{C_{a,B}} = \frac{(c_1+c_2)^2}{c_1 c_2^2 + c_2 c_1^2}$
= $\frac{1}{c_1 c_2} \times \frac{(c_1+c_2)^2}{(c_1+c_2)}$
=$\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1}$.
De ce fait le réseau peut être simplifier avec un réseau équivalent où la résistance est $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$. Donc

$$\boxed{R_{a,B} = R_1 + R_2}.$$

Nous admettons que si deux sommets x et y qui sont au même potentiel, on peut modifier la valeur de c(x,y) sans changer le potentiel ni le courant. On peut ainsi les relier par un fil de résistance nulle sans changer quoi que ce soit.

Dans cette partie nous avons établie plusieurs égalités qui peuvent être résumées dans l'encadré suivant:

$$\boxed{C_{a,B} = div_a i = E(V) = \mu(a) P_a(t_B^+ < t_a^+) = min\left\{E(f); \text{f potentiel tel que f(a)=1 et f(x)=0 } \forall x \in B\right\}}.$$

Nous avons établis toutes ces égalités pour pouvoir déterminer des critères de récurrence de marche aléatoire. En effet comme nous l'avons vu dans la première partie connaître la quantité $P_x(t_x^+ < +\infty)$ est utile pour déterminer la nature d'un état de la marche. Maintenant que nous avons établie toutes ces égalités nous voyons donc que connaître la conductance,ou la résistance sur le réseau est très utile pour conclure. Nous allons maintenant appliquer nos critères sur les marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$.

3 Application à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$:

Soit (X_n) une marche aléatoire défini sur $\mathbb{Z}$, on suppose que toutes les conductances sont strictement positives et donc que la chaîne de Markov homogène associée est irréductible.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose $K_n = [-n,n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Déterminer la nature de la marche revient à déterminer la nature du point d'origine 0.

$\left\{t_0^+ = +\infty\right\}$=$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{t_{K_n^c}^+ < t_0^+\right\}$ presque sûrement.

On note pour tout n dans $\mathbb{N}$, $B_n = \left\{t_{K_n^c}^+ < t_0^+\right\}$
Comme la suite (K_n) est croissante la suite (B_n) est décroissante de ce fait en appliquant les propriétés de convergence monotone: $P_0(t_0^+ = +\infty) = \underset{n\to\infty}{lim} P_0(t_{K_n^c}^+ < t_0^+)$. Nous avons donc au final:

$$\boxed{P_0(t_0^+ = +\infty) = \frac{1}{\mu(0)} \underset{n\to\infty}{lim}(C_{0,K_n^c})}$$

Donc au final:

$$\begin{gathered}(X_n)\text{est récurrente} \iff 0 \text{ est récurent}\\ \iff P_0(t_0^+ < +\infty)\text{=1}\\ \iff P_0(t_0^+ = +\infty)\text{=0}\\ \iff \underset{n\to\infty}{lim} C_{0,K_n^c} = 0\\ \iff \underset{n\to\infty}{lim} R_{0,K_n^c} = +\infty.\end{gathered}$$

3.1 La récurrence sur $\mathbb{Z}$:

Nous avons fait l'application en considérant que si x communique avec y alors c(x,y)=1.
Comme vous pourriez le constater dans le document 1 en annexe le réseau dans $\mathbb{Z}$ est constituer d'une ligne infini de résistance de 1 Ohm. La résistance sur le réseau est donc infini d'après la propriété sur les résistances en série de la partie 2.De ce fait la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.

3.2 La récurrence sur $\mathbb{Z}^2$:

Tout comme sur $\mathbb{Z}$: on peut simplifier le réseau en un réseau avec des résistances en séries(voir document 2 en annexe).
Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ K_n compte 4(2k-1) arrêtes.

Preuve:

Par récurrence sur n
P_n:"K_n compte 4(2n-1) arrêtes"

n=1:
K_1 a 4 arrêtes donc P_1 est vérifié.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et supposons que P_n soit vrai et montrons que P_{n+1} est vrai:
$K_n \subset K_{n+1}$ et K_{n+1} compte le nombre d'arêtes de K_n plus 8. Par hypothèse de récurrence, K_{n+1} compte 4(2n-1)+8=4(2(n+1)-1) c'est P_{n+1}.
Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ P_n est vrai.

Comme nous travaillons avec les résistances en série ,en appliquant les propriétés que nous avons montré dans la partie 2 pour trouver la résistance sur le circuit, on somme toutes les résistances.
On a au final $R_{0,K_n^c} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\times(2k-1)} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.
Donc la marche est récurrente sur $\mathbb{Z}^2$.

