Victor RAMBAUD

Une preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de Monsieur **Guillaume Vigeral**

Cycle **P**luridisciplinaire d'**E**tudes **S**upérieures
Troisième année (L3)

29 juin 2017

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Historique 1
1.2 La fonction ζ de Riemann 2
1.3 Le théorème des nombres premiers 3

2 Démonstration de l'irrationalité d'un nombre par méthodes arithmétiques classiques **3**
2.1 Irrationalité de $\sqrt{2}$ 3
2.2 Généralisation du résultat 3

3 Irrationalité de π. **4**

4 Irrationalité de e **6**

5 Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. **7**
5.1 Introduction 7
5.2 Quelques lemmes importants. 8
5.3 Irrationalité de $\zeta(2)$. 11
5.4 Irrationalité de $\zeta(3)$ 14

1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons revenir sur différentes approches permettant de démontrer l'irrationalité d'un nombre.

1.1 Historique

Pendant longtemps, les grecs - et plus particulièrement les pythagoriciens - pensaient que tous les nombres étaient rationnels. Cette vision des mathématiques perdura jusqu'à ce que l'un d'eux démontre par l'absurde que $\sqrt{2}$ ne pouvait être écrit comme le rapport entre deux nombres entiers premiers entre eux. Cette découverte fut un véritable choc à leurs yeux, en poussant même certains aux suicide selon la légende. Cette découverte a constitué un véritable bond en avant dans l'histoire des mathématiques, puisque d'une part elle est à l'origine de la notion de nombre irrationnel et que d'autre part la preuve associée est une des premières démonstrations par l'absurde de l'histoire. Découverte fondamentale puisque Georg Cantor montrera deux siècles plus tard que presque tout nombre - au sens de la mesure de Lebesgue - est irrationnel.

Bien que le concept d'irrationalité soit simple à comprendre, démontrer qu'un nombre est bien irrationnel l'est cependant beaucoup moins. Beaucoup des grandes constantes des mathématiques, telles que π ou e sont irrationnelles et ont été conjecturées comme telles bien avant la démonstration associée. Nous traiterons ici de ces démonstration.

1.2 La fonction ζ de Riemann

On a tous entendu parler de la fameuse fonction ζ, rendue célèbre par l'hypothèse de Riemann. On rappelle la définition de cette fonction.

$$\forall\, s > 1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette fonction est à priori définie uniquement pour des complexes dont la partie réelle est strictement supérieure à 1. Il a été démontré que la fonction *zeta* de Riemann admet un prolongement analytique sur tout le plan complexe, avec un unique pôle en 1, d'où l'ensemble de définition parfois donné de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. On sait depuis Euler que cette fonction prend des valeurs particulières pour tout entier pair. En effet, pour tout entier k strictement positif, $\zeta(2k) \in \mathbb{Q}\pi^{2k}$ ce qui permet de voir qu'elle y prend des valeurs irrationnelles et même transcendantes en ces points. A l'exception du cas $n = 3$, la situation pour des entiers impairs est totalement obscure.

Le but final de ce projet est donc de démontrer l'irrationalité de $\zeta(3)$ en détaillant la preuve fournie par Fritz Beukers, elle même inspirée de celle donnée à la surprise générale par Roger Apéry en 1978. Apéry n'était pas un mathématicien de premier plan sur la scène internationale et personne ne s'attendait à ce qu'une telle montagne soit gravit par lui. Dans cet article, F. Beukers démontre non seulement l'irrationalité de $\zeta(3)$ mais aussi celle de $\zeta(2)$, ce qui peut sembler étrange puisque la théorie de Fourier permet de montrer que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, dont l'irrationalité était connue depuis longtemps. Ce qui nous intéresse ici n'est pas tant l'irrationalité de $\zeta(2)$, mais bien la démonstration qui en est faite.

