Baptiste Calot

Démonstration du Théorème de John

Mémoire d'initiation à la recherche

Sous la direction de **Joseph Lehec**

Cycle **P**luridisciplinaire d'**E**tudes **S**upérieures
Paris **S**ciences et **L**ettres
Troisième année (L3)
Juin 2018

Table des matières

Introduction

Mon mémoire consiste à démontrer un résultat fondamental de la géométrie des corps convexe, le théorème de John. Il s'agit d'un théorème démontré par le mathématicien Fritz John en 1948. Un corps convexe est un sous-ensemble compact, convexe et d'intérieur non vide de l'espace euclidien. Il s'avère que la géométrie des corps convexes est une discipline très féconde qui établit de nombreux ponts entre différentes théories ou branches des mathématiques comme l'analyse, la géométrie ou encore les probabilités. Cette discipline est en plein essor depuis ces quarante dernières années.

Pour préciser un peu les choses, le théorème de John regroupe deux résultats.

Le premier, démontré indépendamment par Charles Loewner affirme que dans un corps convexe donné, il existe un unique ellipsoïde de volume maximal. Pour se fixer les idées, un ellipsoïde en deux dimensions est une ellipse. Le second résultat, élaboré par John donne une condition nécessaire et suffisante pour que via une transformation affine d'un corps convexe donné, l'ellipsoïde de volume maximal soit la boule unité. Ce résultat possède beaucoup de conséquences importantes.

1 Présentation du théorème de John

1.1 Quelques définitions

Définition 1 (Corps convexe)**.** *Un corps convexe est un ensemble compact, convexe et non vide.*

Définition 2 ($\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$)**.** *. On définit la boule unité en dimension n par* $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \|x\|_2 \leq 1\}$

Définition 3 (Première définition de l'ellipsoïde)**.** *On définit un ellipsoïde grâce à une forme quadratique définie positive q :* $\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leqslant 1\}$.

Définition 4 (Deuxième définition de l'ellipsoïde)**.** *On définit un ellipsoïde par* $\mathscr{E} = \{Ax,\ A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}},\ A\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}$.

Définition 5 (Ellipsoïde de John)**.** *On appelle ellipsoïde de John, l'unique ellipsoïde de volume maximal contenu dans le corps convexe K.*

Proposition 1. *Les deux définitions précédentes sont équivalentes.*

Démonstration. Notons qu'à toute forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, on peut associer une matrice symétrique définie positive Q telle que $q(X) =^t XQX \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$.

Soit q une forme quadratique et $\mathscr{E}$ l'ellipsoïde donné alors par la définition 1. Soit $Q \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R})$ la matrice associée à q.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \{X,\ \ q(X) \leqslant 1\} \\
&= \{X,\ \ {}^tXQX \leqslant 1\} \\
&= \{Q^{-1/2}Y,\ \ {}^tYY \leqslant 1\} \quad \text{en posant} \ \ Y = Q^{1/2}X,\ \ Q \ \ \text{étant inversible et symétrique car dans} \ \ \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}) \\
&= \{Q^{-1/2}Y,\ \ \|Y\|_2^2 \leqslant 1\} \\
&= \{Q^{-1/2}Y,\ \ Y \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\} \\
&= Q^{-1/2}\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}
\end{aligned}$$

On obtient donc une matrice $A = Q^{-1/2} \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathscr{E} = A\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$.

Réciproquement, si $\mathscr{E}$ est définie par $\mathscr{E} = A\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ où $A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R})$, alors en notant q la forme quadratique associée à A^{-2}, $\mathscr{E}$ peut s'écrire sous la forme $\mathscr{E} = \{X,\ \ q(X) \leqslant 1\}$. □

- Remarque : Il est en fait suffisant de prendre $A \in GL_n(\mathbb{R})$ pour définir l'ellipsoïde car on pourra toujours se rapporter ensuite à une matrice symétrique définie positive.

  En effet, $\mathscr{E} = \{Ax,\ A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}},\ A\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\} = \{y, A^{-1}y \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\} = \{y, \langle A^{-1}y, A^{-1}y\rangle \leq 1\} = \{y, \langle (AA^t)^{-1}y, y\rangle \leq 1\}$. $(AA^t)^{-1}$ est une matrice symétrique positive. $\langle (AA^t)^{-1}y, y\rangle$ peut donc être associé à une forme quadratique positive et à fortiori définie (car sinon on verra que le volume de l'ellipsoïde vaut 0). Finalement on peut alors se rapporter à l'étude qui précède pour définir une nouvelle matrice A qui sera symétrique définie positive et tel que l'on ait $\mathscr{E} = \{Ax,\ A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}},\ A\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}$.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité de l'ellipsoïde de volume maximal

- Le premier résultat démontré par John est que chaque corps convexe de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ contient un unique ellipsoïde de volume maximal.

1.3 Caractérisations de John

- Le second résultat est que $\mathcal{B}_2^n$, la boule unité de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ est l'ellipsoïde de volume maximal du corps convexe, que l'on appellera aussi l'ellipsoïde de John si et seulement si les conditions (a), (b) et (c) suivantes sont réunies.

  Soit K le corps convexe.

  (a) $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}$

  (b) $\exists\, m \geq n$ tel que $\exists\,(u_i)_{[\![1,m]\!]} \in (\partial\, \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}})^m \cap (\partial\, \mathrm{K})^m$ et $(c_i)_{[\![1,m]\!]} \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$

  (c) $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \left(\sum_{i=1}^n c_i \langle x, u_i\rangle^2\right) = |x|^2$.

  Remarque : Pour le cube en dimension n, il est clair que la boule unité est l'ellipsoïde de John.

