

# Isométries et géodésiques dans les variétés de dimension 2

Ernest Specka

Mémoire d'initiation à la recherche  
Sous la direction d'Amic Frouvelle

28 juin 2017



## Remerciements

Un grand merci à Amic Frouvelle pour le temps qu'il m'a consacré et la manière dont il m'a introduit à un domaine superbe des Mathématiques.

# Table des matières

<b>1 Une variété différentielle : le tore plat</b>	<b>4</b>
1.1 Intuitions et premières définitions . . . . .	4
1.2 Le tore plat . . . . .	6
1.2.1 Définition . . . . .	6
1.2.2 Atlas en 4 ouverts . . . . .	6
1.2.3 Atlas en 2 ouverts (couronnes) . . . . .	8
<b>2 Distances et isométries</b>	<b>9</b>
2.1 Métriques . . . . .	9
2.2 Isométries . . . . .	11
2.3 Exemples principaux de variétés riemanniennes . . . . .	14
2.3.1 La projection stéréographique . . . . .	14
2.3.2 Le disque de Poincaré : $\mathbb{D}$ . . . . .	16
<b>3 Liens avec l'analyse complexe : calcul de géodésiques et d'isométries</b>	<b>16</b>
3.1 Premiers résultats par l'analyse complexe . . . . .	16
3.2 Le plan : $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
3.3 Le disque de Poincaré : $\mathbb{D}$ . . . . .	21
3.4 La projection stéréographique . . . . .	23

# Introduction

Les questions de représentation de surfaces dans l'espace, de projections fidèles ou de géométrie sont un moteur des mathématiques depuis toujours. Ces interrogations sur la représentation abstraite et mathématique de formes, simples ou complexes, ont été considérées selon des angles variés à travers les siècles, constituant un terreau fertile pour bon nombre de théories. Il s'agit donc ici de s'intéresser à un aspect d'un des tournants majeurs de l'histoire de ces théories : l'apparition des géométries non-euclidiennes et la formalisation par Riemann des notions de variété ou de métrique.

La géométrie dite euclidienne est formalisée pour la première fois durant l'antiquité par les axiomes d'Euclide qui définissent les comportements essentiels des objets de la géométrie (intersections de droites, parallélisme...). Vue et revue, modernisée par de grands esprits, c'est au *XIX*<sup>e</sup> siècle que la géométrie connaît une avancée énorme sous l'influence des idées de Gauss, Riemann, Lobatchevsky, Poincaré et de nombreux autres. Elle s'ouvre d'un coup aux théories des géométries dites non-euclidiennes.

Ces géométries découlent d'une question simple : peut-on démontrer le 5<sup>e</sup> axiome d'Euclide ? Ce dernier signifie la propriété : *pour une droite A et un point M donnés, il existe une unique droite passant par le point M qui soit parallèle à A*. Il s'est avéré que les géométries émergées de la négation de cet axiome étaient tout aussi cohérentes et fertiles que la géométrie euclidienne. En cessant de se placer dans un plan, mais par exemple sur une sphère ou une selle, les objets doivent être redéfinis plus abstraitement, apportant alors un recul nouveau sur les notions de géométrie.

On définira d'abord ici les variétés, qui sont une sorte de généralisation des surfaces, afin d'en étudier quelques exemples bidimensionnels et certains aspects. On s'intéressera ensuite à la notion de métrique qui est une réinterprétation de la notion de distance afin de définir les isométries ou les géodésiques (plus courts chemins) sur des variétés. Ceci nous permettra d'arriver à ce qui constitue le but de ce mémoire, expliciter les isométries et les géodésiques dans le cadre de certaines variétés riemanniennes de dimension deux : le plan, la sphère et le disque de Poincaré, ces variétés « représentant » respectivement les géométries euclidienne, sphérique et hyperbolique.

## 1 Une variété différentielle : le tore plat

### 1.1 Intuitions et premières définitions

On ne considérera dans ce mémoire pratiquement que des variétés de dimension 2. On peut, pour mieux les appréhender dans le cadre d'une première approche, les voir comme des surfaces bidimensionnelles plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Pourtant elles ne sont pas plongées dans un espace de dimension supérieure. C'est là que demeure l'enjeu de la définition de cette notion. Il s'agit de définir des espaces courbes qui ne nécessitent pas d'être plongés dans un espace ambiant euclidien de dimension supérieure pour pouvoir être manipulés.

On considérera alors comme une variété de dimension  $n$  un ensemble qui localement « ressemble » à  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une notion de variété topologique, que nous n'aborderons pas ici, et qui formalise cette idée de manière plus générale que ce que nous allons faire. Cette définition indique la nature de l'espace qu'est la variété topologique, de manière à ce qu'il ne soit pas trop différent de ce que l'on manipule habituellement, mais précise également cette notion de « ressemblance » à  $\mathbb{R}^n$ . En fait c'est un espace dont il existe un recouvrement ouvert tel que pour chaque ouvert  $\mathcal{U}$  du recouvrement, il existe une bijection bicontinue  $\phi$  de  $\mathcal{U}$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Sans rentrer dans les détails, nous procéderons d'une manière qui permet de contourner cette notion, en définissant des bijections entre des sous ensembles de l'ensemble de base (qui sera ensuite la variété) et  $\mathbb{R}^n$ , et l'idée est ensuite d'induire sur cet espace une topologie à partir de celle de  $\mathbb{R}^n$ .

Ainsi on partira plutôt d'une définition à partir des bijections. Pour ceci on définit d'abord les couples voisinages-bijection afin de pouvoir « recouvrir » l'ensemble de départ (la future variété) tout entier par ces voisinages.

**Définition 1.** Soit  $M$  un ensemble. Une carte de  $M$  est un couple  $(\mathcal{U}, \phi)$  tel que  $\mathcal{U} \subset M$  et tel que  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$  soit une bijection, avec  $\phi(\mathcal{U})$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Les cartes sont fondamentales car c'est en ne passant plus que par celles-ci que l'on peut s'affranchir de l'idée de la surface comme plongée dans un espace ambiant. Le but de ce rapprochement entre un espace courbe et  $\mathbb{R}^n$  est l'étude de ces espaces courbes. En effet, on sait facilement manipuler des fonctions entre espaces euclidiens (étude de continuité ou de dérivabilité par exemple). Ainsi, comme souvent en mathématiques, on se ramène à quelque chose que l'on connaît pour définir des notions à propos d'objets nouveaux. On définit ainsi les applications de changement de carte.

**Définition 2.** Soit un ensemble de cartes  $\mathcal{A} = ((\mathcal{U}_i, \phi_i))_i$  d'un ensemble  $M$  tel que  $\bigcup_i \mathcal{U}_i = M$ . Une application de changement de cartes de  $M$  est une application de la forme :

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$$

avec :  $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i), (\mathcal{U}_j, \phi_j)\} \subset \mathcal{A}$

Maintenant que l'on a accès à des fonctions entre espaces euclidiens que l'on sait manipuler, on peut définir une notion de différentiabilité de variété mais aussi de fonctions entre ces variétés. On définit donc maintenant le « recouvrement » mentionné précédemment.

**Définition 3.** Un atlas d'un ensemble  $M$  est un ensemble de cartes de  $M$ ,  $((\mathcal{U}_i, \phi_i))_i$ , tel que :

- $\bigcup_i \mathcal{U}_i = M$
- $\forall (i, j)$ , si  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ ,  $\phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$  et  $\phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$  sont des ouverts
- Les changements de cartes sont  $\mathcal{C}^1$

On ne s'intéressera par la suite qu'à la notion de variété différentielle  $\mathcal{C}^1$ , c'est pourquoi on définit un atlas pour ce type de variétés. Il s'agit en effet de munir l'ensemble de départ (noté  $M$  jusque là) de son atlas afin d'obtenir une variété. On parlera de variété différentielle  $\mathcal{C}^k$  si les changements de cartes sont  $\mathcal{C}^k$ .

**Définition 4.** Une variété différentielle ( $\mathcal{C}^1$ ) est un ensemble  $M$  muni d'un atlas comme défini précédemment.

En réalité une variété différentielle sera même un objet plus général (mais on ne le considérera pas sous cet aspect ici). On, parle d'atlas compatibles, si, l'union des atlas demeure un atlas. Les propriétés sont alors toutes conservées, et on peut définir la variété comme la classe d'équivalence de l'ensemble muni d'atlas compatibles.

**Définition 5.** Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentielles et leurs atlas respectifs :  $\mathcal{A} = ((\mathcal{U}_i, \phi_i))_i$  et  $\mathcal{B} = ((\mathcal{V}_j, \psi_j))_j$ . Soit  $x \in M$ .

On dira que  $f : M \rightarrow N$  est  $\mathcal{C}^k$  dans un voisinage de  $x$  ssi :  $\forall (i, j)$  tels que  $x \in \mathcal{U}_i$  et  $f(x) \in \mathcal{V}_j, \exists r > 0$  tel que  $B = B(\phi_i(x), r) \subset \phi_i(\mathcal{U}_i)$ ,  $f(\phi_i^{-1}(B)) \subset \mathcal{V}_j$  et  $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$  est  $\mathcal{C}^k(B; \psi_j(\mathcal{V}_j))$ .

On dira que  $f$  est  $\mathcal{C}^k(M, N)$  si pour tout  $x \in M$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  dans un voisinage de  $x$ .

La notion de variété différentielle  $\mathcal{C}^k$  renvoie, comme pour les fonctions, à l'idée d'une quantification de la régularité de la variété (« plus  $k$  est grand, plus la variété est lisse »).

On remarque d'ailleurs que dans le cas particulier de variétés différentielles  $\mathcal{C}^k$ , on peut remplacer dans la définition d'une fonction de variétés  $\mathcal{C}^k$  dans un voisinage de  $x \in M$  : «  $\forall (i, j)$  tels que  $x \in \mathcal{U}_i$  et  $f(x) \in \mathcal{V}_j, \exists r > 0$  tel que  $B = B(\phi_i(x), r) \subset \phi_i(\mathcal{U}_i)$ ,  $f(\phi_i^{-1}(B)) \subset \mathcal{V}_j$  et  $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$  est  $\mathcal{C}^k(B; \psi_j(\mathcal{V}_j))$  » par «  $\exists (i, j)$  tels que  $x \in \mathcal{U}_i$  et  $f(x) \in \mathcal{V}_j, \exists r > 0$  tel que  $B = B(\phi_i(x), r) \subset \phi_i(\mathcal{U}_i)$ ,  $f(\phi_i^{-1}(B)) \subset \mathcal{V}_j$  et  $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$  est  $\mathcal{C}^k(B; \psi_j(\mathcal{V}_j))$  ».