Lors de la démonstration de l'irrationalité de e, nous introduiront un lemme disant que seul un nombre irrationnel peut être approché "très vite" par une suite de rationnels. Ce lemme sera utilisé dans la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, nous verrons qu'une approche très directe de ce lemme fonctionne pour l'irrationalité de e, mais qu'il est nécessaire de travailler plus astucieusement pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, ce qui explique qu'une démonstration ait mis si longtemps à voir le jour. (D'une façon plus générale, le fait qu'aucune démonstration n'ait été trouvée à ce jour pour $\zeta(5)$, $\zeta(7)$... montre la difficulté que peut représenter la démonstration de l'irrationalité d'une grandeur donnée). Afin d'arriver à nos fins, nous introduirons des intégrales impropres liées à $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ tendant "très vite" vers zéro, qui nous permettrons d'utiliser le fameux lemme utilisé dans la démonstration de l'irrationalité de e.

1.3 Le théorème des nombres premiers

Théorème 1.3.1. *Soit n un entier. On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Lorsque n tend vers $+\infty$ on a :*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Ce théorème extrêmement puissant, appelé théorème des nombres premiers, a été démontré simultanément en 1896 par Hadamard et de La Vallée-Poussin. Il ne sera pas démontré dans ce mémoire mais sera utilisé lors de l'une de nos démonstration.

2 Démonstration de l'irrationalité d'un nombre par méthodes arithmétiques classiques

Les deux démonstrations qui vont suivre sont assez élémentaires et sont faites par l'absurde.

2.1 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Théorème 2.1.1. *$\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Démonstration. On résonne par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, donc qu'il existe p, q deux entiers naturels premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \\ &\Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \\ &\Longrightarrow \quad p = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \quad 2q^2 = 4k^2 \\ &\Longrightarrow \quad q = 2k',\ k' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On en déduit que p et q sont pairs, ils ne sont donc pas premiers entre eux, ce qui est absurde. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

$\square$

2.2 Généralisation du résultat

Une version plus générale de ce théorème est de montrer que la racine carrée d'un entier est rationnelle si et seulement si celui-ci est le carré d'un autre nombre entier.

Théorème 2.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\ m \in \mathbb{N},\ n = m^2.$$

Démonstration. L'implication réciproque est triviale.

On résonne par l'absurde pour l'implication directe.

Soit n un entier qui ne soit pas le carré d'un autre et supposons que sa racine soit rationnelle. Il existe donc deux entiers naturels premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$.

p et q étant premiers entre eux, leur décomposition en facteurs premiers ne comporte aucun nombre commun et par hypothèse q est différent de 1. On utilise l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. On pose :

$$p = \prod_{p_i\ premiers} p_i^{\alpha_i}\ ,\ q = \prod_{q_j\ premiers} q_j^{\beta_j} \mid \alpha_i,\ \beta_j\ \in \mathbb{N},\ p_i \neq q_j\ \forall\ i,\ j$$

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} = \frac{\displaystyle\prod_{p_i\ premiers} p_i^{\alpha_i}}{\displaystyle\prod_{q_j\ premiers} q_j^{\beta_j}} \Rightarrow n = \frac{\displaystyle\prod_{p_i\ premiers} p_i^{2\alpha_i}}{\displaystyle\prod_{q_j\ premiers} q_j^{2\beta_j}}\ \notin\ \mathbb{N}.$$

On a donc $n \notin \mathbb{N}$ ce qui est absurde. Donc $\sqrt{n}$ est irrationnel. Ceci conclu la preuve. □

3 Irrationalité de π.

On va dans cette partie montrer l'irrationalité de π et plus particulièrement celle de π^2, celle de π suivant alors directement.

Lemme 3.0.1. *Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme à coefficients entiers et n un entier. On considère*

$$h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x^n g(x)}{n!}.$$

Alors pour tout entier k, $h^{(k)}(0)$ est un entier.

Démonstration. Soient k un entier et x un réel quelconques.

$$h(x) = \frac{x^n g(x)}{n!} \Rightarrow h^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n!} x^{n-i} g^{k-i}(x)$$

Si $i < n$, on a bien $0^{n-i} = 0$.