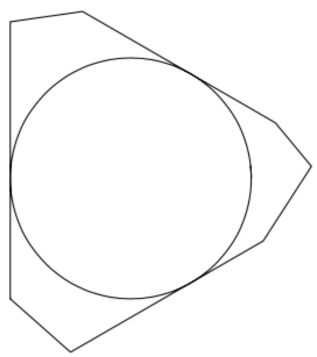

Figure 1 – Ellipsoïde 1

Ellipsoïde contenu dans un corps convexe : il s'agit de la boule unité. On distingue trois points de contacts.

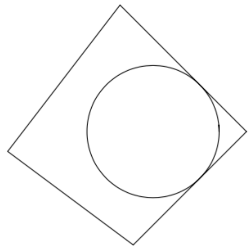

Figure 2 – Ellipsoïde 2

La condition (a) garantie que les points de contacts ne sont pas liés sur un seul côté de la sphère. Si il le sont, ainsi que l'illustre l'image, on va pouvoir un petit peu bouger la boule des points de contacts et la gonfler pour obtenir une boule de volume plus important (à fortiori cette boule n'était pas l'ellipsoïde de John).

- On se place dans $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Pour simplifier un peu les manipulations algébriques et donc la démonstration, on considère un corps convexe symétrique. On a alors que (b) est redondante puisqu'il suffit de prendre u_i et $-u_i$ avec la moitié des poids à chaque fois pour obtenir 0.
- On s'intéressera donc à l'équivalence entre d'une part le fait que $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ soit l'ellipsoïde de John de K et d'autre part le fait que les conditions (a) et (c) soient réunies.
- Etant donné la forme du corps convexe K ainsi que de sa "taille", il sera nécessaire de procéder à une transformation affine de ce dernier afin que l'ellipsoïde de John soit la boule unité. En fait, on pourra toujours rapporter l'ellipsoïde de John à la boule unité via une transformation affine du corps convexe K.

2 Démonstration du théorème de John

2.1 Démonstration d'une équivalence importante

- $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle^2 = |x|^2$ (1)
- $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle u_i = x$ (2)

Montrons que (1) est équivalent à (2).

$\Leftarrow$) Par linéarité et homogénéité du produit scalaire,nous avons que,

$$|x|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle u_i, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle \langle u_i, x\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, nos avons que,

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle^2.$$

$\Rightarrow$) $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, montrons que $x = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle u_i$

Remarque 1. *Cette inégalité se réecrit matriciellement comme $Id = \sum c_i u_i \otimes u_i$, avec $\otimes$ le produit tensoriel.*

Montrons que $Id = \sum c_i \otimes u_i$ si $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle^2 = |x|^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle^2 &= \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i\rangle \langle x, u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \langle \langle x, u_i\rangle x, u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, \langle x, u_i\rangle u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i \otimes u_i x, x\rangle \\
&= |x|^2
\end{aligned}$$

Soit $A := \sum c_i u_i \otimes u_i$. A est symétrique,

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \langle Ax, x\rangle = |x|^2 \Leftrightarrow A = Id$

$\Leftarrow$) Est immédiat.

$\Rightarrow$) D'après l'inégalité du parallélogramme on sait que

$$\begin{aligned}
4\langle Ax, y\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\
&= |x+y|^2 - |x-y|^2 = 4\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

On a donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \langle Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Grâce à cela nous avons $\forall y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$,

$$\langle Ax - x, y\rangle = 0 \Rightarrow Ax = x.$$

Finalement nous avons $A = Id$.

Nous avons démontré l'équivalence.

2.2 Preuve de l'existence

Pour cette preuve nous aurons besoin de la formule du changement de variable dont la démonstration se trouve en annexe.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, alors nous avons

$$\lambda\left(A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\right) = det(A)\lambda\left(\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\right) = det(A)\mathcal{V}_n,$$

où $\mathcal{V}_n$ est le volume de la boule unité en dimension n.

Soit K le corps convexe.

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}), A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}$. On va montrer que $\mathcal{A}$ est compact.

Le déterminant est une fonction continue. Il atteint ses bornes sur un compact donc admet un maximum sur $\mathcal{A}$. Or comme vu précedemment, $\lambda\left(\mathscr{E}\right) = \lambda\left(A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\right) = det(A)\mathcal{V}_n$.

Donc on a bien un ellipsoïde contenu dans K de volume maximal.

-Remarque : À la page 5 de "An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry" (voir bibliographie), il est expliqué succintement comment trouvé $\mathcal{V}_n$. On trouve $\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ que l'on peut ensuite approximer par la formule de Stirling pour des valeurs de n importante : $\Gamma(\frac{n}{2}+1) \sim \sqrt{2\pi}exp(-n/2)(\frac{n}{2})^{(n+1)/2}$ donc $\mathcal{V}_n \sim \sqrt{\frac{2\pi e}{n}}^{n}$ en grande dimension.

- Demonstration de la compacité de $\mathcal{A}$

Montrons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ est fermé puis dans un second que $\mathcal{A}$ est borné.

(a) Fermeture de $\mathcal{A}$:
Soit $(A_k)_k \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, tel que $A_k \underset{k}{\longrightarrow} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A_k\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset K$.
Soit $x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$, $(A_kx)_k \in K^{\mathbb{N}}$, $A_kx \underset{\mathrm{k}}{\longrightarrow} Ax \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Par compacité de K, il existe une extractrice telle que $A_{\phi(k)}x \underset{\mathrm{k}}{\longrightarrow} y \in K$.
On a donc $Ax = y$ et finalement $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, Ax \in K$.

Il nous faut montrer que $A \in Sn^+$.
Soit $A_k \in Sn^+$ tel que $A_k \underset{\mathrm{k}}{\longrightarrow} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a que ${}^tA_k \underset{\mathrm{k}}{\longrightarrow} {}^tA$. Or ${}^tA_k = {}^tA$ donc par unicité de la limite, $A =^t A$ et finalement A est symétrique.

On suppose maintenant que $A_k > 0$. Par passage à la limite avec inégalité large, $A > 0$.