En effet, il suffit que ce soit vrai pour un couple  $(i, j)$  pour que ce soit vrai pour tous. Supposons qu'il existe un tel couple  $(i, j)$ . Soient maintenant  $(\mathcal{U}_k, \phi_k) \in \mathcal{A}$  et  $(\mathcal{V}_l, \psi_l) \in \mathcal{B}$  (avec les notations des définitions) tels que  $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$  et  $\mathcal{V}_l \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$ . On a clairement :

$$\psi_l \circ f \circ \phi_k^{-1} |_{\phi_k(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_i)} = \psi_l \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i \circ \phi_k^{-1} |_{\phi_k(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_i)}$$

Or on se place dans un cadre où les applications de changement de cartes sont  $\mathcal{C}^k$ . De plus  $\phi_k(\mathcal{U}_k) \cap \mathcal{U}_i \subset \phi_k(\mathcal{U}_k)$  est ouvert, on a donc bien un voisinage de  $\phi_k(x)$  vérifiant les conditions souhaitées, ce qui conclut la remarque.

## 1.2 Le tore plat

Afin de mieux saisir ce qu'est une variété, nous allons dans un second temps étudier la variété qu'est le tore plat, en proposer plusieurs atlas et leur donner un ancrage visuel.

### 1.2.1 Définition

Le tore plat est une variété dont l'ensemble de base est  $[0; 1[ \times [0; 1[$ . On présentera ici deux atlas du tore plat (dont on repérera les points comme ceux de l'ensemble). Le premier est le plus naturel, composé de quatre ouverts. Le second est une manière de se représenter le tore plat comme le tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$  en mettant en bijection le tore plat et une couronne ouverte de  $\mathbb{R}^2$ .

Une manière de voir le tore plat dans  $\mathbb{R}^2$  est de le voir comme une variété telle que les cotés marqués de flèches (cf. figure 1) sont identifiés. On parle de tore plat car si on "collait" les cotés opposés deux à deux, on obtiendrait un tore de dimension 2 plongé dans  $\mathbb{R}^3$  (à homéomorphisme près).

On notera par la suite le tore plat  $\mathbb{T}$ .

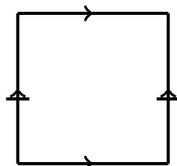


FIGURE 1 – Tore Plat  $\mathbb{T}$

### 1.2.2 Atlas en 4 ouverts

On considère les 4 ensembles suivants sur le tore plat (ce sont ces ensembles qui seront ensuite mis en bijection avec des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , on les appellera donc ouverts de  $\mathbb{T}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[ \times ]0; 1[ \\ \mathcal{U}_1 &= ]0; 1[ \times [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[ \\ \mathcal{U}_2 &= [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[ \times [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[ \\ \mathcal{U}_3 &= ]0; 1[ \times ]0; 1[ \end{aligned}$$

On indiquera dans la figure suivante certains points particuliers des ensembles, afin de mieux en rendre compte. Les points n'appartenant pas à l'ensemble seront indiqués en noir (ou pointillés), tandis que ceux appartenant à l'ensemble seront indiqués en rouge.

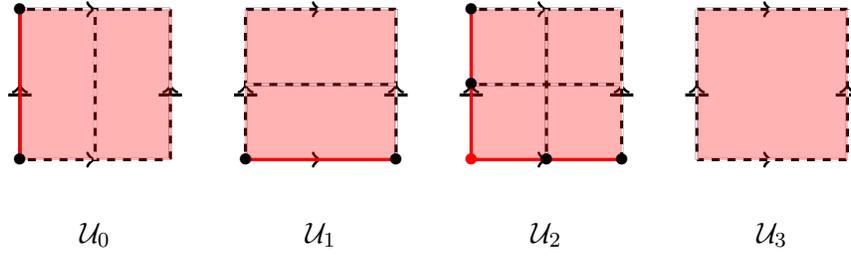


FIGURE 2 – Ouverts

On leur associe respectivement les bijections :

$$\phi_0 : \mathcal{U}_0 \longrightarrow ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[ \times ]0; 1[ \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} (x; y) & \text{si } x \in [0; \frac{1}{2}[ \\ (x - 1; y) & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}$$

$$\phi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow ]0; 1[ \times ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[ \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} (x; y) & \text{si } y \in [0; \frac{1}{2}[ \\ (x - 1; y) & \text{si } y \in ]\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}$$

$$\phi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[ \times ]0; 1[ \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} (x; y) & \text{si } (x; y) \in [0; \frac{1}{2}[ \times [0; \frac{1}{2}[ \\ (x - 1; y) & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}; 1[ \times [0; \frac{1}{2}[ \\ (x; y - 1) & \text{si } (x; y) \in [0; \frac{1}{2}[ \times ]\frac{1}{2}; 1[ \\ (x - 1; y - 1) & \text{si } (x; y) \in ]\frac{1}{2}; 1[ \times ]\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}$$

$$\phi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow ]0; 1[ \times ]0; 1[ \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x; y) \longmapsto (x; y)$$

Le choix de ces ensembles et de ces bijections n'est pas arbitraire. Les ensembles que l'on a défini sont bien en bijection avec des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , par la topologie induite (qu'on a brièvement mentionnée précédemment), on peut parler d'ouverts de  $\mathbb{T}$ .

On ne compte jamais deux fois des points de  $\mathbb{T}$  dans un ouvert donné, et c'est pour éviter cela et permettre l'existence des bijections que l'on doit faire 4 ouverts. Ainsi :

- $\mathcal{U}_3$  permet d'inclure  $]0; 1[ \times ]0; 1[$ .
- $\mathcal{U}_0$  permet d'inclure  $\{0\} \times ]0; 1[$ .
- $\mathcal{U}_1$  permet d'inclure  $]0; 1[ \times \{0\}$ .
- $\mathcal{U}_2$  permet d'inclure  $\{0\} \times \{0\}$ .

On a donc bien :  $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 = \mathbb{T}$ .

Le choix des bijections peut sembler naturel en ceci qu'il s'agit simplement de "déplacer" des portions du tore plat, comme indiqué ci-dessous avec les exemples de  $\mathcal{U}_0$  et  $\mathcal{U}_3$ . Il faut tout de même avoir conscience que ce n'est qu'une illustration de l'action de  $\phi_0$  qui va d'un sous ensemble de  $\mathbb{T}$  (que l'on représente par un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ) vers  $\mathbb{R}^2$ .

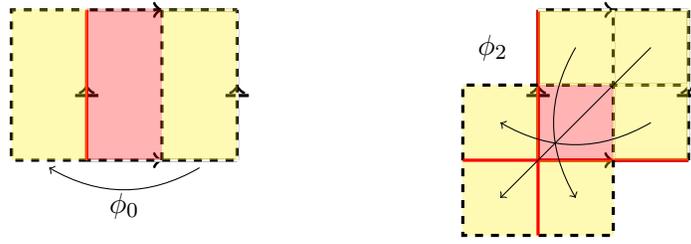


FIGURE 3 – Illustration de l'action de  $\phi_0$  sur  $\mathcal{U}_0$  et de  $\phi_2$  sur  $\mathcal{U}_2$

L'ensemble  $\{(\mathcal{U}_i; \phi_i), i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket\}$  forme donc bien un atlas de  $\mathbb{T}$ . On peut ensuite aisément calculer  $\phi_0^{-1}, \phi_1^{-1}, \phi_2^{-1}$  et  $\phi_3^{-1}$ , ainsi que les changements de cartes.

Donnons donc l'exemple du changement de carte :  $\phi_0 \circ \phi_3^{-1}$ . On sait que  $\phi_3(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_3) = ]0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[ \times ]0; 1[$  et que  $\phi_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_3) = ]-\frac{1}{2}; 0[ \cup ]0; \frac{1}{2}[ \times ]0; 1[$ .

Ainsi :

$$\phi_0 \circ \phi_3^{-1} : \phi_3(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_3) \longrightarrow \phi_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_3)$$

$$(x; y) \longmapsto \begin{cases} (x; y) & \text{si } x \in ]0; \frac{1}{2}[ \\ (x - 1; y) & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}$$

On remarque que cette fonction est bien  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert dans un autre, ce qui sera le cas de tous les changements de cartes car on voit bien (comme l'indique la figure), qu'ils sont tous des translations d'ouverts.

### 1.2.3 Atlas en 2 ouverts (couronnes)

On souhaite ici mettre en bijection deux ensembles du tore plat avec deux couronnes de  $\mathbb{R}^2$ , ce qui peut donner une idée de la représentation tridimensionnelle du tore plat. En effet, une portion de la surface du tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$  délimitée par une droite tracée sur celui-ci (en 3 dimensions on verra cela comme un cercle) est une couronne, une fois « dépliée ». On peut donc s'imaginer recouvrir ce tore par deux couronnes.

On considère les deux ensembles du tore plat suivants :

$$\mathcal{V}_0 = [0; 1[ \times ]0; 1[$$

$$\mathcal{V}_1 = [0; 1[ \times [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1[$$

Il s'agit de trouver deux bijections, qui à ces ensembles associe la même couronne :

$$\mathcal{C} = C(0, 1, 2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

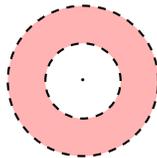


FIGURE 4 – Couronne  $\mathcal{C}$

On choisira :

$$\begin{aligned}\psi_0 : \mathcal{V}_0 &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (x; y) &\longmapsto (y + 1)(\cos 2\pi x; \sin 2\pi x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1 : \mathcal{V}_1 &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (x; y) &\longmapsto \begin{cases} (y + \frac{3}{2})(\cos 2\pi x; \sin 2\pi x) & \text{si } y \in [0; \frac{1}{2}[ \\ (y + \frac{1}{2})(\cos 2\pi x; \sin 2\pi x) & \text{si } y \in ]\frac{1}{2}; 1[ \end{cases}\end{aligned}$$

De même, on pourra ici calculer les changements de cartes, et les inverses des bijections.