Dès que $i \geq n$,

$$\binom{k}{i} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n!} x^{n-i} g^{(k-i)}(x) = \binom{k}{i} g^{(k-i)}(x)$$

Or g est un polynôme à coefficients entiers donc pour tout k, pour tout i, $g^{(k-i)}(0)\ \in\ \mathbb{N}$. On en conclut que $h^{(k)}(0)$ est bien un entier pour tout entier k. □

Théorème 3.0.1. *π est irrationnel.*

Démonstration. On va ici démontrer que π^2 est irrationnel, il en suivra automatiquement que π est irrationnel.

On résonne par l'absurde. On suppose qu'il existe a, b deux entiers premiers entre eux tels que $\pi^2 = \frac{a}{b}$.

On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

$$I_n = \pi a^n \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ f_n^{(2k)}(x) = f_n^{(2k)}(1-x).$$

Soit k un entier :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n^{(2k)}(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \left[-f_n^{(2k)}(x)\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 f_n^{(2k+1)}(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f_n^{(2k)}(1) + f_n^{(2k)}(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\left[f_n^{(2k+1)}(x)\sin(\pi x)\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f_n^{(2k+2)}(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2f_n^{(2k)}(0)}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f_n^{(2k+2)}(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par récurrence évidente on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\pi^{2k}}f_n^{(2k)}(0) + \frac{(-1)^n}{\pi^{2n}}\int_0^1 f_n^{(2n)}(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\pi^{2k}}f_n^{(2k)}(0) + \frac{2(-1)^n}{\pi^{2n+1}}f_n^{(2n)}(0) \\
\Rightarrow I_n &= 2\sum_{k=0}^{n}(-b)^k a^{n-k} f_n^{(2k)}(0).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.0.1, pour tout entier k, $f_n^{(2k)}(0)$ est un entier, donc $I_n \in \mathbb{N}$.

Or on remarque que pour tout n :

$$0 < I_n < \frac{\pi a^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 < I_n < \frac{1}{2}$ ce qui est absurde car I_n est un entier.

On en conclut que π^2 est irrationnel, donc que π est irrationnel.

□

4 Irrationalité de e

Afin de démontrer l'irrationalité de e, nous allons introduire un lemme caractérisant l'irrationalité d'un nombre. Ce lemme dit que seul un nombre irrationnel peut être approché "très vite" par une suite de rationnels.

C'est ce lemme que nous utiliserons plus tard dans la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

Lemme 4.0.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. S'il existe $(p_n), (q_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \qquad \textit{et} \qquad |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = o(\frac{1}{q_n}) \qquad \textit{avec} \quad \alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$$

alors $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ deux rationnels.

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow |\frac{pq' - p'q}{qq'}| \geq \frac{1}{qq'} \quad \text{car} \quad |pq' - p'q| \in \mathbb{N}^*.$$

On résonne désormais par l'absurde.
On suppose que α est rationnel, c'est à dire qu'il existe deux entiers non nuls tels que $\frac{p}{q} = \alpha$ et qu'il existe $(p_n), (q_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{p_n}{q_n} \neq \alpha, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \qquad \text{et} \qquad |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = o(\frac{1}{q_n})$$

Or $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = |\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{qq_n}$.
On a donc pas $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = o(\frac{1}{q_n})$ ce qui est absurde. Donc α est irrationnel. □

Théorème 4.0.1. *e est irrationnel.*

Démonstration. L'idée ici est d'encadrer e par deux suites de rationnels qui convergent suffisamment vite vers e.

On sait que :

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} < e$.