On peut enfait considérer que A est également définie dans notre cas, car si ça n'est pas le cas, son déterminant vaut 0 et donc le volume de l'ellipsoïde qui est caractérisé par A vaut également 0, ce qui ne nous intéresse pas ici car on se penche sur un ellipsoïde de volume maximal.

Remarque 2. *On peut affirmer ce qui précède car K est non vide et donc contient un ellipsoïde de volume non nul.*

Finalement, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On vient donc de montrer que $\mathcal{A}$ est fermé.

(b) Caractère borné de $\mathcal{A}$:
Soit $A \in \mathcal{A}$. On considère la norme opérateur sur $\mathbb{R}^n$, $\|.\|$.
$\|A\| := \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$
Or Ax est borné puisque $Ax \in K$ qui est compact. Donc $\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 < M$ avec $M \in \mathbb{R}$
Finalement, $A \in \mathcal{A}$ est également borné. On en déduit que $A \in \mathcal{A}$ est compact . On obtient ainsi l'existence de l'ellipsoïde de volume maximal.

2.3 Preuve de l'unicité

Théorème 1 (Théorème de pseudo-réduction simultané)**.** *:*

Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *et* $B \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $A = {}^tPP$ *et* $B = {}^tPdiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P$
Attention, les λ_i *ne sont pas les valeurs propres.*

Démonstration. :

On définit $A^{-1/2}$ comme étant égale à $A^{-1/2} = P_1D_1P_1^{-1}$ avec $P_1 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D_1 = diag(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2})$.
Soit D_2 la matrice diagonale composée des valeurs propres de A.
$A^{-1/2}BA^{-1/2}$ est symétrique.
Par le théorème spectral (admis), $\exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (matrice orthogonale) tel que $U^tA^{-1/2}BA^{-1/2}U = D_3$ avec D_3 une matrice diagonale.
Soit $P = A^{-1/2}U$. $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ car A est inversible et U est une matrice orthogonale.
$P^tBP = D_3$. $P^tAP = U^tA^{-1/2}AA^{1/2}U$. $A = P_1D_2P_1^{-1}$. $P^tAP = U^tP_1D_1P_1^{-1}P_1D_2P_1^{-1}P_1D_1P_1^{-1}U = U^tP_1D_1D_2D_1P_1^{-1}U = U^tP_1P_1^{-1}U = I_n$, ce qui achève la démonstration en prenant comme nouveau P, P^{-1}.

□

Lemme 1 (Stricte concavité du déterminant)**.** *Soient* $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *vérifiant* $\alpha + \beta = 1$.
Alors $det(\alpha A + \beta B) \geqslant (det(A))^\alpha (det(B))^\beta$
Et si $A \neq B$, *l'inégalité est stricte.*

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, par pseudo-réduction simultanée :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ et } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tPdiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P$$

On note $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Comme $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$. En effet, supposons $\exists r, \lambda_r \leq 0$. Soit $X = P^{-1}e_p \in \mathbb{R}^n$ avec e_p un des vecteurs de la base canonique. On a alors ${}^tXBX = \lambda_r \leq 0$. Mais dans ce cas, $B \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Ainsi :

$$(detA)^\alpha (detB)^\beta = (detP)^{2\alpha} (detP)^{2\beta} (detD)^\beta$$

Et :

$$det(\alpha A + \beta B) = (detP)^2 det(\alpha I_n + \beta D)$$

On veut alors montrer que :

$$\begin{aligned} det(\alpha I_n + \beta D) \geqslant (detD)^\beta &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geqslant \beta \sum_{i=1}^n ln(\lambda_i) \end{aligned}$$

Or, par concavité du logarithme, comme $\alpha+\beta=1$ et $\alpha,\beta \geqslant 0$:

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geqslant \alpha\, ln(1) + \beta ln(\lambda_i) = \beta ln(\lambda_i).$$

On obtient le résultat souhaité en sommant sur $i \in [\![1,n]\!]$.

Et si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1, et donc, par stricte concavité du logarithme, on obtient une inégalité stricte.

□

On définit,

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \{Ax,\ A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}},\ A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}\\
\mathscr{E}_i &= \{A_i x,\ A_i \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}},\ A_i\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}\\
\mathcal{A} &= \{A \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}),\ A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}\}.
\end{aligned}$$

Soit $t \in [0;1]$, soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$,

$$(1-t)A_1 + tA_2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{n}}^{++}(\mathbb{R}).$$

De plus, par convexité de K,

$$[(1-t)A_1 + tA_2]\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}.$$

On en déduit que $(1-t)A_1 + tA_2 \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est convexe.

Par conséquent,

$$\frac{A_1 + A_2}{2} \in \mathcal{A}\,.$$

Supposons à présent que $\lambda(\mathscr{E}_1) = \lambda(\mathscr{E}_2)$, $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont donc des ellipsoïdes de volume maximal contenus dans K, alors $det(A_1) = det(A_2)$.

Par l'inégalité de log-concavité du déterminant, montrée précédement, on a que

$$det\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) > \sqrt{det(A_1)det(A_2)} = det(A_1).$$

On en déduit donc que la matrice $\frac{A_1+A_2}{2}$ est une matrice caractérisant un ellipsoïde de volume strictement plus grand que l'ellipsoïde de volume maximal. On a donc une contradiction.

Nous en déduisons que l'ellipsoïde de volume maximal est unique.

3 Démonstration de la caractérisation de John

3.1 Première implication

Démonstration. On commence par l'implication "facile". On suppose $\exists\ m \geq n$ tel que $\exists\,(u_i)_{[\![1,m]\!]} \in (\partial\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}})^m \cap (\partial\,\mathrm{K})^m$ satisfaisant

$$\left(\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = I_n\right)$$

Autrement dit les u_i sont les points de contact entre K et la boule unité.
On a par ailleurs, $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset$ K

Soit $\mathscr{E} = \{x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-2} \langle x, e_i \rangle^2 \leq 1\}$ un ellipsoïde dans K pour une base orthonormée $(e_i)_{[\![1,m]\!]}$ et des α_i positifs.