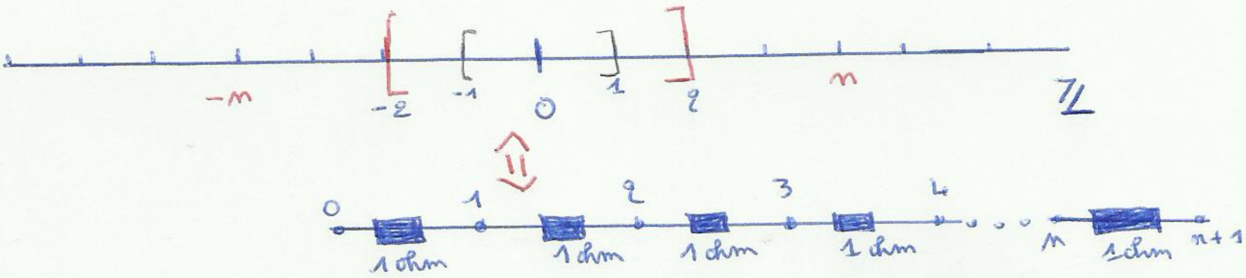
Nous avons vu ainsi qu'il y a de très forte similarité entre les chaînes de Markov et les réseaux électriques ce qui nous a permis de démontrer le résultat de Polya en dimension 1 et 2 d'une autre manière.

Annexe et Références

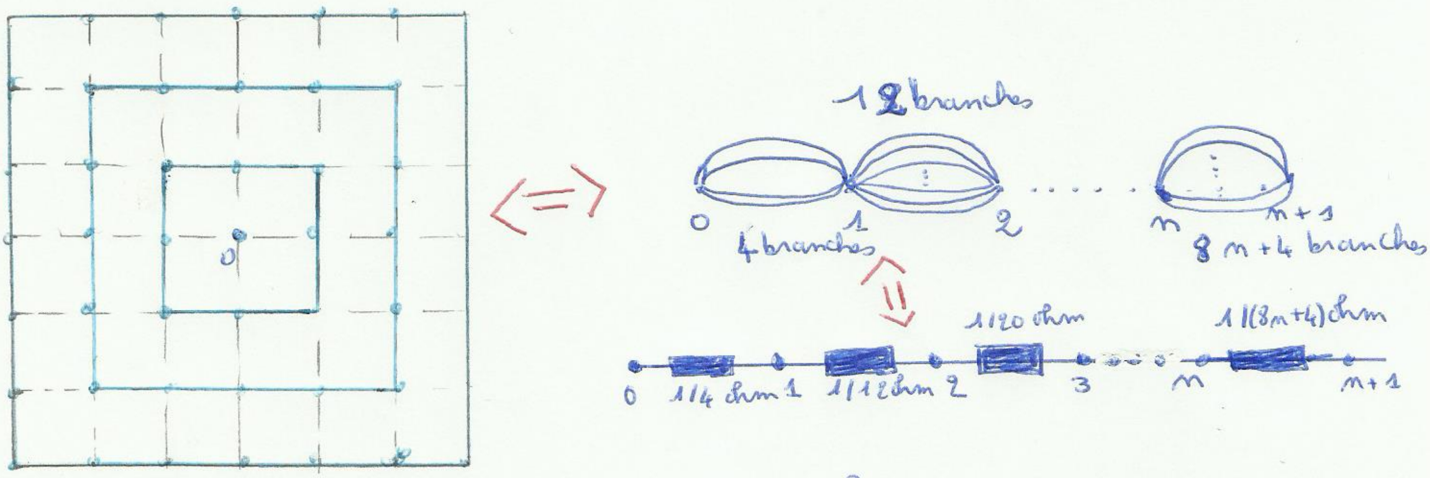
Références:

[1] A.Gaudillière *Condenser physics applied to Markov chains*, 2008.
[2] http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/comets/ens/reversibilite.pdf
[3] http://prof.pantaloni.free.fr/IMG/pdf/Marche-aleatoire-et-reseaux-electriques.pdf
[4] https://www.ceremade.dauphine.fr/ lehec/processus2015.html.

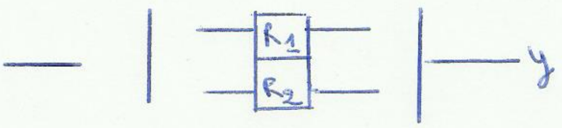
Annexe :



Document 1 : cas $\mathbb{Z}$



Document 2 : cas $\mathbb{Z}^2$



Exemple de résistances en parallèles