Majorons maintenant e.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\cdots\right)\\ &< \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{(N+1)^2}+\cdots\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{(N+1)!}\frac{N+1}{N}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{N.N!}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} < e < \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{N.N!}.$$

Or $\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} = \frac{p_N}{N!}$, pour un certain entier naturel p_N d'où :

$$0 < e - \frac{p_N}{N!} < \frac{1}{N.N!}$$

En posant $q_N = N! \to +\infty$ on a bien $|e - \frac{p_N}{q_N}| = o(\frac{1}{q_N})$ et $e \neq \frac{p_n}{q_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Donc d'après le lemme 4.0.1, e est irrationnel. □

5 Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

5.1 Introduction

On pourrait penser ici que $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ étant comme e des sommes infinies, une approche directe pourrait nous permettre de démontrer leur irrationalité en utilisant le lemme 4.0.1 de la même manière que pour e. Cependant, rappelons que $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, les termes successifs de la somme sont facteurs les uns les autres, nous permettant de majorer facilement le reste comme on l'a vu plus tôt, ce qui n'est pas le cas pour $\zeta(3)$.

En effet, essayons la même technique avec le reste de la somme :

$$\zeta(3) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Or en remarquant que

$$\int_{n}^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

on obtient

$$\frac{1}{N+1} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{N}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{N}$$

Donc

$$\zeta(3) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{N^2}$$

En mettant $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3}$ au même dénominateur, on obtient $\frac{p_N}{d_N^3}$ où d_N est le plus petit commun multiple de $1, ..., N$.

On a alors $\zeta(3) - \frac{p_N}{d_N^3} < \frac{1}{N^2}$ mais $\frac{1}{N^2}$ n'est évidemment pas négligeable devant d_N^{-3} ce qui ne permet pas de conclure dans ce cas.

Ceci montre pourquoi il est nécessaire de faire appel aux outils plus sophistiqués introduits par Beukers.

5.2 Quelques lemmes importants.

Soit n un entier strictement positif. On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Soit $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, ..., n)$.

Lemme 5.2.1.

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ d_n < 3^n$$

Démonstration. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, il vient automatiquement que $d_n = \mathrm{ppcm}(1, ..., n) = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{k_p}$. où k_p est le plus grand entier tel que $p^{k_p} \leq n$. Or :

$$p^a = n \Rightarrow e^{a \ln(p)} = e^{\ln(n)} \Rightarrow a = \frac{\ln(n)}{\ln(p)}.$$

k_p étant un entier on en déduit que $k_p = \lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \rfloor$. En remarquant que $p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = n$ on obtient ce qu'on voulait :

$$d_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \rfloor} < \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = n^{\pi(n)}.$$

En utilisant le théorème des nombres premiers énoncé dans l'introduction de ce mémoire on en déduit que pour n assez grand, $d_n < n^{\pi(n)} \sim e^n$.

Donc pour n assez grand, $d_n < a^n$ pour tout $a > e$. En particulier pour $a = 3$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 5.2.2. *Soient r et s deux entiers strictement positifs. Si $r > s$, alors :*

$$J_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

est bien définie et sa valeur est un rationnel dont le dénominateur divise d_r^2.

$$K_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} x^r y^s \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{2}$$

est bien définie et sa valeur est un rationnel dont le dénominateur divise d_r^3.

Si $r = s$ *alors,*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots \frac{1}{r^2} \tag{3}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} x^r y^r \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \cdots \frac{1}{r^3}\right). \tag{4}$$

Démonstration. Soient r et s deux entiers strictement positifs, $r \geq s$.

$$0 < \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 -\ln(1-x) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Donc $J_{r,s}$ est bien définie. Comme $\ln(xy)$ est écrasé par xy en $(0,0)$, on voit que (2) est également définie. De même, (3) et (4) sont bien définies. On rappelle que :

$$\forall x \in \,]-1;1[, \ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

. Soit $\sigma \geq 0$, $r \geq s$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^1 x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Par Fubini on peut donc intervertir somme et intégrale et on obtient alors :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{r+k+\sigma} y^{s+k+\sigma} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$(*) \quad J_{r,s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+k+1+\sigma)(s+k+1+\sigma)}$$

Si $r > s$ on remarque que

$$\frac{1}{(r+k+1+\sigma)(s+k+1+\sigma)} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+k+1+\sigma)} - \frac{1}{(r+k+1+\sigma)}\right)$$