Calculons le volume de cet ellipsoïde :
Soit A la matrice diagonale composée des α_i
$\mathscr{E} = \{x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-2} \langle x, e_i \rangle^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \forall i \in 1, ..., n, \frac{x_i}{\alpha_i} \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, A^{-1}x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\}$ avec $A = Diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. On a donc $\mathscr{E} = \{Ax \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\}$. A est inversible et représente la matrice d'une application linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Dans ce cas, on a que

$$\lambda \left(A\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\right) = det(A)\lambda \left(\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}\right) = det(A)\mathcal{V}_n,$$

où $\mathcal{V}_n$ est le volume de la boule unité en dimension n et λ la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ (voir démonstration du changement de variable en annexe).
L'objet de la démonstration est de montrer que $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$ et que le produit est égal à 1 si $\alpha_i = 1$ pour tout i.
Si c'est le cas, le volume de $\mathscr{E}$ qui est égal à $\mathcal{V}_n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ sera inférieur ou égal à $\mathcal{V}_n$.

Soit $\xi = \{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, x \in \mathscr{E}, \langle x, y \rangle \leq 1\}$, l'ellipsoïde polaire de $\mathscr{E}$. Soit $\mathcal{K} = \{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 1\}$, le corps convexe polaire de K.
Puisque $\mathscr{E} \subset$ K, si les u_i appartiennent à $\mathcal{K}$, ils appartiendront à ξ, ce que l'on souhaite montrer pour poursuivre la démonstration.

Pour montrer cela, on va utiliser un théorème extrèmement puissant qu'on réutilisera (légèrement différemment) dans la seconde implication. Ce théorème ne sera pas prouvé. Il s'agit d'une des formes géométriques du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 2. *: Forme géométrique (fermé) de Hahn-Banach.*

Soit E un espace vectoriel normé réel. Soient A et B deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe une forme linéaire continue f *sur E et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que* $A \subset \{x \in E, f(x) \leq \alpha - \epsilon\}$ *et* $B \subset x \in E, f(x) \geq \alpha + \epsilon$. *On dit que f sépare au sens strict A et B.*

Ici, l'espace vectoriel normé est $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. u_i est fermé et $int(K)$ est compact. Par ce théorème, $\forall x \in K$ et $\forall u_i$ points de contact, il existe $\phi \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}*}$ tel que $\phi(x) \leq \phi(u_i)$.

Par le théorème de Riez, il existe un unique $w \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tel que $\phi(x) = \langle w, x \rangle$.
On a donc $\langle w, x \rangle \leq \langle w, u_i \rangle$.

Soit $v := \frac{w}{\langle w, u_i \rangle}$.
On a que $\langle v, u_i \rangle = 1$ et $\langle v, x \rangle \leq 1 \forall x \in K \|v\| \leq 1$.
En effet, supposons que $\|v\| > 1$. $\frac{v}{\|v\|} \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ donc $\langle v, \frac{v}{\|v\|} \rangle = \|v\| > 1$.
Donc $\exists\ x \in \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ tel que $\langle v, x \rangle > 1$, d'où une contradiction.
On a $1 = \langle v, u_i \rangle \leq \|v\| \|u_i\| \leq \|v\|$ On a donc $\|v\| = 1$.
On obtient ainsi le cas d'égalité dans Cauchy Schwartz. $\langle v, u_i \rangle = 1 = \|v\| = \|v\| \|u_i\|$. On a donc $\|u_i\| = k\|v\|$ avec $k \in \mathbb{R}$ donc $\|u_i\| = \|v\|$ et finalement $u_i = v$.

Puisque $\langle v, x \rangle \leq 1\ \forall x \in K$, on a que $\langle u_i, x \rangle \leq 1$ et finalement $u_i \in \mathcal{K}$ donc $u_i \in \xi$.

Soit $\mathscr{S} = \{y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle y, e_i \rangle^2 \leq 1\}$ avec $(e_i)_{[\![1,n]\!]}$, la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
Il s'agit aussi de l'ellipsoïde polaire. Montrons que $u_j \in \mathscr{S}$.

Soit $x_i := \frac{\alpha_i^2 u_{j_i}}{(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 u_{j_i}^2)^{1/2}}$, les coordonnées de x dans la base canonique.

On a que $x \in \mathscr{E}$.

Puisque par hypothèse, on a que $u_j \in \xi$, $\langle u_j, x\rangle \leq 1$ et $\langle u_j, x\rangle = (\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 u_{j_i}^2)^{1/2}$.

On en déduit donc que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 u_{j_i}^2 \leq 1$ et donc que $u_j \in \mathscr{S}$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_j, e_i\rangle^2 \leq 1$ et finalement $\sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_j, e_i\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^n c_j$.

Par hypothèse, $\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n$.

En appliquant la trace à chacun des membres de l'égalité et puisque la trace est linéaire et que les u_i sont de normes 1, on obtient que $\sum_{j=1}^n c_j = n$ donc que $\sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_j, e_i\rangle^2 \leq n$.

Or la condition de John $\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n$ est équivalente à $\sum_{i=1}^n c_i \langle x, u_i\rangle^2 = |x|^2$ (montré précedemment). Donc $\sum_{j=1}^m c_j \langle e_i, u_j\rangle^2 = |e_i|^2 = 1$ pour tout i.

En appliquant le théorème Fubini positif d'inversion des sommes, on obtient ainsi que $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leq n$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leq 1$.

On applique désormais l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique (voir annexe) et on obtient que $(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leq 1$ donc $(\prod_{i=1}^n \alpha_i)^2 \leq 1$ et finalement $\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ ce qu'on souhaitait obtenir.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, si les α_i valent tous 1 alors le produit vaut 1.