En relation avec une remarque précédente, on peut vérifier que les atlas sont compatibles, c'est à dire que leur réunion demeure un atlas (ils rendent compte d'un même objet). Considérons par exemple ce nouvel atlas, et calculons en un changement de cartes (avec les notations de la sous partie précédente et de celle-ci), par exemple  $\psi_0 \circ \phi_3^{-1}$ .

On voit que  $\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{U}_3$ . De plus  $\phi_3(\mathcal{U}_3) = ]0; 1[ \times ]0; 1[$  et  $\psi_0(\mathcal{U}_3) = \mathcal{C} \setminus (]1; 2[ \times \{0\})$ . On voit donc que l'application de changement de carte est  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans un autre et s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\psi_0 \circ \phi_3^{-1} : \phi_3(\mathcal{U}_3) &\longrightarrow \psi_0(\mathcal{U}_3) \\ (x, y) &\longmapsto (y + 1)(\cos 2\pi x; \sin 2\pi x)\end{aligned}$$

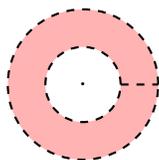


FIGURE 5 –  $\psi_0(\mathcal{U}_3)$

## 2 Distances et isométries

### 2.1 Métriques

L'introduction d'une notion de distance sur une variété permet l'introduction de la notion de longueur d'un chemin sur cette variété. La superposition de ces deux notions (variétés et distances) est tout à fait naturelle, car motivée, bien avant le développement de la théorie à laquelle nous nous intéressons ici, par des questions de cartographie : Comment faire le lien entre les distances sur le globe et le planisphère ? Comment projeter adéquatement la sphère dans un plan ? ...

On s'intéresse toujours aux cas des variétés différentielles, dont on va encore restreindre la définition afin de définir les variétés riemanniennes où les notions de distance sont bien définies. Pour cela il faut donner une notion de distance sur la variété lue dans les cartes.

**Définition 6.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une métrique sur  $\Omega$  est une application continue  $g : \Omega \longrightarrow S_{++}$  (avec  $S_{++}$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives).

On définit ensuite la longueur d'un chemin tracé dans un ouvert muni d'une métrique. De plus ce qui nous intéresse, c'est plutôt la longueur sur une variété, il suffira alors (en ajoutant certaines conditions) de lire la longueur du chemin lui-même lu dans les cartes.

**Définition 7.** Soit un chemin  $\mathcal{C}^1 : \gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$  (avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique  $g$ ). La longueur de ce chemin est le réel positif :  $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} dt$  (avec  $\|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} = \sqrt{\langle \gamma'(t); g(\gamma(t))\gamma'(t) \rangle}$ ) et  $g$  la métrique sur l'ouvert sur lequel est tracé le chemin).

Afin de pouvoir définir la longueur d'un chemin sur une variété il faut qu'elle ne dépende ni des cartes dans lesquelles on lit le chemin, ni des métriques en jeu, le but étant d'avoir une longueur de chemin invariante par changement de carte, pour avoir une longueur bien définie aux endroits où les ouverts (pour la topologie induite) de l'atlas de la variété se superposent. C'est pour cela qu'on définit les isométries dont la propriété motivant la définition sera explicitée ensuite.

**Définition 8.** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  munis respectivement des métriques  $g_1$  et  $g_2$ . On dit alors que  $\psi : (\Omega_1, g_1) \longrightarrow (\Omega_2, g_2)$  est une isométrie locale (pour les métriques  $g_1$  et  $g_2$ ) ssi :

$$\forall x \in \Omega_1, {}^t\psi'(x)g_2(\psi(x))\psi'(x) = g_1(x)$$

Elle sera dite globale si elle est de plus une bijection (dont la réciproque sera une isométrie locale donc globale, ce qui se déduit automatiquement de la formule  ${}^t\psi'(x)g_2(\psi(x))\psi'(x) = g_1(x)$ , qu'il suffit d'inverser).

Cette définition peut sembler au premier abord peu naturelle, mais elle constitue un choix pour que la longueur des chemins soit conservée par l'isométrie locale.

**Proposition 1.** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  munis respectivement des métriques  $g_1$  et  $g_2$  et  $\psi : (\Omega_1, g_1) \longrightarrow (\Omega_2, g_2)$  une isométrie locale.

Pour tout chemin  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0; 1], \Omega_1) : L(\psi \circ \gamma) = L(\gamma)$

*Démonstration.* Soit un chemin  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0; 1], \Omega_1)$ .

$$\begin{aligned} L(\psi \circ \gamma) &= \int_0^1 \|(\psi \circ \gamma)'(t)\|_{g_2(\psi \circ \gamma(t))} dt \\ &= \int_0^1 \langle \psi'(\gamma(t)).\gamma'(t); g_2(\psi \circ \gamma(t))\psi'(\gamma(t)).\gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \gamma'(t); {}^t\psi'(\gamma(t))g_2(\psi \circ \gamma(t))\psi'(\gamma(t)).\gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Or  $\psi$  est une isométrie locale ainsi :  $\forall x \in \Omega_1, {}^t\psi'(x)g_2(\psi(x))\psi'(x) = g_1(x)$ . Donc :

$$\begin{aligned} L(\psi \circ \gamma) &= \int_0^1 \langle \gamma'(t); g_1(\gamma(t))\gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{g_1(t)} dt \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

□

On peut donc enfin définir une variété riemannienne où les longueurs sont bien définies.

**Définition 9.** Soit  $M$  une variété munie de l'atlas  $\mathcal{A} = ((\mathcal{U}_i, \phi_i))_i$ . Si l'on munit chaque ouvert de  $\mathbb{R}^n : \phi_i(\mathcal{U}_i)$  de la métrique  $g_i$ , alors la variété  $M$  munie de la structure  $((\mathcal{U}_i, \phi_i, g_i))_i$  est dite riemannienne si  $\forall i, j$ , l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) &\longrightarrow \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \\ x &\longmapsto \phi_j \circ \phi_i^{-1} \end{aligned}$$

est une isométrie locale pour les métriques  $g_i|_{\phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}$  et  $g_j|_{\phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}$ .

On définit ensuite la longueur du chemin sur la variété riemannienne comme la longueur du chemin lu dans les cartes pour la métrique donnée.

**Définition 10.** Soit la variété  $M$  munie de l'atlas  $\mathcal{A} = ((\mathcal{U}_i, \phi_i))_{i \in I}$ . Soient  $j \in I$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}_j$ . Si l'on munit l'ouvert  $\phi_j(\mathcal{U}_j)$  de la métrique  $g_j$ , on dira que la longueur de  $\gamma$  est en fait sa longueur lue dans la carte, c'est à dire la longueur (au sens de la définition précédente) de  $\phi_j \circ \gamma$  (dont l'image est incluse dans  $\phi_j(\mathcal{U}_j)$ ).

La longueur d'un chemin est alors bien définie sur la variété riemannienne toute entière car la longueur est invariante par changement de carte en tout lieu où se superposent les ouverts de l'atlas. On n'entrera pas dans le détail de cette explication, mais l'idée est de découper le l'intégrale qui donne accès à la longueur en une somme d'intégrales sur des ouverts de l'atlas ou des intersections d'ouverts de l'atlas.

On peut donc définir une distance sur une variété riemannienne connexe par arcs (on ne considérera de toute manière que des cas dans cette situation).

**Définition 11.** Soit  $M$  une variété riemannienne connexe par arcs. Soient  $a, b \in M$ .

Soit l'ensemble  $G_{a,b}$  l'ensemble des chemins  $\mathcal{C}^1$  tracés sur  $M$  admettant  $a$  et  $b$  pour extrémités. On définit la distance :  $d(a, b) = \inf_{\gamma \in G_{a,b}} L(\gamma)$

Cette distance vérifie bien les propriétés habituelles d'une distance (on ne le montrera pas ici, bien que l'inégalité triangulaire et la réflexivité se déduisent assez rapidement de cette définition).

On définit maintenant les géodésiques, auxquelles on s'intéressera ensuite.

**Définition 12.** Sur une variété riemannienne  $M$ , une géodésique entre deux points  $a$  et  $b$  de  $M$  est un chemin entre  $a$  et  $b$  minimisant sa longueur (c'est un des chemin les plus courts entre  $a$  et  $b$ ).

## 2.2 Isométries

Le but de cette partie est dans un premier temps de se familiariser avec la notion d'isométrie locale en montrant que pour les isométries de  $\mathbb{R}^n$ , cette définition correspond bien à la propriété de conservation de la distance euclidienne. On élargira ensuite la définition à celle d'isométrie entre variétés.

Mais mentionnons tout d'abord un premier résultat. On remarque facilement par la définition des métriques (qui sont symétriques définies positives) et des isométries locales que : si  $\psi$  est une isométrie locale, alors  $\psi'$  est de rang  $n$ . Ainsi par une application directe du théorème d'inversion locale, on remarque que  $\psi$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme local.

Afin de se familiariser avec cette approche des isométries, montrons que cette définition correspond bien à ce que l'on connaît d'une isométrie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Mais avant cela introduisons  $\mathbb{R}^n$  comme une variété riemannienne.

$\mathbb{R}^n$  muni de son atlas et de sa métrique les plus naturels est la variété riemannienne la plus simple qui soit. En effet, il suffit de considérer l'atlas constitué du seul ouvert  $\mathbb{R}^n$  auquel on associe l'homéomorphisme :  $Id$ . De plus la métrique que l'on va considérer sur l'image de  $\mathbb{R}^n$  par l'identité sera tout naturellement l'identité.

Montrons maintenant que dans  $\mathbb{R}^n$  (comme on peut s'y attendre d'ailleurs), la définition de distance par la norme euclidienne, et la définition de distance donnée précédemment coïncident.

**Proposition 2.** Dans  $\mathbb{R}^n$  vu comme la variété Riemannienne ci-dessus :  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$  (avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne).

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathbb{R}^2$  et l'ensemble :  $G_{x,y} = \{\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^n), \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y\}$ .