L'égalité $(*)$ devient :

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+k+1+\sigma} - \frac{1}{r+k+1+\sigma}\right).$$

Somme qui devient téléscopique dès que $k+s>r$. Il reste donc :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1+\sigma}+\cdots+\frac{1}{r+\sigma}\right).$$

$\sigma = 0$ donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1}+\cdots+\frac{1}{r}\right)\\ &= \frac{1}{r-s}\,\frac{p_{r,s}}{\mathrm{ppcm}(s+1,...,r)} \text{ où } p_{r,s} \text{ est un entier non nul.}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{ppcm}(s+1,...,r)|d_r$ et $(r-s)|d_r$ donc $\mathrm{ppcm}(s+1,...r)(r-s)|d_r^2$.
Ceci conclut le point (1) du lemme.
Soit $\sigma \geq 0$. En dérivant par rapport à σ on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_\sigma\left(\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\right) &= \frac{x^r y^s}{1-xy}\partial_\sigma(x^\sigma y^\sigma)\\ &= \frac{x^r y^s}{1-xy}\partial_\sigma(e^{\sigma\ln xy})\\ &= \ln(xy)\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}.\end{aligned}$$

Comme (2) est bien définie on peut dériver sous le signe intégral d'où pour $r>s$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(xy)}{1-xy}x^r y^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \partial_\sigma\left[\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1+\sigma}+\cdots+\frac{1}{r+\sigma}\right)\right]\\ &= \frac{-1}{r-s}\left[\frac{1}{(s+1+\sigma)^2}+\cdots+\frac{1}{(r+\sigma)^2}\right]\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}x^r y^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{r-s}\left[\frac{1}{(s+1)^2}+\cdots+\frac{1}{r^2}\right].$$

Le dénominateur est bien un diviseur de d_r^3 ce qui conclut la preuve du point (2).

L'équation $(*)$ donne directement pour $r=s$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{r+\sigma}}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+r+1+\sigma)^2}$$

$\sigma = 0$ donne donc :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
$$= \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2}$$

Ceci permet de conclure pour le point (3).
Soit $\sigma \geq 0$. En dérivant par rapport à σ on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_\sigma \left(\frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \right) = \partial_\sigma \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1+\sigma)^2} \right)$$
$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \frac{\ln(xy)}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{r+\sigma} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1+\sigma)^3}$$

Par passage à la limite on obtient bien (4).

Traitons rapidement le cas $r = s = 0$.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x \int_0^1 y^k \,\mathrm{d}y$$
$$= \zeta(2).$$

Soit $\sigma \geq 0$

$$\partial_\sigma \left(\frac{x^\sigma y^\sigma}{1-xy} \right) = \frac{1}{1-xy} \partial_\sigma (x^\sigma y^\sigma)$$
$$= \frac{1}{1-xy} \partial_\sigma (e^{\sigma \ln xy})$$
$$= x^\sigma y^\sigma \frac{\ln(xy)}{1-xy}.$$

En dérivant sous le signe intégral et en passant à la limite en zéro, on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\ln(xy)}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -2\zeta(3).$$

□

5.3 Irrationalité de $\zeta(2)$.

Nous avons rappelé dans l'introduction que ce résultat est automatique une fois l'irrationalité de π^2 établie puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Cependant, c'est principalement la démonstration de ce résultat qui nous importe ici, puisque tout l'intérêt de ce projet est de mieux comprendre les outils permettant d'étudier l'irrationalité d'un nombre. On verra par la suite que la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ est analogue à celle-ci.