Par conséquent, on a bien montré que l'ellipsoïde de John est la boule unité. La démonstration est achevée.

□

3.2 Deuxième implication

Démonstration. :

On suppose désormais que la boule unité est l'ellipsoïde de John et on veut montrer que cela engendre l'existence de m réels positifs et m points de contacts tel que $\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n$, ce qui est équivalent à dire que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = \frac{1}{n} I_n$.

Si cela est possible, en appliquant la trace à cette égalité, on obtient que $\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{n} = 1$.

Ainsi, on doit obtenir que $\frac{1}{n} I_n$ peut-être écrit comme une combinaison convexe des $u_i \otimes u_i$.

Soit T $= \{u_i \otimes u_i, u_i \in \partial \mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \cap \partial \mathrm{K}\}$.
On définit Conv(X), l'enveloppe convexe d'une partie X d'un ensemble comme étant l'intersection des convexes contenant cette partie : il s'agit du plus petit convexe qui contient X.

On peut montrer assez facilement que l'enveloppe convexe d'une partie d'un ensemble est l'ensemble des combinaisons convexes des points de cette partie.

C'est à dire que si $x \in X$ alors $x = \sum_{i=1}^p m_i x_i$ avec $x_i \in X$, p un certain entier et $m_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^p m_i = 1$.

On peut désormais définir Conv(T) $:= \{x, x = \sum_{i=1}^p m_i u_i \otimes u_i, p \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^p m_i = 1\}$

Etant donné que l'on cherche à obtenir que $\frac{1}{n} I_n$ peut-être écrit comme une combinaison convexe des $u_i \otimes u_i$, cela revient à montrer que $(\frac{1}{n} I_n) \in \ Conv(T)$.

On va procéder par contraposé :

On va supposer que $(\frac{1}{n} I_n) \notin \ Conv(T)$ et finalement montrer que sous cette hypothèse, on peut construire un ellipsoïde contenu strictement dans K qui sera différent de la boule unité mais qui sera de volume au moins aussi important, ce qui aboutira à une contradiction et montrera l'implication : si $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ est l'ellipsoïde de John de K, alors les conditions de John sont vérifiés.

- Démonstration de la compacité de T.

  Les $u_i \in \partial\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \cap \partial\,\mathrm{K}$. $\partial\,\mathrm{K}$ est compact car K est compact. $\partial\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ est compact car $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ est compact. Ainsi les u_i appartiennent à une intersection de compacts, qui est compact. $\forall i \in \{1,...m\}, u_i \otimes u_i$ est une matrice $n \times n$ composée des coefficients des vecteurs u_i qui sont tous bornés car les u_i sont bornés (car dans un compact de dimension fini).
  Ainsi, les $u_i \otimes u_i$ sont bornés.
  Ainsi, T est borné.

  Montrons que T est fermé.
  Soit $(y_{i_k})_k \in T^{\mathbb{N}}$.
  $\forall k \in \mathbb{N}, y_{i_k} = u_{i_k} \otimes u_{i_k}$ et $y_{i_k} \underset{k}{\longrightarrow} y_i \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. $(u_{i_k})_k$ est une suite d'éléments appartenant à un compact.
  Ainsi, il existe une extractrice ϕ tel que $u_{i_{\phi(k)}} \underset{k}{\longrightarrow} u_i$ un point de contact.

  Or, si un vecteur quelconque $x_k \underset{k}{\longrightarrow} x$ alors $x_k \otimes x_k \underset{k}{\longrightarrow} x \otimes x$.
  En effet, coefficient par coefficient, $(x_k \otimes x_k)_{j,m} = (x_k)_j(x_k)_m \underset{k}{\longrightarrow} (x)_j(x)_m$.
  Ainsi, $u_{i_{\phi(k)}} \otimes u_{i_{\phi(k)}} \underset{k}{\longrightarrow} u_i \otimes u_i$.
  $u_{i_{\phi(k)}} \otimes u_{i_{\phi(k)}} = y_{i_{\phi(k)}}$ qui est une sous suite de y_{i_k} donc qui converge vers la même limite y_i.
  Ainsi, $y_i = u_i \otimes u_i$ et $y_i \in T$
  On en déduit que T est fermé.

  Finalement, puisque T est fermé et borné, T est compact.

Il nous faut désormais montrer le très beau théorème de Carathéodory : pour une partie X d'un ensemble E de dimension n, Conv(X) est l'ensemble des combinaisons convexes non plus de p points de la partie X, avec p arbitraire mais de n+1 points de X.

Théorème 3 (Carathéodory)**.** *Soit $X \subset E$ un convexe. Si $dim(E) = n$, alors :*

$$Conv(X) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1}x_{n+1}, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \quad x_i \in X\}$$

Démonstration. Soit $X \subset E = \mathbb{R}^n$, et soit $x \in Conv(X)$
$\exists\ x_1, \ldots, x_m \in X, \quad x_i \neq x_j\ \forall i \neq j, \quad$ et $\quad \alpha_1, \ldots \alpha_m \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\quad$ tels que

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

Si $m \leqslant n+1$, c'est bon.

Si $m \geqslant n+1$, on va montrer qu'on peut écrire x comme une combinaison convexe de $m-1$ points parmi $x_1, \ldots, x_m$.
$x_1 - x_m, \ldots, x_{m-1} - x_m$ sont $m-1$ points non nuls, et $m-1 > n$ donc ils sont liés.