Soit  $\gamma \in G_{x,y}$ .

$$\|x - y\| = \|\gamma(0) - \gamma(1)\| = \left\| \int_0^1 \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

Ainsi :  $\|x - y\| \leq d(x, y) = \inf_{\gamma \in G_{x,y}} L(\gamma)$

Réciproquement en prenant le chemin :  $\gamma(t) = tx + (1 - t)y \quad \forall t \in [0; 1]$  , on a bien  $L(\gamma) = \|x - y\|$ . Ainsi on a l'égalité souhaitée, et on a même exhibé une géodésique.  $\square$

Après cette proposition, on va montrer que les définitions d'isométrie correspondent bien.

**Proposition 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On a alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \iff \exists A \in L(\mathbb{R}^n), b \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } {}^tAA = Id \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b \\ \implies \forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t f'(x) f'(x) = Id$$

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$  .

On pose  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = f(x) - f(0)$  .

Ainsi :  $\|g(x)\| = \|x\|$  et :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ .

Les formules de polarisation nous donnent :  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \langle u; v \rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2)$ . On a donc directement :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle g(x); g(y) \rangle = \langle x; y \rangle \text{ et donc } \langle g(\lambda x + z); g(y) \rangle = \langle \lambda g(x) + g(z); g(y) \rangle$$

On souhaite donc montrer que  $g$  est linéaire, et pour cela il suffit de montrer que  $g$  est surjective (on montre au passage son injectivité :  $g(x) = g(y) \implies \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\| = 0 \implies x = y$ ).

Pour montrer la surjectivité de  $g$  montrons qu'elle est surjective sur toute boule fermée de  $\mathbb{R}^n$  centrée en 0. Notons  $B = B(0, r)$  avec  $r > 0$ .

$\|g(x)\| = \|x\|$  donc  $g(B) \subset B$ . On s'intéresse donc à l'inclusion réciproque.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x \in B$  et  $x \notin g(B)$  .  $g(B)$  est compact car l'image d'un compact par une fonction continue est compacte ( $g$  est même lipschitzienne).

On pose la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset g(B)$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = g^n(x)$ , dont on extrait une sous suite convergente  $(x_{\phi(n)})_n$  qui, par conséquent, est de Cauchy. Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \implies \|g^{\phi(n_0)}(x) - g^{\phi(n)}(x)\| = \|g^{\phi(n) - \phi(n_0)}(x) - x\| < \epsilon$$

Ainsi :  $d(x, g(B)) = 0$  ce qui est absurde car  $x \notin g(B)$  et  $g(B)$  est compact.

On a donc bien  $g(B) = B$  , donc  $g$  est bijective. Ainsi :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle g(\lambda x + z); g(y) \rangle = \langle \lambda g(x) + g(z); g(y) \rangle \\ \implies \forall x, u, z \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle g(\lambda x + z); u \rangle = \langle \lambda g(x) + g(z); u \rangle$$

Par conséquent  $g$  est linéaire, donc on peut écrire :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = Ax$  avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On a donc :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \langle Ax; Ay \rangle = \langle x; y \rangle = \langle x; {}^tAAy \rangle$ . Donc  ${}^tAA = Id$ .

On a de plus :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, g'(x) = f'(x) = A$ .

Ainsi  $\exists A \in L(\mathbb{R}^n), b \in \mathbb{R}^n$  tels que  ${}^tAA = Id$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$ .

Montrons maintenant que :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$  ( $A \in L(\mathbb{R}^n), b \in \mathbb{R}^n$ ) et  ${}^tAA = Id \implies \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \langle f(x) - f(y); f(x) - f(y) \rangle = \langle Ax - Ay; Ax - Ay \rangle = \langle (x - y); {}^tAA(x - y) \rangle = \|x - y\|^2$$

$\square$

On définit maintenant plus généralement une isométrie entre variétés.

**Définition 13.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés riemanniennes munies respectivement des atlas et des métriques :  $(\mathcal{U}_i, \phi_i, g_i)_i$  et  $(\mathcal{V}_j, \psi_j, h_j)_j$ . Soit  $f : M \rightarrow N$ .

On dira que c'est une isométrie locale si :  $\forall x \in M, \forall i, j$  tels que  $x \in \mathcal{U}_i$  et  $f(x) \in \mathcal{V}_j$  :

$${}^t f'_{ij}(y) h_j(f_{ij}(y)) f'_{ij}(y) = g_i(y) \quad (\text{avec } f_{ij} = \psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} \text{ et } y = \phi_i(x))$$

Elle sera dite globale si c'est une bijection (et comme précédemment, sa réciproque sera également une isométrie locale, donc globale).

On pourrait refaire le raisonnement précédent à propos des fonctions  $\mathcal{C}^1$  en remplaçant «  $\forall i, j$  » par «  $\exists i, j$  ». En effet ça ne dépendra pas de la carte choisie, les changements de cartes étant des isométries. En combinant cela à la propriété suivante, on voit pourquoi le caractère isométrique ne dépend pas des cartes.

**Proposition 4.** Les isométries sont stables par composition.

*Démonstration.* Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $\phi : N \rightarrow K$  ( $M, N$  et  $K$  des variétés riemanniennes) deux isométries locales (afin de simplifier, bien que le raisonnement soit le même, on suppose que chaque variété ne présente qu'une carte :  $(M, \psi_1, g_1)$ ,  $(N, \psi_2, g_2)$  et  $(K, \psi_3, g_3)$ ). On notera dans la suite  $\phi$ ,  $f$  et  $\phi \circ f$  les applications lues dans les cartes.

$$\forall (x, y) \in \psi_1(M) \times \psi_2(N), {}^t f'(x) g_2(f(x)) f'(x) = g_1(x) \text{ et } {}^t \phi'(y) g_3(\phi(y)) \phi'(y) = g_2(y)$$

Ainsi,  $\forall x \in \psi_1(M)$  :

$${}^t (\phi \circ f)'(x) g_3(\phi(f(x))) (\phi \circ f)'(x) = {}^t f'(x) {}^t \phi'(\phi(x)) g_3(\phi(f(x))) \phi'(f(x)) f'(x) = {}^t f'(x) g_2(f(x)) f'(x) = g_1(x)$$

De plus afin de montrer qu'une isométrie globale est stable par composition, il suffit d'ajouter que la composée de deux bijections est une bijection. □

On va montrer ici une dernière proposition qui sera nécessaire au calcul explicite des géodésiques que nous voulons mener dans certaines variétés de dimension 2. On rappelle qu'on ne considère que des variétés connexes par arcs.

**Proposition 5.** La distance entre points est préservée par isométrie globale. De plus, l'image d'une géodésique par une isométrie globale est une géodésique.

*Démonstration.* Montrons d'abord que la distance est préservée par une isométrie globale.

Soient  $a$  et  $b$  deux points d'une variété riemannienne  $M$ , et  $G_{a,b}$  l'ensemble des chemins  $\mathcal{C}^1$  entre  $a$  et  $b$ . Soit  $\gamma \in G_{a,b}$  et  $\psi$  une isométrie, sur  $M$ . On sait donc par définition que :  $L(\psi \circ \gamma) = L(\gamma)$  et  $L(\psi \circ \gamma) \geq d(\psi(b); \psi(a))$ .

Ainsi  $\forall \lambda \in G_{a,b}$ ,  $L(\lambda) \geq d(\psi(b); \psi(a))$ . Donc en passant à l'inf :  $d(a; b) \geq d(\psi(a), \psi(b))$ .

On voudrait donc montrer l'inégalité dans l'autre sens. Sachant que  $\psi^{-1}$  est également une isométrie globale, on a automatiquement ce que l'on veut :

$$d(a; b) = d(\psi^{-1} \circ \psi(a); \psi^{-1} \circ \psi(b)) \leq d(\psi(a), \psi(b))$$

Ainsi on a bien l'égalité donc la distance entre points est préservée par isométrie globale.

Montrons maintenant le deuxième point.

Soit  $\gamma \in G_{a,b}$  une géodésique et on souhaite montrer que :  $L(\psi \circ \gamma) = d(\psi(\gamma(0)); \psi(\gamma(1)))$ .

On a alors  $L(\psi \circ \gamma) = L(\gamma) = d(a, b) = d(\psi(a); \psi(b))$ .

On a donc bien :  $L(\psi \circ \gamma) = d(\psi(\gamma(0)); \psi(\gamma(1)))$ , ainsi  $\psi \circ \gamma$  est une géodésique. □

## 2.3 Exemples principaux de variétés riemanniennes

### 2.3.1 La projection stéréographique

**Idée et notations** Il s'agit ici de projeter la sphère  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On considérera deux ouverts  $U_0$  et  $U_1$  correspondant respectivement à la sphère privée du pôle sud et du pôle nord. On souhaite trouver des difféomorphismes  $\phi_0$  et  $\phi_1$  qui les projettent dans  $\mathbb{R}^2$ . Les cartes sont les couples  $(U_0; \phi_0)$  et  $(U_1; \phi_1)$ , qui définissent un atlas de la sphère.

On calculera ensuite les changements de carte  $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$ ,  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ ,  $\phi_0^{-1} \circ \phi_1$  et  $\phi_1^{-1} \circ \phi_0$ .

**Cartes** On considère la sphère  $\mathbb{S}^2$  plongée dans  $\mathbb{R}^3 : \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  afin de pouvoir exprimer les cartes et s'affranchir du "plongement". On choisit  $\phi_0$  et  $\phi_1$  comme suit, ce qui correspond à la projection stéréographique, dont l'interprétation graphique est donnée dans la figure.