Théorème 5.3.1. *$\zeta(2)$ est irrationnel.*

Démonstration.

$$\text{On introduit } P_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\right)$$

Le lemme 3.0.1 nous donne automatiquement $P_n \in \mathbb{Z}^n[X]$. On introduit l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{5}$$

On peut écrire $\begin{cases} P_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r x^r, \ a_r \in \mathbb{Z} \\ (1-y)^n = \sum_{k=0}^n b_s y^s, \ b_s \in \mathbb{Z} \end{cases}$

L'intégrale (5) devient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \sum_{r,s=0}^n a_r b_s J_{r,s} \\ &= \sum_{\substack{r,s=0 \\ r \neq s}}^n a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^n a_r b_r J_{r,r} \end{aligned}$$

Par symétrie entre x et y dans l'intégrale $J_{r,s}$, on peut se ramener dans les intégrales au cas du lemme 5.2.2 avec $r \geq s$. Grâce à ce lemme on obtient :

$$\begin{cases} J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}, \quad q_{r,s} | d_r^2 \\ J_{r,r} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

L'intégrale (5) devient donc :

$$I_n = \sum_{\substack{r,s=0 \\ r \neq s}}^n a_r b_s \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}} + \sum_{r=0}^n a_r b_r (\zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2})$$

En mettant au même dénominateur on obtient :

$$I_n = \big(A_n + \zeta(2) B_n\big) d_n^{-2} \quad A_n,\, B_n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

On va maintenant intégrer n fois par partie l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy}\,\mathrm{d}x = &\int_0^1 \frac{\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\right)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\underbrace{\left[\frac{\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\right)}{1-xy}\right]_0^1}_{=0} - y\int_0^1 \frac{\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\right)}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\\
=&2y^2\int_0^1 \frac{\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left(\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\right)}{(1-xy)^3}\,\mathrm{d}x\\
&\vdots\\
=&(-y)^k k!\int_0^1 \frac{\frac{x^n(1-x)^n}{n!}}{(1-xy)^{k+1}}\,\mathrm{d}x\\
&\vdots\\
=&(-y)^n\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$I_n = (-1)^n \int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Recherchons le maximum de $\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$ sur $]0,1[\times]0,1[$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x(1-x)}{1-xy}\right] = \frac{x^2y-2x+1}{(1-xy)^2}$$

Ce qui s'annule pour $x = \frac{1-\sqrt{1-y}}{y}$ sur $]0,1[$. Le même calcul pour y montre l'unicité du maximum sur $]0,1[\times]0,1[$, d'où $x=y$ en ce point. Ceci donne $y = \frac{1-\sqrt{1-y}}{y}$ soit $x=y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le maximum de la fonction vaut donc $\frac{5\sqrt{5}-11}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$. D'où :

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 \quad \forall\, 0\le x,y\le 1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| <&\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\zeta(2)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}
\end{aligned}$$

Comme I_n est non nulle on a d'aprè l'équation (6)

$$0 < \left|A_n + \zeta(2)B_n\right|d_n^{-2} < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\zeta(2)$$

On en déduit alors que pour n assez grand et d'après le lemme 5.2.1 :

$$0 < \left|A_n + \zeta(2)B_n\right| < d_n^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\zeta(2) < 9^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\zeta(2) < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \left|\frac{A_n}{B_n} + \zeta(2)\right| < \frac{1}{B_n}\left(\frac{5}{6}\right)^n = o\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

D'après le lemme 4.0.1, $\zeta(2)$ est irrationnel. □

5.4 Irrationalité de $\zeta(3)$

Théorème 5.4.1. *$\zeta(3)$ est irrationnel.*

La preuve de ce théorème est analogue à celle que l'on vient de terminer mais est plus complexe. On introduit ici deux polynômes P_n et les intégrales doubles deviennent des intégrales triples, ce qui nous donne une idée de pourquoi cette méthode montre ses limites pour $\zeta(5)$ ou plus.