$\exists\ \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ non tous nuls tels que

$$\beta_1(x_1 - x_m) + \cdots + \beta_{m-1}(x_{m-1} - x_m) = 0$$

$$\text{i.e. } \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{m-1}x_{m-1} + (-\beta_1 - \cdots - \beta_{m-1})x_m = 0$$

En posant $\beta_m = -\beta_1 - \cdots - \beta_{m-1}$, on obtient $\beta_1, \ldots, \beta_m$ non tous nuls tels que

$$\begin{cases} \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m &= 0 \\ \beta_1 + \cdots + \beta_m &= 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda \geqslant 0,$ on pose $\alpha_i(\lambda) := \alpha_i + \lambda \beta_i$

$$\forall \lambda \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\lambda) x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \lambda \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = x$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \lambda \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Soit $\Lambda := \{\lambda \geqslant 0, \ \forall i \ \alpha_i(\lambda) \geqslant 0\}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, x s'écrit comme combinaison convexe des x_i (avec coefficient $\alpha_i(\lambda)$).

De plus, Λ est :

- non vide ($0 \in \Lambda$),
- fermé (trivialement),
- majoré
  En effet, $\sum \beta_i = 0$ et les β_i sont non tous nuls donc $\exists i$ tel que $\beta_i < 0$.
  Soit $\lambda \in \Lambda, \ \lambda = \frac{\alpha_j(\lambda}{\beta_j}) - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \ \forall j$.
  En particulier pour i : $\lambda = \frac{\alpha_i(\lambda)}{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} \leqslant -\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ car $\beta_i < 0$ et $\alpha_i(\lambda) \leqslant 0$ (puisque $\lambda \in \Lambda$)
  Donc Λ est majoré par $-\frac{\alpha_i}{\beta_i}$

Donc Λ admet un maximum $\lambda_0 \in \Lambda$.
On a $\alpha_i(\lambda_0) \geqslant 0 \ \forall i$
Si $\alpha_i(\lambda_0) > 0 \ \forall i$, alors pour ϵ petit, $\alpha_i(\lambda_0 + \epsilon) > 0 \ \forall i$, et donc $\lambda_0 < \lambda_0 + \epsilon \in \Lambda$, ce qui est absurde.
Donc $\exists i$ tel que $\alpha_i(\lambda_0) = 0$.

On peut donc écrire x comme combinaison convexe de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$, avec coefficients $\alpha_j(\lambda_0)$, qui sont au nombre de $m-1$.

□

Il nous faut maintenant montrer grâce à Carathéodory, que l'enveloppe convexe d'un compact de dimension fini est finie.

Corollaire 3.1 (De Carathéodory)**.** *Si X compact de E de dimension finie, alors $Conv(X)$ est compact.*

Démonstration. E de dimension n. Soit $(x_k)_k \in Conv(X)^{\mathbb{N}}$.

Par Carathéodory, on a :

$$\forall k \geqslant 0, \ \exists (\alpha_k^i)_i \in [0,1]^{n+1} \ \text{ avec } \ \forall k \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_k^i, \ \text{ et } \ \exists (x_k^i)_i \in X^{n+1} \ \text{ tels que } \ x_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_k^i \, x_k^i$$

X est compact donc $(x_k^1)_k$ admet une sous-suite convergente. Soit ϕ_1 une extraction et soit x^1 un élément de X tels que $x^1_{\phi_1(k)} \underset{k}{\longrightarrow} x^1$

De même $(x^2_{\phi_1(k)})_k$ admet une sous-suite convergente. Soit ϕ_2 une extraction et soit x^2 un élément de X tels que $x^2_{\phi_1 \circ \phi_2(k)} \underset{k}{\longrightarrow} x^2$

On extrait ainsi $n+1$ fois :
Soit ϕ_{n+1} une extraction et soit x^{n+1} un élément de X tels que $x^{n+1}_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_{n+1}(k)} \underset{k}{\longrightarrow} x^{n+1}$

De plus, $[0,1]$ est compact donc $(\alpha^1_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_{n+1}(k)})_k$ admet une sous-suite convergente. Soit ϕ'_1 une extraction et soit α^1 un élément de $[0,1]$ tels que $\alpha^1_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_{n+1} \circ \phi'_1(k)} \underset{k}{\longrightarrow} \alpha^1$

On extrait de même $n+1$ fois :
Soit ϕ'_{n+1} une extraction et soit α^{n+1} un élément de $[0,1]$ tels que $\alpha^{n+1}_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_{n+1} \circ \phi'_1 \circ \dots \circ \phi'_{n+1}(k)} \underset{k}{\longrightarrow} \alpha^{n+1}$

On pose $\Phi = \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_{n+1} \circ \phi'_1 \circ \ldots \circ \phi'_{n+1}$.

Alors, on a $\forall i$: $\quad x^i_{\Phi(k)} \longrightarrow x^i$ et $\alpha^i_{\Phi(k)} \longrightarrow \alpha^i$
D'où $\quad x_{\Phi(k)} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i x^i = x$

Et on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i_{\Phi(k)} = 1 \; \forall k$ donc en passant à la limite sur k, on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i = 1$. Donc $x \in Conv(X)$

Ainsi, $(x_k)_k$ admet une sous-suite qui converge dans $Conv(X)$ et donc $Conv(X)$ est compact. $\square$

On peut ainsi affirmer que Conv(T) est compact donc que Conv(T) est fermé (l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermé).

On peut ainsi utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach entre un convexe compact $\frac{I_n}{n}$ et un convexe fermé Conv(T) (l'enveloppe convexe d'un enxemble est par définition convexe). Une fois de plus on admet la démonstration de ce théorème.

Il existe donc un hyperplan de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ représenté par une forme linéaire $\phi \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}*}$ tel que $\forall t \in Conv(T), \phi(\frac{I_n}{n}) < \phi(t)$. En particulier, $\forall t \in T, \phi(\frac{I_n}{n}) < \phi(t)$, puisque évidemment, T est contenu dans Conv(T).