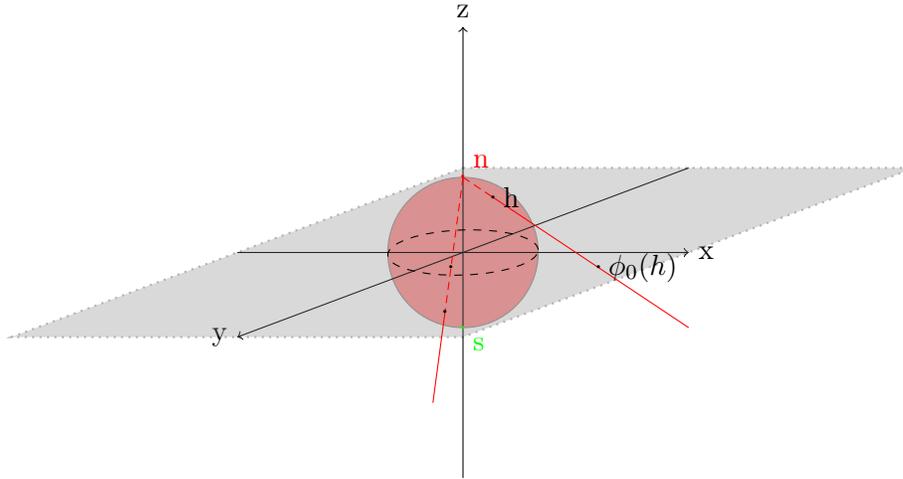


FIGURE 6 – Illustration de la projection stéréographique

On obtient par de la géométrie élémentaire :

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \\ \phi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

**Changement de carte** On peut alors calculer les changements de cartes qui sont tous les mêmes :

$$\begin{aligned} \phi_0 \circ \phi_1^{-1}, \phi_1 \circ \phi_0^{-1}, \phi_0^{-1} \circ \phi_1, \phi_1^{-1} \circ \phi_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Ceci correspond à l'inversion par rapport au cercle de rayon 1 dans le plan (xOy) (cf. figure).

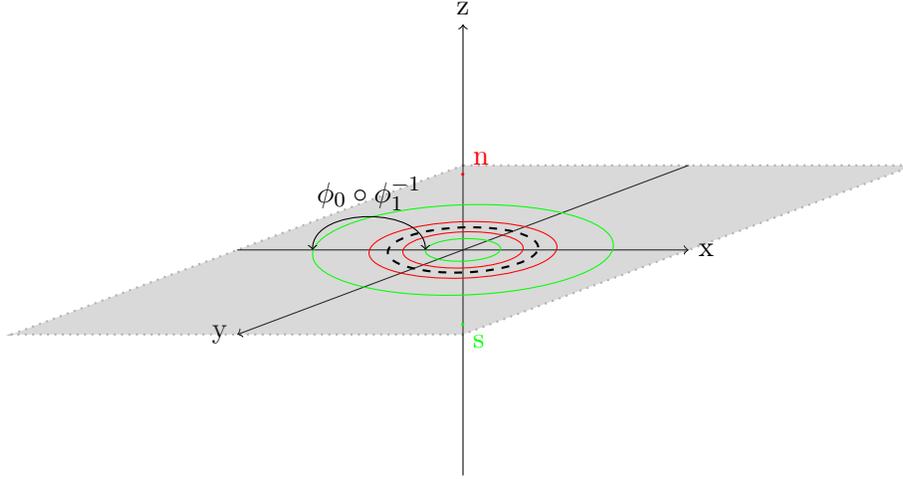


FIGURE 7 – Illustration du changement de carte

Plus généralement, en considérant la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , on a le changement de carte :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\langle x; x \rangle} \end{aligned}$$

**Métrie** On souhaite ici prendre une métrique dans  $\mathbb{R}^2$  telle que la longueur du chemin tracé dans  $\mathbb{R}^2$  ( $L(\gamma)$ ) corresponde bien à la longueur d'un chemin tracé sur la sphère, dont on calculerait la longueur dans  $\mathbb{R}^3$  ( $L(\phi_0^{-1} \circ \gamma)$ ).

On ne regardera que les calculs pour les chemins tracés dans le premier ouvert ( $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ ), les calculs étant exactement les mêmes dans l'autre cas.

Soit  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ . On veut donc :

$$L(\gamma) = L(\phi_0^{-1} \circ \gamma) = \int_0^1 \|(\phi_0^{-1} \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_0^1 \langle \gamma'(t); {}^t(\phi_0^{-1})'(\gamma(t))(\phi_0^{-1})'(\gamma(t))\gamma'(t) \rangle dt$$

Ainsi on prendra comme métrique :  $g(x, y) = {}^t(\phi_0^{-1})'(x, y)(\phi_0^{-1})'(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Par des calculs de dérivées on obtient finalement :

$$g(x, y) = {}^t(\phi_0^{-1})'(x, y)(\phi_0^{-1})'(x, y) = {}^t(\phi_1^{-1})'(x, y)(\phi_1^{-1})'(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} Id$$

On pourra donc utiliser la même métrique pour chaque carte.

Afin d'exhiber une propriété intéressante de  $g$ , on peut également noter  $r$  la distance à 0 du point de coordonnées  $(x, y)$  à l'origine. On a alors :

$$g(x, y) = \frac{4}{(r^2 + 1)^2} Id$$

La projection stéréographique permet donc une bonne représentations de la sphère de dimension 2, sans avoir à la penser comme plongée dans un espace de dimension 3.

Montrons maintenant que les changement de cartes sont des isométries locales pour cette métrique, afin de se convaincre que l'on a bien défini ainsi une variété riemannienne. Soit  $\psi$  une application de changement de cartes (elles sont toutes les mêmes et la métrique est la même pour les deux ouverts de la variété).

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

On voudrait donc montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, {}^t\psi'(x, y)\psi'(x, y) = \left( \frac{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 Id$$

Remarquons d'abord que :  $\left( \frac{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$

De plus :  $\psi'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = (u \ v)$  avec  $u$  et  $v$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  orthogonaux et de même norme  $N$  telle que :  $N^2 = \frac{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4}$ .

Ainsi :  ${}^t\psi'(x, y)\psi'(x, y) = N^2 Id$

Or  $N^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ . Par conséquent, les changements de carte sont bien des isométries locales.

### 2.3.2 Le disque de Poincaré : $\mathbb{D}$

Le disque de Poincaré est une variété riemannienne, et un exemple fondamental d'espace hyperbolique. Il s'agit du disque unité ouvert dans  $\mathbb{C}$  (c'est à dire :  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ) que l'on munit d'un atlas constitué d'une seule carte, et d'une métrique.

Proprement, la carte est constituée du disque unité ouvert et de l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z &\longmapsto (Re(z), Im(z)) \end{aligned}$$

et la métrique sera :  $g(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 - 1)^2} Id$ .

Comme :  $|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$ , on pourra noter :  $g(z) = \frac{4}{(|z|^2 - 1)^2} Id$ .

On remarque au passage que le choix de cette métrique n'est pas anodin en considération de la métrique choisie dans le cadre de la projection stéréographique. En effet, c'est simplement un signe au dénominateur qui change, et qui fait la distinction entre l'espace sphérique traité dans la sous partie précédente, et l'espace hyperbolique qu'est le disque de Poincaré.

## 3 Liens avec l'analyse complexe : calcul de géodésiques et d'isométries

### 3.1 Premiers résultats par l'analyse complexe

Dans le cadre de notre étude, il existe un résultat fondamental sur les isométries qui illustre l'utilisation de l'analyse complexe, à laquelle nous allons désormais avoir recours. En effet, comme on le verra ensuite, le but de cet exposé est d'exprimer les isométries et les géodésiques dans trois variétés riemanniennes de

dimension 2. On étudiera donc des espaces qui "ressemblent" localement à  $\mathbb{R}^2$ . Or on peut jongler aisément entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ , qui sont isomorphes (en posant, si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $z$  "="  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ). On pourra donc utiliser des résultats et des caractérisations d'analyse complexe pour étudier les variétés qui nous intéressent.

Dans la proposition suivante, on s'intéressera donc à  $\mathbb{R}^2$  vu comme  $\mathbb{C}$ . On considérera des variétés riemanniennes qui sont une réunions d'ouverts de  $\mathbb{R}^2$  (notée  $M$ ) tous munis d'une même métrique  $g$  telle que :  $\forall z \in M \subset \mathbb{C}$ ,  $g(z) = h(z)Id$ , et avec  $h$  une fonction régulière de  $M$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Proposition 6.** Soit  $\psi : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une isométrie pour la variété décrite ci-dessus, que l'on identifie à la fonction  $F : M \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(x + iy) = \psi(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\psi(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (on écrira plus ou moins indifféremment  $F$  ou  $\psi$ ).

$F$  est holomorphe ou  $F \circ \sigma$  est holomorphe (avec  $\sigma$  la conjugaison complexe).

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que :  $\psi'(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . De plus, comme  $\psi$  est une isométrie :  ${}^t\psi'(z)\psi'(z) = \frac{h(z)}{h(\psi(z))}Id$ .

Ceci équivaut à écrire que :  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  sont orthogonaux et de même norme :  $\sqrt{\frac{h(z)}{h(\psi(z))}}$ .

Ainsi on a :  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ , avec  $\epsilon \in \{1, -1\}$ .

Deux situations sont donc possibles :

$$\psi'(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{ou} \quad \psi'(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Montrons que si il existe  $z \in U$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $\psi$  est dans la situation (1) (respectivement (2)), alors  $\psi$  est dans la situation (1) (respectivement (2)) pour tout  $w$  dans  $U$  (c'est à dire, dans le cas (1) :  $\forall w \in U, \exists s_w, t_w \in \mathbb{R}$ , tel que  $\psi'(w) = \begin{pmatrix} s_w & t_w \\ -t_w & s_w \end{pmatrix}$ )

Supposons donc par l'absurde qu'il existe  $z_1 \in U$ ,  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  et  $z_2 \in U$ ,  $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\psi'(z_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi'(z_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :  $\det(\psi'(z_1)) = a_1^2 + b_1^2 \geq 0$  et  $\det(\psi'(z_2)) = a_2^2 + b_2^2 \leq 0$ . Par continuité de  $(\det \circ \psi')$  il existe donc  $z_0$  tel que  $\det(\psi'(z_0)) = 0$  ce qui est absurde car :  ${}^t\psi'(z_0)\psi'(z_0) = \frac{h(z_0)}{h(\psi(z_0))}Id$ .

En effet, en passant au déterminant, on aurait alors :  $0 = \frac{h(z_0)}{h(\psi(z_0))} > 0$ , ce qui est absurde.

On a donc bien le résultat : si il existe  $z \in U$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $\psi$  est dans la situation (1) (respectivement (2)), alors  $\psi$  est dans la situation (1) (respectivement (2)) pour tout  $w$  dans  $U$ .

Rappelons un résultat fondamental d'analyse complexe dont nous allons nous servir : les relations de Cauchy-Riemann.

Soit :

$$H : U \rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$$

Où  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

$H$  est holomorphe  $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  sont bien définies et vérifient les relations :  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Or on sait que  $\psi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ . Ainsi  $F$  est holomorphe en  $z$  dans le cas (1).