Démonstration. On introduit l'intégrale suivante :

$$L_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7}$$

où P_n représente le polynôme introduit lors de la dernière démonstration. P_n étant un polynôme à coefficients entiers, un raisonnement analogue au théorème d'avant nous donne

$$L_n = \big(C_n + D_n\zeta(3)\big)d_n^{-3} \quad C_n,\, D_n \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

En remarquant que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z} = \left[\frac{-\ln\big(1-(1-xy)z\big)}{1-xy}\right]_0^1 = \frac{-\ln(xy)}{1-xy}$$

on peut réécrire

$$L_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Comme dans la démonstration précédente, nous allons intégrer n fois par partie par rapport à x.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\frac{x^n(1-x)^n}{n!})}{1-(1-xy)z} \\
&= \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(\frac{x^n(1-x)^n}{n!})}{1-(1-xy)z}\right]_0^1}_{=0} + yz\int_0^1 \frac{\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(\frac{x^n(1-x)^n}{n!})}{(1-(1-xy)z)^2}\,\mathrm{d}x \\
&\vdots \\
&= k!(yz)^k\int_0^1 \frac{\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}(\frac{x^n(1-x)^n}{n!})}{(1-(1-xy)z)^{k+1}}\,\mathrm{d}x \\
&\vdots \\
&= \int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$L_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^nP_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

On procède au changement de variable suivant

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$$

qui donne

$$z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$$

et

$$\mathrm{d}z = \frac{-xy}{\big(1-(1-xy)w\big)^2}\,\mathrm{d}w$$

Ceci nous donne donc

$$L_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1-x)^n(1-w)^n\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w.$$

Afin de se débarrasser de $P_n(y)$ il est naturel d'intégrer n fois par partie par rapport à y cette fois. On sait que

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(xyw)^n(1-x)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

donc par symétrie entre x et y on a directement

$$\int_0^1 \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{(xyw)^n(1-y)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\,\mathrm{d}y$$

d'où

$$L_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{\big(1-(1-xy)w\big)^{n+1}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w \tag{9}$$

On cherche à majorer $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$ sur $]0,1[\times]0,1[\times]0,1[$. Comme la fonction s'annule aux bords de l'intervalle et est positive partout, si elle admet un unique point critique, celui-ci ne peut-être qu'un maximum. Il faut donc annuler le gradient de la fonction

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{w(1-w)}{1-(1-xy)w}\right] = \frac{w^2(1-xy)-2w+1}{(1-(1-xy)w)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{w(1-w)}{1-(1-xy)w}\right] = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{1+\sqrt{xy}} \text{ ou } w = \frac{1}{1-\sqrt{xy}}$$

Mais x, y et w sont dans $]0,1[$ donc $w = \frac{1}{1+\sqrt{xy}}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x(1-x)}{1-(1-xy)w}\right] = \frac{-x^2yw+2x(1-w)+(1-w)}{(1-(1-xy)w)^2}$$

Par symétrie entre x et y, la fonction atteint son maximum pour $x = y$. On doit alors résoudre cette équation en remplaçant w par sa valeur :

$$\frac{-x^3}{1+x} + \frac{2x}{1+x} - 2x - \frac{1}{1+x} + 1 = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$x^2+2x-1=0$$

D'où $x = \sqrt{2}-1$ ou $x = -1-\sqrt{2}$. Mais x est dans $]0,1[$ donc $x = \sqrt{2}-1$.

On obtient donc $x = y = \sqrt{2}-1$ et $w = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne un maximum de $(\sqrt{2}-1)^4$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
L_n <& (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}w}{1-(1-xy)w} \\
=& (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=& 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3)
\end{aligned}$$

Comme L_n est non nulle on obtient d'après l'équation (8)

$$0 < \left|C_n + D_n\zeta(3)\right| d_n^{-3} < 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3)$$

Donc pour n assez grand on a d'après le lemme 5.2.1 :

$$0 < \left|C_n + D_n\zeta(3)\right| < 2(\sqrt{2}-1)^{4n}27^n\zeta(3) < \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Ce qui s'écrit encore

$$0 < \left|\frac{C_n}{D_n} + \zeta(3)\right| < \frac{1}{D_n}\left(\frac{4}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{D_n}\right)$$

D'après le lemme 4.0.1, $\zeta(3)$ est irrationnel.

$\square$