On va représenter ϕ par une matrice $n \times n, H = (h_{j,k})$ tel que pour tout matrice $A = (a_{j,k})$, on ait $\phi(A) = \sum_{j=1,k=1}^{n} h_{j,k} a_{j,k}$ (à nouveau il s'agit du théorème de représentation de Riez qui est admis, c'est à dire que $\forall \phi \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}*}, \exists! H, \phi(A) = \langle H, A \rangle$).

$\forall i \in 1, ...m, u_i \otimes u_i$ est symétrique. De même, $\frac{I_n}{n}$ est une matrice symétrique.

$\forall t \in T, \phi(\frac{I_n}{n}) < \phi(t) \iff \langle H, \frac{I_n}{n} \rangle < \langle H, t \rangle \iff \frac{1}{n} tr(H) < \langle Hu_i, u_i \rangle$. Or $tr(H^t) = tr(H)$.
On a donc $tr(H^t) = tr(H) < \langle Hu_i, u_i \rangle = \langle u_i, H^t u_i \rangle$.
On prend $\mathcal{H} := H + H^t$.
On obtient que $tr(\mathcal{H}) < \langle \mathcal{H} u_i, u_i \rangle$ avec $\mathcal{H}$ une matrice symétrique.
On en déduit que l'on peut supposer que H est une matrice symétrique.

Il s'avère qu'on peut conserver l'inégalité établit en ajoutant une constante à chaque coefficient diagonaux de H.
En effet, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(A) < \phi(B) \iff \forall Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Gamma(Z) := \sum (h_{j,j} + \alpha_j) Z_{j,j} + R$ avec R le reste de la somme et α_j une constante pour chaque j.
On a $\Gamma(Z) = \sum (h_{j,j} + \alpha_j) Z_{j,j} + R = \sum h_{j,j} Z_{j,j} + \sum \alpha_j Z_{j,j} + R = \phi(Z) + \alpha \sum Z_{j,j} = \phi(Z) + \alpha Tr(Z)$ avec α la matrice diagonale composée des α_j.
On a ainsi $\Gamma(A) = \phi(A) + \alpha Tr(A) = \phi(A) + \alpha Tr(B)$ dans le cas où A et B ont même trace, ce qui est le cas pour $\frac{I_n}{n}$ et $u_i \otimes u_i$ pour lesquels la trace vaut 1. $\Gamma(A) = \phi(A) + \alpha Tr(B) < \phi(B) + \alpha Tr(B) = \Gamma(B)$.
Finalement, on peut bien choisir les α_j de sorte à ce que $Tr(\Gamma) = 0$: Si $Tr(H) = w, \forall j \in 1, ..n, \alpha_j = \frac{w}{n}$ et on obtient ainsi $Tr(\Gamma) = 0$

En définitive, on peut construire une nouvelle matrice de H qui soit symétrique et dont la trace vaut 0. Mais si la trace de H vaut 0, $\phi(\frac{I_n}{n}) = 0$. On a ainsi que $\forall t \in T, \phi(t) > 0$ ce qui a toute son importance ici. Matriciellement, $\phi(t) = u_i^t H u_i > 0$.

Soit $\mathscr{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \delta > 0, x^t(I_n + \delta H)x \leq 1\}$. Pour δ suffisament petit, il s'agit d'un ellipsoïde puisque $B = (I_n + \delta H)$ est la matrice d'une forme quadratique symétrique qui sera positive (les coefficients de H négatifs seront écrasés par δ). À mesure que δ tend vers 0, $\mathscr{E}_\delta$ tend vers $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$. Soit u_i, un point de contact entre K et la boule unité. $u_i^t(I_n + \delta H)u_i = 1 + \delta u_i^t H u_i > 1$ pour δ suffisament petit.Donc $u_i \notin \mathscr{E}_\delta$. Désormais considérons x sur le bord de K mais pas un point de contact (donc pas sur le bord de la boule unité). Etant donné que la boule unité est contenu dans K, la norme de x est supérieure à un (car le point appartient au

bord de K). $x^t(I_n+\delta H)x = \|x\|^2 + \delta x^t Hx > 1 + \delta x^t Hx$. À nouveau, pour un δ suffisament petit, $x \notin \mathscr{E}_\delta$. Si on prend δ suffisament petit pour que tous les points du bord de K n'appartiennent pas à $\mathscr{E}_\delta$ alors on en déduit $\mathscr{E}_\delta$ est strictement contenu dans K car aucun points de cet ensemble ne touche la bordure de K. Il nous faut maintenant étudier le volume de $\mathscr{E}_\delta$.
Soit $(\nu_i)_{[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de la matrice symétrique $I_n + \delta H$. Le volume de $\mathscr{E}_\delta$ est donné par $\frac{\mathcal{V}_n}{\prod_{i=1}^n \nu_i^{1/2}}$ (se montre exactement de la même façon que précedemment). Puisque la trace de H vaut 0, $\sum_{i=1}^n \nu_i = Tr(I_n+\delta H) = n$. Ainsi, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \nu_i \leq 1$ et à nouveau, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient que $\prod_{i=1}^n \nu_i^{1/n} \leq 1$ et finalement que $\prod_{i=1}^n \nu_i \leq 1$. On a ainsi que le volume de $\mathscr{E}_\delta$ est au moins celui de la boule unité : si il est plus important on obtient une contradiction avec l'hypothèse que la boule unité est l'ellipsoïde de John et si le volume est le même que celui de la boule unité, on a une contradiction avec l'unicité de l'ellipsoïde de John contenu dans un corps convexe. On en déduit que la boule unité n'est pas l'ellipsoïde de John et finalement, l'implication est démontrée !

□

En définitive, on a montré l'équivalence entre le fait que $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$ soit l'ellipsoïde de John de K (symétrique) et le fait que

(a) $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset \mathrm{K}$

(b) $\exists\, m \geq n$ tel que $\exists\,(u_i)_{[\![1,m]\!]} \in (\partial\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}})^m \cap (\partial\,\mathrm{K})^m$ et $(c_i)_{[\![1,m]\!]} \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\left(\sum_{i=1}^n c_i \langle x, u_i\rangle^2\right) = |x|^2$.