Montrons que le cas (2) correspond à  $F \circ \sigma$  holomorphe. On va s'intéresser à la "version  $\mathbb{R}^2$ " de  $\sigma$ , c'est à dire la fonction  $\delta$  telle que :  $\delta(x, y) = (x, -y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$\delta$  est donc linéaire et :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \delta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Ainsi :  $\delta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent, si on se place dans le cas (2) on sait que pour tout  $w$  dans  $U$ , on est dans le cas (2).

En particulier, il existe  $s$  et  $t$  tels que :  $\psi'(z) = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$

De plus on a :  $(\psi \circ \delta)'(z) = \psi'(\bar{z}) \cdot \delta'(z) = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$

On a donc bien dans ce cas que  $F \circ \sigma$  est holomorphe par les relations de Cauchy-Riemann.  $\square$

On a donc un résultat très fort sur la nature des isométries qui nous intéressent, grâce à une approche qui est celle de l'analyse complexe.

Le résultat que nous allons montrer maintenant décrit, dans le cas d'une métrique ne dépendant que du module, la géodésique entre 0 et un point quelconque comme un segment de droite dans  $\mathbb{C}$ .

On utilisera dans cette preuve une notation dans le cadre de l'identification que l'on fait entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ , dont on précise ici la nature. Si  $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}$  et  $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$  avec  $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ , on notera  $\langle z_1; z_2 \rangle = \text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = ac + bd$ , ce qui correspond au produit scalaire euclidien entre les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  représentés par  $z_1$  et  $z_2$ .

**Proposition 7.** *On considère la variété riemannienne qu'est la boule ouverte de rayon  $r > 0$  que l'on notera  $B$  munie de la métrique  $g$  telle que :  $\forall z \in B : g(z) = h(|z|^2)$  ( $h$  régulière positive sur  $[0; r^2[$ ).*

*Pour tout  $z \in B$  l'unique géodésique (à reparamétrage près) entre  $z$  et 0 est le chemin :*

$$\begin{aligned} \gamma : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto (1 - t)z \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } d(0, z) = \int_0^1 \sqrt{\langle z; h(t^2|z|^2)z \rangle} dt = |z| \int_0^1 \sqrt{h(t^2|z|^2)} dt$$

*Démonstration.* Soit  $z \in B$ . Soit un chemin partant de  $z$  et allant vers 0 :

$$\begin{aligned} \lambda : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto x(t)z + iy(t)z \end{aligned}$$

Avec  $x, y \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$  tels que  $x(0) = 1$  et  $x(1) = y(0) = y(1) = 0$ .

Soit  $t_0 = \inf\{t \in [0; 1], x(t) = y(t) = 0\}$ . Par continuité on a  $x(t_0) = y(t_0) = 0$  ( $t_0$  est en fait un min).

Soit  $\eta \in [0; t_0[$ . On définit  $I_\eta = \int_0^\eta \|\lambda'(t)\|_{g(\lambda(t))} dt$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_\eta &= \int_0^\eta (\langle (x'(t) + iy'(t))z; h(|\lambda(t)|^2)(x'(t) + iy'(t))z \rangle)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^\eta |z| |x'(t) + iy'(t)| \sqrt{h(|z(x(t) + iy(t))|^2)} dt \end{aligned}$$

On pose  $u(t) = |x(t) + iy(t)|$  afin d'effectuer un changement de variable.

$$\frac{du}{dt} = \left( \langle (x(t) + iy(t))(x(t) - iy(t)) \rangle^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{\langle x'(t) + iy'(t); x(t) + iy(t) \rangle}{|x(t) + iy(t)|}$$

Ainsi par Cauchy-Schwarz :  $|x'(t) + iy'(t)| \geq -\frac{du}{dt}$  , donc  $I_\eta \geq \int_{u(\eta)}^1 |z|h(u^2|z|^2)du$  et ce pour tout  $\eta \in [0; t_0[$ .

En passant à la limite en  $t_0$  on a bien :  $L(\gamma) \leq L(\lambda|_{[0,t_0]}) \leq L(\lambda)$ .

Par conséquent le chemin  $\gamma$  minimise la longueur, c'est donc une géodésique. Il faut montrer que c'est l'unique (à reparamétrage près).

Tout d'abord, on a  $L(\lambda|_{[0,t_0]}) = L(\lambda)$  ssi  $x(t) = y(t) = 0 \forall t \in [t_0; 1]$ .

Ensuite, par Cauchy-Schwarz, on a égalité avec  $L(\gamma)$  ssi  $\lambda'(t) = -f(t)\lambda(t), \forall t \in [0; t_0[$  et avec  $f$  une fonction continue de  $[0; t_0[$  dans  $\mathbb{R}_+$  (liaison négative en tout  $t$  des deux vecteurs et on a  $x(t) + iy(t) \neq 0 \forall t \in [0; t_0[$ ).

D'une part :  $y'(t) = -f(t)y(t), \forall t \in [0; t_0[$  et  $y(0) = 0$ , donc par unicité de la solution :  $y = 0$ .

D'autre part :  $x'(t) = f(t)x(t), \forall t \in [0; t_0[$ . Ainsi la solution est bien un segment de droite parcouru toujours dans le même sens (car  $x(t) \neq 0$  sur  $[0; t_0[$  donc  $x(t) > 0$  et  $x'(t) \leq 0$  sur  $[0; t_0[$ ).

□

Ce dernier résultat va nous permettre d'expliciter les géodésiques dans les variétés que nous allons étudier. En effet, comme nous l'avons vu, dans les trois variétés que nous allons étudier, les métriques vérifient les hypothèses de la proposition. En combinant ce résultat au fait que l'image d'une géodésique par une isométrie est une géodésique, il suffira de trouver des isométries de type « translation » pour ramener une géodésique quelconque à une géodésique entre 0 et un autre point de la variété, dont on connaît l'expression.

Voyons maintenant un autre résultat qui nous sera utile par la suite pour montrer que toutes les isométries ont bien été déterminées. Sa démonstration utilise un lemme célèbre d'analyse complexe : le lemme de Schwarz, que nous allons d'abord rappeler.

**Lemme 1.** Soit  $f : B(0, \delta) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\delta > 0$ ) une fonction holomorphe telle que :  $|f(z)| \leq \delta \forall z \in B(0, \delta)$  et  $f(0) = 0$ .

On a alors  $|f(z)| \leq |z| \forall z \in B(0, \delta)$  et  $f'(0) \leq 1$ . De plus si il existe  $z$  tel que  $|f(z)| = |z|$ , ou si  $|f'(0)| = 1$ , alors :

$$\exists a \in \mathbb{C} \text{ tel que } |a| = 1 \text{ et } f(z) = az \forall z \in B(0, \delta)$$

Montrons donc maintenant la proposition qui nous intéresse.

**Proposition 8.** Soit  $B$  une boule ouverte de  $\mathbb{C}$  munie d'une métrique  $g$  telle que  $\forall z \in B, g(z) = h(|z|^2)Id$  (avec  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  régulière). Soit  $\psi$  une isométrie locale sur un ouvert connexe  $U$  contenant 0, telle que  $\psi(0) = 0$ .

Alors  $\psi(z) = az \forall z \in U$  ou  $\psi(z) = a\bar{z} \forall z \in U$  avec  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $|a| = 1$  ( $\psi$  est une rotation ou une symétrie axiale).

*Démonstration.* Comme  $\psi$  est une isométrie locale, c'est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local (comme on l'a remarqué précédemment). De plus, on peut la considérer holomorphe, quitte à composer par la conjugaison. Il existe donc  $r > 0$  tel que  $\psi$  soit une isométrie globale de  $B(0, r)$  dans  $\psi(B(0, r))$ . Comme  $\psi(0) = 0$ , d'après les propositions sur les géodésiques et la forme de la métrique,  $|z| = |\psi(z)| \forall z \in B(0, r)$ , ainsi  $\psi(B(0, r)) \subset B(0, r)$ .

En appliquant le lemme de Schwarz, on obtient tout de suite le résultat souhaité :  $\psi(z) = az$  avec  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $|a| = 1$  sur  $B(0, r)$ .

De plus, si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe sont égales sur un ouvert non vide, elles sont égales sur l'ouvert connexe, ce qui conclut la preuve (quitte à composer par la conjugaison, on a bien les deux situations).

□

### 3.2 Le plan : $\mathbb{R}^2$

Nous avons précédemment déjà explicité certaines isométries dans  $\mathbb{R}^n$  (en tout cas nous n'avons pas montré que nous les avons toutes explicitées). Pourtant nous allons les déterminer à nouveau dans  $\mathbb{R}^2$ , afin d'illustrer l'efficacité des méthodes d'analyse complexe dans le cadre de variétés de dimension 2. On considérera donc  $\mathbb{R}^2$  comme  $\mathbb{C}$ .

Afin de faire cela, il faut montrer deux résultats simples (que l'on condense dans la proposition suivante).

**Proposition 9.** *La conjugaison complexe  $\sigma$  ( dans sa « version  $\mathbb{R}^2$  » ) et les translations sont des isométries globales de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Démonstration.* On a vu précédemment que :  $\sigma'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \forall x \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi :  ${}^t\sigma'\sigma' = Id$ .

Soit  $\tau_{a,b}(x; y) = (x - a; y - b) \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$  et avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , la translation de vecteur  $(a; b)$ .

On a clairement  $\tau'_{a,b} = Id$ , donc :  ${}^t\tau'_{a,b}\tau'_{a,b} = Id$ .

De plus la conjugaison et la translation sont clairement des bijections. □

Passons maintenant à la caractérisation des isométries. Pour cela rappelons un théorème bien connu d'analyse complexe, le théorème de Liouville.

**Théorème 1.** *Si  $f$  est une fonction holomorphe bornée, alors elle est constante.*

**Proposition 10.** *Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une isométrie globale de  $\mathbb{R}^2$  (on se permet toujours la confusion entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ ). On a alors :*

$$\exists a, b \in \mathbb{C} \text{ avec } |a| = 1, \text{ tels que } \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b \text{ ou } \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a\bar{z} + b$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{R}^2$ . Quitte à composer par la conjugaison complexe, on peut poser  $f$  holomorphe. Quitte à composer par une translation, on peut poser  $f(0) = 0$ . Par les résultats précédents, on ne compose que par des isométries, la fonction qui respecte les conditions ci dessus demeure donc une isométrie.