4 Démonstrations Annexes

- Inégalité arithmético-géométrique

  La moyenne géométrique de n réels strictement positifs $x_1, ..., x_2$ est inférieure à leur moyenne arithmétique : $(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n}{n}$ avec égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n$.
  Démonstration : On applique le logarithme à cette inégalité et on obtient $\frac{\sum_{i=1}^n}{l} n(x_i)n \leq ln(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ ce qui est le cas par stricte concavité du logarithme. Le cas d'égalité provient du fait de la stricte concavité du logarithme et on obtient $x_i = x_i$

-

  Théorème 4. *Formule du changement de variable*

  Soit $T : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$: une application linéaire et inversible (que l'on peut associer A, la matrice qui caractérise notre ellipsoïde) et B un borélien de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

  Alors $\lambda(T(B)) = |detT|\lambda(B)$

  Démonstration. :
  On pose $\mathscr{L}(B) = \lambda(T(B))$.

  - $\mathscr{L}$ est une mesure car T est mesurable.
  - $\mathscr{L}$ est finie sur les compacts car si K est compact, alors T(K) aussi et donc $\lambda(T(K)) < +\infty$ puisque la mesure de Lebesgue est finie sur les compacts.
  - On a $\mathscr{L}(B+x) = \lambda(T(B+x)) = \lambda(T(B)+T(x)) = \lambda(T(B)) = \mathscr{L}(B)$ puisque λ est invariante par translation.

D'après l'unicité de la mesure de Lebesgue (admis), on a $\mathscr{L} = c_T\lambda$ avec $c_T = \lambda(T([0,1[^n)$. Il reste alors à montrer que $c_T = |detT|$. Pour cela on utilise que toute matrice T inversible s'écrit sous la forme T=$T_1...T_k$ où les $T_i, 1 \leq i \leq k$ sont de l'un des trois types suivants :

- Type 1 : matrice de permutation (permute les lignes ou les colonnes selon que l'on multiplie à gauche ou à droite)
- Type 2 : $Diag(1,...,1,\alpha,1,...,1)$ multiplie une ligne ou une colonne par α.
- Type 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

  qui est une matrice qui additionne les deux premières lignes ou colonnes.

Etant donné une matrice, par la multiplication à gauche ou à droite par ces matrices, on peut permuter les lignes ou les colonnes de cette matrice ou en faire des combinaisons linéaires.
Comme T est inversible, il existe $t_{i,j} \neq 0$. En multipliant par une matrice de type 1 puis de type 2, on peut supposer que ce coefficient est $t_{1,1}$ et qu'il vaut 1. En multipliant par des matrices de type 3, on se ramène alors à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & * & ... & * \\ . \\ . \\ . \\ 0 & * & ... & * \end{pmatrix}$$

Par récurrence, en répétant ce procédé, on arrive à la matrice I_n. Cela signifie que T est bien un produit de matrices de type 1,2 ou 3, i.e T=$T_1...T_k$.
On a alors $T(B) = T_1(T_2(...(T_k(B)...))$ et on en déduit que $c_T = c_{T_1}...c_{T_k}$. La preuve est alors achevée si on montre que $c_T = |detT|$ pour T de type 1,2 ou 3

- Si T est de type 1, on a $c_T = \lambda(T[0,1[^n) = 1 = detT$ car T conserve le cube $[0,1[^n$.
- Si T est de type 2, on a $c_T = \lambda(T([0,1[^n) = \lambda([0,1[^{n-1}\times[0,\alpha[) = |\alpha| = |detT|$.
- Si T est de type 3, par exemple comme donné précedemment, on a $T([0,1]^n) = D \times [0,1]^{n-2}$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2\}$, le triangle de sommets $(0,0),(0,1),(1,2)$ et donc d'aire 1, il suit $c_T = \lambda(T([0,1[^n) = \lambda(D \times [0,1]^{n-2}) = \lambda_2(D) \times \lambda_{n-2}([0,1]^{n-2}) = 1 = detT$.

$\square$

Conclusion

- Un corollaire très intéressant d'un point de vu théorique est que si $\mathscr{E}$ est l'ellipsoïde de John de K, alors dans le cas où K est symétrique, $\mathscr{E} \subset K \subset \sqrt{n}\mathscr{E}$

  On peut facilement le montrer lorsque l'ellipsoïde de John est $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$:

  Par une transformation affine de K, $\mathscr{E}$ devient $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$.
  On a donc par les conditions de John que $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i$. u_i appartient au polaire de K (montré précedemment). Ainsi, si $x \in K, \langle u_i, x \rangle \leq 1$. On a par ailleurs que $|x|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, x \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{m} = n$ (en appliquant la trace à l'égalité matricielle). On obtient ainsi que $x \in \sqrt{n}\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$. On obtient donc $\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}} \subset K \subset \sqrt{n}\,\mathcal{B}_2^{\mathrm{n}}$. Cette relation d'inclusion très rigide permet de caractériser spatialement le corps convexe.

- L'ensemble de ce mémoire est basé sur "An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry", Keith Ball (la démonstration du théorème est contenu dedans mais étayée de manière extrèmement succinte et donc à destination d'un public très averti sur la géométrie des corps convexe).
- Je tiens à chaleureusement remercier Mr Lehec pour tout le temps qu'il m'a consacré ainsi que pour m'avoir initié à un suberbe domaine des mathématiques, la géométrie des corps convexes.
- Je souhaite également remercier Joë pour son aide quant à la maitrise de Latex. Enfin, pour finir, je tiens à adresser un immense merci à Sophie avec qui j'ai eu de nombreux échanges mathématiques particulièrement fructueux pour la réalisation de ce mémoire.