Montrons  $|f(z)| = |z| \forall z \in \mathbb{C}$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $\gamma(t) = tz \forall t \in [0; 1]$ . On a montré que  $\gamma$  était une géodésique (la seule à reparamétrage près) entre 0 et  $z$ . De plus,  $f$  est une isométrie donc l'image d'une géodésique par  $f$  est une géodésique. Dans ce cas, c'en est une entre 0 et  $|f(z)|$ , dont on connaît aussi la longueur par un résultat précédent (proposition 1) :  $L(f \circ \gamma) = L(\gamma) = |z| = |f(z)|$ , ce qui montre le résultat souhaité.

De plus  $f$  est holomorphe, il existe donc une suite  $(a_n)_n \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que :  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \forall z \in \mathbb{C}$  ( $a_0 = f(0) = 0$ ).

Ainsi la fonction :  $h(z) = \frac{f(z)}{z} \forall z \in \mathbb{C}$  est bien définie et holomorphe. De plus :  $\forall z \in \mathbb{C}, |h(z)| = 1$ . Ainsi, par le théorème de Liouville,  $h$  est constante. Donc :  $\forall z \in \mathbb{C}, h(z) = a$  avec  $|a| = 1$ .

En recomposant par la conjugaison et la translation (si nécessaire) on obtient bien :

$$\exists a, b \text{ avec } |a| = 1, \text{ tels que } \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b \text{ ou } f(z) = a\bar{z} + b$$

□

On remarque que cela correspond bien à ce que nous avons montré pour le cas  $\mathbb{R}^n$ . On peut même donner explicitement la vision  $\mathbb{R}^2$ , qui serait de dire que :

—  $a$  avec  $|a| = 1$  correspond à une rotation du plan

- L'ajout de  $b$  correspond à une translation du vecteur  $(Re(b); Im(b))$
- La possibilité de composer par la conjugaison correspond aux symétries

De plus, on a déjà explicité les géodésiques dans  $\mathbb{R}^n$ , mais on pourrait utiliser la méthode décrite précédemment. Il suffirait de se ramener en 0 pour obtenir la géodésique comme segment de droite et retranslater afin d'observer ce qui advient de la géodésique. Elle restera un segment de droite.

### 3.3 Le disque de Poincaré : $\mathbb{D}$

Dans ces deux dernières parties, on procédera de manière similaire dans des variétés différentes. Tout d'abord, on essaiera de trouver une isométrie similaire à la translation dans  $\mathbb{R}^2$ , qui permette de ramener un point choisi au préalable en 0. On utilisera ensuite le lemme de Schwarz afin de montrer que l'on a bien explicité toutes les isométries. Plus précisément, il permettra de montrer que toute isométrie sur un ouvert de la variété est en fait une restriction des isométries que l'on aura explicité auparavant à cet ouvert. Ensuite, on déterminera les géodésiques par la méthode décrite précédemment (on se ramène en 0 par une isométrie, point à partir duquel on sait exprimer les géodésiques).

On va donc tout de suite considérer les isométries lues dans les cartes (tout en continuant de voir  $\mathbb{R}^2$  en version  $\mathbb{C}$  afin d'appliquer les résultats d'analyse complexe).

On va chercher des isométries de la forme  $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Le choix de cette forme peut paraître arbitraire, mais on peut se dire que l'on raisonne par analogie avec ce que l'on fait dans le cadre de la projection stéréographique dans la partie suivante, où une piste d'interprétation sera donnée.

La fonction  $\phi$  est de plus une isométrie locale (pour la métrique du disque de Poincaré décrite précédemment), on sait donc qu'elle est holomorphe (à conjugaison prêt) et,

$$\forall z \in \mathbb{D} : {}^t\phi'(z)\phi'(z) = \frac{h(|z|^2)}{h(|\phi(z)|^2)} Id \quad (\text{ici } h(|z|^2) = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2})$$

La dernière condition que l'on impose à  $\phi$ , qui en fait une « translation », est la suivante. Soit  $z_0 \in \mathbb{D}$ , on impose :  $\phi(z_0) = 0$

On va donc essayer de trouver des conditions sur  $a, b, c$  et  $d$ , afin que l'on ait bien une isométrie.

Tout d'abord, remarquons que  $\phi'(z)$  peut être vu comme un nombre complexe (c'est même de là que l'on tire les relations de Cauchy-Riemann) tel que dans sa notation matricielle :

$$\phi'(z) = \begin{pmatrix} Re(\phi'(z)) & -Im(\phi'(z)) \\ Im(\phi'(z)) & Re(\phi'(z)) \end{pmatrix}$$

Ainsi on a clairement :  ${}^t\phi'(z)\phi'(z) = |\phi'(z)|^2 Id$ .

Par conséquent, d'après l'égalité donnée par le caractère isométrique de  $\phi$  :  $|\phi'(z)|^2 = \frac{h(|z|^2)}{h(|\phi(z)|^2)}$ .

Par dérivation usuelle, on obtient :  $|\phi'(z)|^2 = \frac{|ad - bc|^2}{|cz + d|^4}$  (on a  $|ad - bc| \neq 0$  sinon  $\phi$  serait constante).

Ceci nous donne par simple réinjection de cette expression dans l'égalité précédente et quelques calculs élémentaires :  $|ad - bc|^2(1 - |z|^2)^2 = (|az + b|^2 - |cz + d|^2)^2$ .

On développe le membre de gauche, ce qui permet d'accéder au système :

$$\begin{cases} |ad - bc|^2 = (|a|^2 - |c|^2)^2 = (|b|^2 - |d|^2)^2 \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \end{cases}$$

L'étape suivante est de développer  $|ad - bc|^2$  afin d'utiliser les égalités que l'on vient d'obtenir. On obtient alors deux résultats supplémentaires :  $|a|^2 + |b|^2 = |d|^2 + |c|^2$  et  $|a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2$

On obtient donc un système mieux manipulable : 
$$\begin{cases} |a|^2 = |d|^2 \\ |b|^2 = |c|^2 \\ a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \end{cases}$$

De plus, on remarque que d'après l'expression de  $\phi$ , quitte à diviser au numérateur et au dénominateur par  $d$ , on peut prendre  $d = 1$ . Ainsi :  $a = e^{i\theta}$  (avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ ). La condition  $\phi(z_0) = 0$  nous donne :  $b = e^{i\theta}z_0$ . Il découle ensuite de la dernière égalité du système :  $c = -\bar{z}_0$ .

On obtient finalement :

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Le raisonnement mené étant un raisonnement par équivalence, on a automatiquement la réciproque.

Pourtant il faut aussi ici trouver sous quelle condition  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ . Dans un premier temps, il est clair qu'une condition nécessaire à ce que ce soit bien une telle bijection est que :  $z_0 \in \mathbb{D}$  (sinon  $\phi(0) \notin \mathbb{D}$ ). Montrons qu'alors  $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  c'est à dire que :  $\forall z \in \mathbb{D} : |\phi(z)|^2 < 1$ .

Ainsi, soient  $z, z_0 \in \mathbb{D} : |z - z_0|^2 - |1 - \bar{z}_0 z|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 1 - |z|^2 |z_0|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |z_0|^2) < 0$ . On a donc bien  $\phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Il faut maintenant montrer que l'expression de  $\phi$  est inversible pour tout  $z, z_0 \in \mathbb{D}$ . On voit par un calcul simple que c'est bien le cas et donc que  $\phi$  est bien une bijection de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ , avec :

$$\phi^{-1}(y) = e^{-i\theta} \frac{y + e^{i\theta} z_0}{1 + e^{-i\theta} \bar{z}_0 y}$$

Ainsi il suffit que  $z_0$  soit dans  $\mathbb{D}$  pour avoir une bijection de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$ .

Montrons maintenant que toutes les isométries du disque de Poincaré s'écrivent sous la forme donnée ci-dessus (à conjugaison près).

**Proposition 11.** *Toute isométrie locale sur un ouvert connexe  $V$  du disque de Poincaré est de la forme :*

$$\psi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad \forall z \in V \quad \text{ou} \quad \psi(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - z_0}{1 - \bar{z}_0 \bar{z}} \quad \forall z \in V$$

*Démonstration.* Soit  $\psi$  une isométrie locale du disque de Poincaré sur un ouvert connexe  $V \subset \mathbb{D}$  contenant le point  $z_1 \in \mathbb{D}$ . Quitte à composer par l'isométrie :  $\psi_1(z) = \frac{z - \psi(z_1)}{\psi(z_1)z - 1} \quad \forall z \in \mathbb{D}$ , on a par la proposition 8 :

$$\psi_1 \circ \psi(z) = e^{i\theta} z \quad \forall z \in V \quad (\text{avec } \theta \in [0; 2\pi[)$$

Ainsi,  $\psi(z) = \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi(z) = \frac{e^{i\theta} z - \psi(z_1)}{1 - \psi(z_1) e^{i\theta} z} \quad \forall z \in V$ . Ainsi on a bien une expression de la forme indiquée précédemment (à conjugaison près).  $\square$

Il découle de cette proposition une suivante qui traite des géodésiques.

**Proposition 12.** *Soient  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathbb{D}$ . A reparamétrage près, la géodésique entre ces deux points s'exprime par :*

$$\gamma(t) = \frac{t(z_2 - z_1) + z_1(1 - \bar{z}_1 z_2)}{1 - \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 t(z_2 - z_1)}, \quad \forall t \in [0; 1]$$

*Démonstration.* Notons  $\psi_{z_1}$  l'isométrie qui ramène  $z_1$  en 0 :  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $\psi_{z_1}(z) = \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$  et  $\psi_{z_1}^{-1}(z) = \frac{z+z_1}{1+\bar{z}_1 z}$ . Notons  $\gamma$  la géodésique entre  $z_1$  et  $z_2$ . On sait que  $\psi_{z_1} \circ \gamma(t) = t\psi_{z_1}(z_2) \quad \forall t \in [0; 1]$  (géodésique entre 0 et  $\psi_{z_1}(z_2)$ ).

Ainsi :

$$\gamma(t) = \psi_{z_1}^{-1} \circ \psi_{z_1} \circ \gamma(t) = \frac{t(z_2 - z_1) + z_1(1 - \bar{z}_1 z_2)}{1 - \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 t(z_2 - z_1)}, \quad \forall t \in [0; 1]$$

□

On peut de plus exprimer explicitement la distance entre deux points.

**Proposition 13.** *Dans le disque de Poincaré, la distance entre deux points  $z_1$  et  $z_2$  s'exprime par :*

$$d(z_1; z_2) = 2 \tanh^{-1} \left( \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \right)$$

*Démonstration.* A nouveau, notons  $\psi_{z_1}$  l'isométrie qui ramène  $z_1$  en 0 :  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $\psi_{z_1}(z) = \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$ . Comme  $\psi_{z_1}$  est une isométrie :  $d(z_1; z_2) = d(0; \psi_{z_1}(z_2))$ .

Ainsi :

$$d(z_1; z_2) = \int_0^1 |\psi_{z_1}(z_2)| \frac{2}{1 - t^2 |\psi_{z_1}(z_2)|^2} dt = \int_0^{|\psi_{z_1}(z_2)|} \frac{2}{1 - u^2} du = \ln \left( \frac{1 - |\psi_{z_1}(z_2)|}{1 + |\psi_{z_1}(z_2)|} \right)$$

Finalement :

$$d(z_1; z_2) = 2 \tanh^{-1} \left( \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \right)$$

□

A propos des isométries explicitées ci-dessus, on peut montrer qu'elles sont la composition d'une similitude, d'une inversion et d'une autre similitude. La géodésique entre 0 et un autre point du disque est un segment. Or l'image d'un segment par une similitude est un segment, l'image d'un segment par une inversion est un arc de cercle, et l'image d'un arc de cercle par une similitude est un arc de cercle. Il est donc possible par ce moyen (on ne le fera pas ici) de montrer que la géodésique entre deux points quelconques (différents de 0) du disque de Poincaré est un arc de cercle. On caractérise la géodésique en ajoutant que cet arc de cercle est inclus dans un cercle orthogonal au cercle de rayon 1 qui délimite  $\mathbb{D}$ .

### 3.4 La projection stéréographique

Les raisonnements menés dans cette partie seront pour beaucoup très similaires à la ceux de la partie précédente. On passera donc assez rapidement sur certaines preuves, que l'on pourra calquer de celles de la partie précédente.

On cherchera une fois de plus une fonction de la forme  $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

A nouveau, le choix de cette forme peut sembler arbitraire, mais on verra par la suite comment on aurait pu en avoir une intuition auparavant. La première idée de cette intuition est de se dire que si cette isométrie est lue dans la carte associée à l'ouvert  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  (avec  $N$  le pôle nord),  $\phi(N)$  est d'abord l'infini, et est ramené en un point (ici  $\frac{a}{c}$ ), tandis qu'un autre point (ici  $\frac{-d}{c}$ ) est envoyé à l'infini, à l'ancienne place du pôle nord. On pressent en fait déjà que l'on va avoir affaire aux rotations de la sphère plongée dans  $\mathbb{R}^3$ ...

La fonction  $\phi$  est une isométrie locale (pour la métrique de la projection stéréographique), on sait donc qu'elle est holomorphe (à conjugaison près) et,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} : {}^t\phi'(z)\phi'(z) = \frac{h(|z|^2)}{h(|\phi(z)|^2)} Id \quad (\text{ici } h(|z|^2) = \frac{4}{1+|z|^2})$$

On impose la condition de « translation » à  $\phi$  : soit  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ , on impose :  $\phi(z_0) = 0$ .

On va à nouveau essayer de trouver des conditions sur  $a, b, c$  et  $d$ , afin que  $\phi$  soit une isométrie.

Comme précédemment :  ${}^t\phi'(z)\phi'(z) = |\phi'(z)|^2 Id$ .

Par conséquent  $\phi : |\phi'(z)|^2 = \frac{h(|z|^2)}{h(|\phi(z)|^2)}$ .

On a encore :  $|\phi'(z)|^2 = \frac{|ad-bc|^2}{|cz+d|^4}$  (avec  $|ad-bc| \neq 0$  sinon  $\phi$  serait constante).

Ceci nous donne cette fois par réinjection de cette expression dans l'égalité précédente et quelques calculs simples :  $|ad-bc|(1+|z|^2) = |az+b|^2 + |cz+d|^2$ .

En développant le membre de gauche, on d'accède au système : 
$$\begin{cases} |ad-bc| = |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = 0 \end{cases}$$

L'étape suivante est, comme pour le disque de Poincaré, de développer  $|ad-bc|^2$  et de se servir des égalités ci-dessus. On obtient alors le résultat :  $|a|^2 + |b|^2 = |a|^2 + |c|^2$

On obtient donc le système : 
$$\begin{cases} |a|^2 = |d|^2 \\ |b|^2 = |c|^2 \\ a\bar{b} + c\bar{d} = 0 \end{cases}$$

De plus, d'après l'expression de  $\phi$ , quitte à diviser au numérateur et au dénominateur par  $d$ , on peut prendre  $d = 1$ . Ainsi :  $a = e^{i\theta}$  (avec  $\theta \in [0; 2\pi[)$ ).

La condition  $\phi(z_0) = 0$  implique :  $b = e^{i\theta}z_0$ . Il découle ensuite de la dernière égalité du système :  $c = \bar{z}_0$ .

On obtient finalement :

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-1}{\bar{z}_0} \right\}$$

Le raisonnement mené étant à nouveau un raisonnement par équivalence, on a la réciproque. De plus, il suffit ici de montrer que l'isométrie est inversible pour montrer que c'est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-1}{z_0} \right\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_0} \right\}$ . C'est bien le cas et :

$$\phi^{-1}(y) = \frac{e^{-i\theta}y + z_0}{1 - e^{-i\theta}y\bar{z}_0} \quad \forall y \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{e^{i\theta}}{\bar{z}_0} \right\}$$

L'interprétation graphique que l'on peut avoir de ces isométries est assez claire. Les rotations du plan représentées par le facteur  $e^{i\theta}$  dans l'expression de  $\phi$  représentent les rotations de la sphère plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Le reste est totalement déterminé par le choix du point que l'on décide d'envoyer sur 0 (c'est à dire sur le pôle sud si on considère que l'on lit toujours dans la même carte). C'est une rotation orthogonale à celle décrite par  $e^{i\theta}$ . On peut bien visualiser le fait que toute rotation de la sphère est une composition de ces deux types de rotations.

Comme précédemment, on a par cette expression explicité toutes les isométries de la sphère (à conjugaison près). La preuve suit exactement le schéma de celle qu'on a faite rigoureusement dans la partie sur le disque de Poincaré (on ne la fera pas ici).

**Proposition 14.** *Toute isométrie locale sur un ouvert  $V$  de la sphère lue dans les cartes (dans le cadre de la projection stéréographique) est de la forme :*

$$\psi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1} \quad \forall z \in V \quad \text{ou} \quad \psi(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - z_0}{\bar{z}_0 \bar{z} + 1} \quad \forall z \in V$$

De plus, on exprime la distance et les géodésiques, par un raisonnement en tous points similaire.

**Proposition 15.** *Soient  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathbb{D}$ . A reparamétrage près, la géodésique entre ces deux points s'exprime par :*

$$\gamma(t) = \frac{t(z_2 - z_1) + z_1(1 + \bar{z}_1 z_2)}{1 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 t(z_2 - z_1)}, \quad \forall t \in [0; 1]$$

*La distance entre ces deux points s'exprime par :*

$$d(z_1; z_2) = 2 \tan^{-1}(|\psi_{z_1}(z_2)|) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{|z_2 - z_1|}{|1 + \bar{z}_1 z_2|} \right)$$

Comme dans le disque de Poincaré, les géodésiques correspondent à des arcs de cercles. De plus, représentée sur la sphère plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , une géodésique entre deux points correspond à un arc de cercle le plus court les reliant, inclus dans un grand cercle de la sphère tel que les deux points appartiennent au grand cercle (la géodésique est unique si les points ne sont pas aux antipodes, il y en a un nombre infini sinon).

On peut de plus avoir une interprétation graphique de la distance entre le pôle sud et un autre point (différent du pôle nord) dans la carte où l'on considère la sphère privée du pôle nord. En effet, on observe que la distance peut être lue comme un angle, et plus particulièrement comme l'angle entre le vecteur (tridimensionnel et unitaire) correspondant au point et le vecteur (tridimensionnel et unitaire) correspondant au pôle sud. Ceci correspond bien à l'interprétation graphique des géodésiques indiquée ci-dessus.

## Conclusion

On a pu, grâce aux outils de l'analyse complexe, décrire précisément certaines propriétés des variétés riemanniennes de dimension 2 fondamentales que sont la sphère (dans le cadre de la projection stéréographique) et le disque de Poincaré. Pourtant, cette utilisation de l'analyse complexe semble difficilement généralisable à des dimensions supérieures, car on utilise sans cesse le fait que  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$  soient isomorphes. Ainsi, bien que la manière dont nous avons abordé les variétés dans la première partie soit générale, il existe un tout autre vocabulaire que celui de l'analyse complexe pour travailler sur les isométries et les géodésiques (par exemple) en dimension supérieure.

Il y a de plus tout un aspect de variétés de dimension 2 que nous n'avons pas traité dans le cadre de ce mémoire, qui renvoie à la notion de pavage du plan. En effet, on peut voir les changements de cartes comme des éléments d'un groupe de difféomorphismes, par lesquels on quotienterait le plan. Ainsi, dans le cadre du tore plat décrit précédemment, il suffirait de voir le plan comme quadrillé, ou l'on ne considérerait plus les points mais des classes d'équivalence de points : deux points sont équivalents si ils sont au même endroit dans "leur" carré. On a donc quotienté le plan par un groupe engendré par deux translations.

Ainsi, la notion de variété, dont nous avons ici simplement abordé un infime aspect, est extrêmement fertile. A l'origine (entre autres) des mathématiques modernes, elle est également centrale dans la théorie de la relativité développée par Einstein il y a plus d'un siècle, et continue d'alimenter, directement ou indirectement, un renouvellement constant dans le domaine de la connaissance.